前言

地球物理学是用物理的手段和方法,在地面、海洋或井孔中观测来自地球内部的各种信息,如重磁场、电磁场、地震波场、放射射线和热流场等。通过这些信息来研究地球内部几何的和物性的结构。而计算地球物理学就是将上述问题用计算科学方法予以解决,这就是计算地球物理学的任务。计算地球物理学是以计算机硬件和软件提供的工作环境,用数学和信息科学等方法,解决地球物理学中大量无法由解析方法解决的各种理论问题和实用问题。计算地球物理学是地球物理学的一个新的分支学科,它形成于六七十年代,今天仍在继续发展之中。

计算地球物理学的内容很多,要解决的问题范围也很广泛,它所涉及的问题,小的可以是地球上的一个局部点,大到整个地球。从研究目标的尺度来说,可以从地层厚度为几分米到数千千米。因此,不可能把计算地球物理中的所有问题都写入本书,只能将当前计算地球物理学中与科研和实用有关的主要内容加以阐述。即使这样也不可能写得很全面和很详细,只能是其中的基本原理和方法要点。故将本书称之为计算地球物理学概论。

本书的内容由编写组集体写成。第1章、第5章和第6章由马在田编写。第2章和第7章由曹景忠编写。第3章由王家林编写。第4章由徐仲达编写。第8章由侯安宁编写。第9章由刘瑞林编写。第10章由王华忠编写。本书设计与总审由马在田完成。作者谨以本书纪念同济大学建校九十周年。

目　录

第1章　绪论

计算地球物理学(Computational Geophysics)是地球物理、数学和计算机科学三者相结合而产生的一门边缘学科。它是以计算机硬件和软件所提供的工作环境,用应用数学和计算数学以及信息科学的方法解决地球物理学中的大量的无法由解析解方式解决的各种理论问题和实际问题的一门应用学科。计算地球物理学是地球物理学的一个分支学科,这个分支学科已经成为现代地球物理学理论与应用的各个方面必不可少的科学手段和有力支柱。研究和讨论当代的各种地球物理问题离开计算成果已经是不可想像的了。它虽然应用广泛,并已渗透到地球物理学的各个分支学科而且日常从事计算地球物理工作者已占地球物理学界的多数。但是,它永远不会成为地球物理学的全部内容。地球物理学的理论研究和实测与实验工作仍然具有基础性质。因此,将计算地球物理看成是地球物理全部,因而放弃理论研究与实测和实验研究是不可取的。实际上这三个方面是密切相关又各有其相对独立性。只有三者的密切结合才能使地球物理学走向现代科学的先进行列。

1.1　计算地球物理学的兴起与发展

地球物理学实质上是一门以观测数据对地球内部各种尺度的地质体和矿体进行研究的一门科学,因此,从它形成独立学科的时候起,就离不开计算问题。例如,从地震台站的地震波的走时求震源的位置,根据地球物理场的地面观测数据求得地球内部物质结构都需要进行各种计算工作。这类问题属于地球物理反问题。地球物理反问题的计算都是建立在正问题的基础之上的。因此,尽管我们计算的目的是解反问题,但反问题的解是否正确,常常需要通过计算正问题来回答。此外,在进行理论问题研究时,特别是提出新的理论或方法时一定要通过正演模拟的计算和通过模拟数据的验算证明新的理论与方法是正确时才能用于实测地球物理资料的处理,否则会造成很大的经济与时间上的损失。因此,地球物理的计算方法与技术是随着它的正、反演问题研究的深入与扩展而发展起来的。

在电子计算机问世以前,地球物理的计算是粗略的。许多想要计算的问题由于计算工作量的巨大,用人力或台式机械计算器是无法完成的。因此,在50年代以前虽然已经广泛地进行地球物理计算,但它并未形成一门学科分支。只有在将电子计算机引进到地球物理工作中来,特别是各种地球物理资料的数值化采样之后,计算效率大大提高,才使地球物理的计算工作向更深入更精确的方向发展。许多以前无法计算的问题得以解决。这样才逐渐形成了计算地球物理学的分支学科。形成的开始时期大约在60年代初期。当然,50年代已经开始有一些人为了建立和形成计算地球物理进行了研究。Backus, G. 和 Gilbert, F. (1967,1968,1970,1976)在地球物理反演计算方面有过显著的贡献。Robinson, A. 和 Tritel, B.(1967)在应用地球物理领域,特别是在反射地震学的数值处理方面有开拓性的贡献。在中国,计算地球物理的开展是随大型电子计算机的应用开始的,以北京大学数学系闵嗣鹤教授为首的一批数学、地球物理专家为我国的计算地球物理的开展有着不可磨灭的贡献。这

些专家编写了我国地球物理界第一部系统著作——地震勘探数字技术(1973, 1976, 1978, 1980),这对我国的计算地球物理的发展有一定的指导作用。从80年代以来,我国的专家学者出版了一批属于计算地球物理学方面的书。从中可以看到80年代以来计算地球物理学发展的速度与广度。虽然,在地球物理学的各个分支学科或专门技术领域有着不同的计算内容,但其中有许多是共同的,可以互相借鉴的。随着地球物理学对地学与矿产资源、环境与灾害的各个方面的应用,计算地球物理学一定会向更高层次发展,在各个科学领域的计算科学中会占有更重要的位置。

1.2 计算地球物理学的研究内容

地球物理学的问题分为两类,一类称之为正问题,另一类称为反问题。简单地说,正问题是根据给定的地球模型求解地球物理场的理论值,反问题是根据实际观测的(有时也用理论的)地球物理场的观测值解释(定量或者定性)出地球内部的结构,包括地质体形态和岩层的物理性质。计算地球物理学的研究方法实质上就是用数值计算的方法来解决地球物理学中的正问题和反问题。其中反问题的内容占主要地位,正问题是为解反问题服务的。

1. 正问题的计算

正问题一般是先给出地球模型,即全球或局部的地质结构,在假定的自然源或人工源的作用下用相应的地球物理场方程求解地面或地下某处的地球物理场的响应函数,可用下面的表达式表示:

$$\boldsymbol{d} = f(\boldsymbol{m}),\text{在线性条件下表示为}\quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}$$

式中 $\boldsymbol{d}$ 表示数据向量;

$\boldsymbol{m}$ 表示地球模型的参数向量;

$\boldsymbol{A}$ 为线性算子或矩阵。

这样求出的理论场如重力场、磁场、电场或电磁场、地震波场、热流场和其它物理场等可用来研究地球模型与这些场之间的物理过程和映射关系,以便正确地对地球内部结构与地球物理场的关系做出解释。正问题的实质是用人为的条件在实验室内模拟自然界的各种地球物理现象,并给出相应的观测值或计算值。因此,求解地球物理的正问题也常称它为地球物理模拟。地球物理模拟有两种方式。一种是用物理的手段进行,称为物理模拟。这种模拟是按照相似原理将设计的地球模型用各种材料做成物理模型。然后在模型表面或内部施加相应的物理源,如震源,电源,热源等,并用相应的换能器将接收的物理场响应转换为电信号,记录在信号接收－控制系统中。在接收系统中进行模－数转换与采样。这种模拟方式由于投资大,材料选用困难和物理模型制做要求精度高、周期长和费用大等原因,因此不能大量使用,只能做理论或特殊实例的研究。因此人们常常选择效率高、费用低的另一种模拟方式。这就是数学模拟方法。用数学方法对地球物理场的响应函数进行计算也有两种方式。一种是用解析方法,用建立起来的地球模型给出的条件解相应的场方程。求出场方程的解析解公式。再根据这个公式求出地面或地球内部各点的场函数值。如果能够对各种地球模型给出相应的地球物理场方程,并对此种场方程求得解析解,那是解地球物理正问题最简捷方便的方法。但是,能够对各种地球模型列出与之对应的地球物理场方程并求出它们

的解析解的是极少数,一般是非常简单的情况。对于解复杂的地球模型或地质结构模型的正问题,只能采用计算地球物理学的数值模拟方法。数值模拟已经成为解地球物理正问题的主要工具和手段。数值模拟就是将描述各种地球物理场的方程或表达式及初、边值条件通过数值方法求出它们的数值解。在进行计算地球物理的数值模拟中,有许多计算方法,常用的方法如,有限差分法,有限元法(边界元法),快速离散傅立叶变换法,拟谱法,数值积分法,元胞自动机法和在地震学广泛应用的射线追踪法等。这些方法都各有自身的优点与不足。在千变万化的多样的计算地球物理问题中,它们都可能被应用于解决实际计算问题。当然,所有的数值算法都是有误差的。解计算地球物理正问题的过程如下。第一步,根据要研究的对象和问题建立地球模型或地质结构模型。第二步,根据要使用的物理手段和地球模型建立相应的数学模型。第三步,选择进行计算的方法,并根据计算方法编制的计算机实现程序进行计算。计算的结果是否正确可通过理论分析或几种计算方法相互验证来判断。在以上三个步骤中它们是互相关联的。建立的地球模型能够反映主要地质构造和岩石、矿物特征即可。不能把模型搞得太复杂。否则,将无法建立相应的数学模型,或者计算出来的地球物理场过于复杂化,难以辨认地质特征与物理场特征之间的联系。计算方法的选择对于求解地球物理正问题是重要的。有的计算方法只适用于简单的地质-数学模型,但它的计算效率高,机时少,周期短,费用低。有的数值方法能够适用于复杂地质-数学模型,也适用于简单的模型。但是,它的计算效率低,周期长,费用高。如果把它用于简单的地质-数学模型的计算,显然是不合适的。因此,要综合考虑各种因素采用计算方法,特别要有针对性地灵活运用计算方法。

3. 反问题求解

到目前为止,有关地球内部,特别是深部的知识,主要还是来自地球物理的观测资料的解释取得的。因此,地球物理学的基本问题就是用地面或地表附近的各种观测资料定性和定量地对地下的地质结构和矿产资源做出判断,这就是解地球物理反问题。用公式表示为

$$\boldsymbol{m}=g(\boldsymbol{d}),\text{在线性情况下表示为}\quad \boldsymbol{m}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{d}$$

式中 $\boldsymbol{m}$ 表示地球介质模型的参数向量;

$\boldsymbol{d}$ 为数据向量;

$\boldsymbol{A}^{-1}$为 A 的反算子或逆矩阵。

地球物理反问题有广义和狭义两种提法。广义地球物理反演是指根据地面观测数据不管用什么样的方法和计算手段,能对地下的地质情况做出定量或半定量的估算都可称为解反问题或反演问题。例如合成声波测井曲线的计算,神经网络的地层横向预测,油气储层的多参数分析,矿体埋深与大小的估算和求波动方程系数以及地球物理层析成像等均属于广义反演范畴。狭义地球物理反问题是指与各种地球物理场方程,即各种偏微分方程有关的地球物理反问题的求解方法和计算问题。狭义的地球物理反问题与数学物理反问题或数理方程反问题是密切相关的。

狭义地球物理反问题又可分为两类(Marchuck, 1985)。第一类是根据现在的物理状态去确定物理过程的过去状态。例如,已知物体的当前温度去确定初始的温度分布;根据空间中波场的当前分布计算以前某时刻波场的空间分布等。前者用于地热场的研究,后者用于地震偏移成像、电磁波成像和地震层析成像的研究。第二类是从微分方程的解的某种泛函

来求方程的系数或右端项。第一类反问题求解相对容易，虽然场函数与介质参数二者之间存在不确定性，但计算总是稳定的。因此，在实用中取得了良好的效果。无论是地震偏移问题，还是求地热场的原始分布问题，都是通过解微分方程计算波场或热流场的传播逆过程。虽然这个过程也是物理不可实现的，但是它的物理意义是非常确定的，而且这个过程是唯一的。因此，反演的结果在参数未确知或计算方法非最佳的情况下只存在误差，不存在非解的问题。这一点与下面要讨论的第二类数理方程反问题是很不相同的。第一类数理方程反问题在正确建立数学模型或数理方程问题的前提下，问题是适定的和线性的。因此各种求解的计算方法都是稳健的。对解此类反问题的计算方法的评价标准主要是对复杂介质的适应能力和计算效率的综合指标。这一类反问题如果把时间的指向反个方向，确实可以把这类问题看成是特殊的地球物理方程正问题。这就是它的数学计算上的性状为什么与正问题更相似的原因。

第二类数理方程反问题一般是不适定的和非线性的。不适定性表示这类反问题的解不唯一。非线性说明求解上的困难。这类反问题经过半个世纪的求索，至今仍然不是那么好解决的，特别是高维波动方程反问题的研究，无论从理论上，还是从实用上来看，基本没有一个令人满意的求解计算方法。虽然在各个学科领域发表了大量的论文和著作，但一触及实际问题都显得无能为力。特别是计算地球物理反问题由于数据不足，使本来的不适定问题的求解更加困难。近年来在一维地球物理反问题中特别是波动方程反问题的理论与实用相结合的研究方面比高维反问题的研究有较多的进展（张关泉，1991，1995，刘家琦等，1995，宋海斌等，1995，1996），

一维波动方程反问题的方法，基本可分为两类，一类是反散射方法，另一类是特征方法。反散射方法最初产生于量子力学领域，归结为 Schrodinger 方程势函数的重建问题，也常称为 Sturm-Liouville 方程的反谱问题。一维波动方程可化为 Schrodinger 方程的等价形式。反散射问题也可在时域进行（Gel' fand et al.，1951；Marchenko，1955；Gopinath et al.，1971；栾文贵，1989）。反散射方法通过求解一个线性第二类 Fredholm 积分方程（频域的 G－L 积分方程，时域的 Gopinath-Sondhi 积分方程）使反问题得到解决。Ware 和 Aki（1969）用 Marchenko 积分方程法研究了层状声学介质的阻抗反问题。后来被 Berryman 和 Greene（1980）证明它与 Goupillaud 的直接从水平层状离散模型建立的反演方法是等价的。

解一维反问题的特征方法是个时域反演方法，该方法通过奇性分析建立待求参数与波动方程解的直接关系式，沿特征线积分求解将反问题化为求解非线性的第Ⅱ类 Volterra 积分方程组的问题（Romonov，1987）或非线性偏微分方程的初值问题（张关泉，1988），与之相对应的数值计算方法有 Bube 的特征线积分－差分法（Bube 等，1983）和直接离散计算积分方程组的方法。

此外，还有一维波动方程反问题线性化求阻抗的近似解的方法。在这方面有不少的实用计算求解方法，如刘家琦等人的逐段折叠反演方法用于一维地震数据的阻抗系数的重建。

在高维数理方程反问题方面，基本上可分为两大类。第一类是直接解积分方程的 Born 近似线性反演方法（Bleistein 等，1987）。这种方法是将介质参数（速度、密度、介电常数或弹性系数 λ 和 μ 等）分解为两部份，一部份数值较大的称为背景 a，另一部分较小的 δa 称为摄动量。假定背景值是已知的，则反演求解的是摄动量 δa。地震波或电磁波的散射场是由这个摄动量 δa 产生的。这样就可以将非线性反问题变为一个线性的积分方程求解问题。利

用现有的数学工具，可以将求 δa 摄动量表示为一个多重积分公式。这种方法尽管数学表达式很优美，在数值计算上也能够稳定求解。但实际效果并不好，表达不了 δa 的定量值。特别是在多层和复杂几何形态情况下，要求背景值随深度而变。作为深度参数的背景值一般无法正确给出。如果给出的背景值和摄动量不能满足 $\delta a \ll a$ 的条件，线性化就无法实现，计算的结果将不知为何物。因此，这种方法目前正用来从事保幅偏移的研究。

第二类高维反问题的求解方法是，通过使观测的地球物理数据与根据地球模型计算的理论数据的最佳拟合，对模型参数进行估计。给出先验的地球模型，用恰当的地球物理场方程对它进行正问题计算，求得相应的数据，然后对它们进行最佳拟合。最佳拟合的方法一般使二者误差的平方和为最小，或绝对值之和为最小来实现。一般可表示为 Lp 模最优化问题(以线性问题为例)，即

$$S(m) = \min\sum_i \left| \sum_j G_{ij} m_j - d_i \right|^p$$

式中 $p \geq 1$。

在用到数据、模型参数的概率分布函数时，要考虑概率密度的作用(Tarantola, 1987)。用最佳拟合方法求解反问题时，虽然方法是稳健的，即计算上保证是稳定的。但是它仍然无法解决多解性问题。因为最优化中的目标函数 $S(m)$ 不能保证它是一个凸函数。它可能有很多局部极值。如果给定的初始模型参数组合不处于真解附近，则反演结果就会落人局部极值，从而反演的结果是不正确的。这种不正确可能离正确解相去甚远。导致反演失败。为了在求解过程中避开局部极值，可选用模拟退火法和生物遗传算法等计算技术。但仍不能保证不落人局部极值。因此，先验的模型参数的信息是非常有价值的。如果我们能够给定解的先验信息被约束在一定的范围内，则反问题的解就有望是正确的。在约束条件方面，如物性参数是非负的，它们的取值也是有一定范围的，它们之间有时有一定的函数关系，在特定地区从钻井、测井或其它渠道已知其中的参数值等。

3. 信号处理、信息提取与可视化研究

正、反演问题是计算地球物理学的主要研究内容，但是为了更好地解出正、反演问题，特别是在用实测数据进行反问题求解之前，要对实际的地球物理数据进行旨在加强有用信息的信号处理。因为，在实际观测数据中总是存在各种各样的噪声和干扰。如果用有严重干扰的地球物理数据进行反问题研究，其所求结果是不可想像的。因此，对实测地球物理数据首先要进行处理。地球物理数据也可以看做是信号，特别是地震数据和电磁场的观测数据。在信号处理和信息提取过程中对计算地球物理学最重要的处理内容就是提高信噪比和提高分辨率的工作。而信噪比又是分辨率的基础。提高地球物理数据的分辨率又是一个系统工程(李庆忠，1993)。因此，计算地球物理学在这方面的研究内容也是相当广泛的。

关于提高信噪比的问题，一向被地球物理学家所重视，为了提高信噪比，在观测和处理方面曾经投入过大量的工作。如在反射地震学中实行多次覆盖观测技术。在处理中实行共中心点道集叠加，或共反射点道集叠加，或共转换点道集叠加等。其目的是将不同次接收的同一点处的反射波同相叠加，叠加后信噪比可提高 $\sqrt{n}$ 倍。有时要进行共深度面元叠加(Common Depth Area Stack 简称 CDA)使覆盖次数由几十次达到几百次。当然，要做到同相叠加也非易事。有时地表等复杂条件会破坏同相性，因此要进行地表校正等。提高信噪比的另一项工作就是去噪处理。噪声又分为随机性噪声和相干性噪声。消除这些噪声已有不少

方法。但有时仍然不能解决低信噪比记录中的两种去噪问题。

提高分辨率的问题也是一个持久性的研究课题。因为对地球内部结构的研究详细程度越来越高,因此对分辨率的要求也就越来越高。各种反滤波是提高分辨率的手段,但并非那么有效。另外对于地层的高频吸收作用的补偿是一个尚未解决的问题。

此外,计算地球物理的结果总是以各种图件表示的,如剖面图,平面图,透视图和各种曲线图等。随着多媒体的应用,地球物理成果的可视化将是计算地球物理学研究的一个重要方面。

1.3 计算地球物理学的特点

计算地球物理学就是用计算的方法解决地球物理中的科学问题和实用问题。它与数学,特别是计算数学有着密切关系。但是,计算地球物理学的问题常常不是用已有的计算方法就能解决问题的,而是要从问题自身的特点出发,采用一定的数学手段才能完成计算工作,达到我们研究的目标。

(1) 不适定问题在计算地球物理学中经常遇到,且是不可避免的,特别是在解反问题方面。早年,人们普遍认同 Hadamard 的观点,即不适定问题没有物理意义。而地球物理学要解决的问题,很多是不适定的但它们是有物理意义的。因此,后来数学家对不适定问题重新作了定义,认为不适定问题是有意义的适定外延。为适定外延数学家引进了某种先验假定。例如,原苏联科学院院长吉洪诺夫(1963)假定不适定问题的解具有某种"正则"性质,可以通过将不适定问题正则化变为适定的问题求解。Franklin(1970)则假定模型空间满足某种先验统计规律。事实上,如果将 Hadamard 有关数理方程解的适定性的定义做适当修改是合适的:能够描述自然界中物理可实现过程的问题是适定的,而求解自然界中物理不可实现,但有物理意义的问题是条件适定的,无任何物理意义的问题是不适定的。例如,在地球物理中解波动方程的初值问题求地震波的传播问题是适定的。因为这时求出的解是描述了一个物理可实现的过程,即地震波从震源出发向外传播的物理过程。在偏移问题中要求从当前的波场推出以前各时刻上的波场值,即要解地震波的反向传播的问题。这是一个物理不可实现的问题。但是,它是有物理意义的。因此它是条件适定的。这时,如果我们把问题提法和初、边值条件做出合理的改变,即可以使问题变为适定的。将时间的方向改变符号,即给出逆时间求解波动方程即可实现逆时波场外推。另外,如果将波动方程分解为上行波方程和下行波方程,我们用上行波方程进行深度方向的反向波场外推,问题变为适定的。如果对波动方程本身不做任何的条件改变,既不进行逆时外推,也不用上行波进行深度方向的反向外推,则问题是不适定的。因为这时方程全部或部分内容无物理意义。

总之,在计算地球物理学中用于进行计算的方程一定要使它满足能够描述真实的物理过程,至少应当具有明确的物理意义,方程中不能包含无任何物理意义的成分,同时还要根据问题把相应的计算条件合理的给出,则计算是可以实现的,否则计算不稳定或结果不正确。

(2) 要求计算地球物理的求解精度要有适度性,否则会适得其反。这对解正问题和反问题都是应当予以慎重考虑的。关于适度性的问题不是指对算法本身或计算过程以及收敛性和稳定性而言的,这些方面都应当按照计算数学的要求严格认真地做好。由于地球物理

的观测数据是间接的物理场响应的综合结果，不是与地下的地层空间点一一对应的，因此不能简单地要求达到想要达到的理想精度。例如，对分辨率的要求要有一个正确的理解，不可无限制的提高。因为地球物理场总是有干扰背景的。如果在地震记录上用各种反滤波和谱白化手段无约束地提高高频成分，则会出现假的高分辨率，也就是所谓的地质假象。因此，研究一个地区的观测数据的极限分辨率是非常必要的。虽然理论上已有不少关于分辨率定义的公式，但是地震记录的实际分辨率远非理论定义的分辨率能包括完全的。不论是 Widess 的分辨率厚度为 1/8 视波长，还是 Knapp 的 1/4 的视波长都无法解决客观实际的多个厚度不等又无韵律的薄互层的分辨率问题。对分辨率的要求应当根据地层组成状况，实际接收到的频率成分做系统的研究才能决定。那种认为地震波分辨率可以无限提高，甚至提高到一个采样间隔的水平是骗人的。关于地震垂向分辨率的问题，我们非常赞赏李庆忠院士的观点(1993)：不同的频率成分有不同的用处，缺了哪一部分都不成；分辨率与频带宽度成正比是对的，但并不能说频带的宽度越大越好，还要注意不要丢掉有地质意义的低频成份；那种丢掉低频成份，表面上看来主频较高的分辨率是假分辨率。

除了分辨率问题外，其它方面还有很多处理需要适度的问题，几乎在每个处理方法中都有相类似的问题。如去噪过度会损害有效波，反之则去不掉噪声。组合、混波和相干处理过强会造成地层的假连续性，反之连续性及信噪比很差。在偏移、反演阻抗剖面上都有类似的问题。因此，计算地球物理学中的适度性就成为一种非常关键的技巧，甚至可以说是一种知识和技能水平的衡量标准。它作为对最终地震成果优劣评价的标准是一个专门的学问，不可等闲视之。

(3) 在计算地球物理学中结合实用的创新性是它的发展的基础。计算地球物理学中的数学模型、计算方法、算法技巧虽然很多是应用了数理方程和计算数学中的已有知识。但它们都不是直接的应用，而是与地球物理中的问题密切结合，以明确的地球物理问题为出发点和归宿点。因此，它们并不总是与计算数学的研究热点相一致的。从地球物理问题提出的方程、公式和求解方法与计算方法都是比较独特的，不但与现成的数学方法不完全一致，而且有时很难对它们的适定性、收敛性和稳定性做出预先的研究。常常是先应用，从应用的效果来判断模型、方法和计算过程的可行性。看起来这有些盲目和不够科学。但是，所有的科学都要通过实践或实验来验证的，只是时间有长有短而已。不断地创新，结合实用的发展是计算地球物理所应当具有的一个特征。否则，难以把大量的尚未解决的问题加以解决。

譬如，地球物理学中的反问题的命题方式，由于不适定性就被人们认为是无物理意义的。但是，地球物理学家坚持自己的立场，最终一些著名的数学家还是作了对 Hadamard 定义的修改(吉洪诺夫，1963)。又如波场和电磁场的反向外推问题，从一般数学角度分析是一个不适定问题，但是在计算地球物理中得到广泛的应用。它不但能够进行稳定的数值计算，而且得到了良好的计算结果。在计算中使用了各种计算方法，如有限差分法，有限元法，快速傅氏变换法和拟谱法等多种计算方法。得到的结果是一致的。这就用事实证明了该数学模型，由于有明确的物理意义，它的收敛性和稳定性是有保证的。还有，由于计算地球物理学家对地震子波和分段函数谱估计的继续研究，最后形成小波分析理论，通过数学界向其它学科领域推广。这些都是比较典型的创新性。

此外，在实际资料的处理和工业应用中，计算地球物理学也是处于研究状态中，它与工业成品生产过程完全不是一回事。不了解地区特点和处理的目标，不了解每个模块的原理

和功能，没有充分的经验，不进行持续的开发研究是得不出好的地质效果的。

总之，在计算地球物理学的理论研究和实际应用中离不开不断地研究和创新。因为面临的任务越来越复杂，越来越深入。计算地球物理学如果不能赶上新一轮的科技革命的步伐，就有可能走向没落被历史所抛弃。

1.4 本书的内容

计算地球物理学的内容很多，要解决的问题范围也很广泛。它所涉及的问题，小的可以是地球上的一个局部点，大到整个地球。从研究目标的尺度来说，可以从地层厚度为几个分米到数千千米。因此，在计算中对同样的问题可能有各种精度的不同方法。尽管如此，在固体地球物理领域，计算问题还是有很多共同之处的。因此，本书可以作为从事固体地球物理工作和地声学研究的计算技术的参考书。本书是根据中等尺度的地质目标做为研究的基础写成的。但完全可以用于大尺度和小尺度地质体研究的。

本书是根据作者在过去十余年的科研和教学的工作中的体会为主来编写的，但考虑到这本书是用来作为研究生的参考读物，要求有一定的系统性和完整性。因此，在编写本书的过程中，不可避免的参照和采用了部份他人的学术成果。在此特向这些作者表示感谢。

本书共有 10 章，除第 1 章为绪论外，以后的 9 章都是针对专题进行论述。第 2 章为地球物理正演模拟的数学方法的综述。其中主要介绍在地球物理领域中，特别是在实用地震学中的模拟声波和弹性波传播及反射波波场。在计算方法方面讲到了有限差分法，有限元法，虚谱法和射线法等。第 3 章为位场和电场的正演和反演的原理和方法。在位场正、反演方法讨论中，重点是三维地质体的数值积分方法和多界面的正、反演计算的原理与效果。在电场正、反演计算原理和方法的阐述中，重点是讨论电磁场的一维和二维的正、反演方法。第 4 章是地震波的散射与吸收。在这一章中，首先讨论了单个界面和多层介质的波的散射和衰减问题。对这些问题进行了以实用为背景的理论分析和计算。在此基础上着重讨论了反射波振幅与入射角的关系在寻找油气中的应用问题。在这方面详细地阐述了薄互层中的储层的振幅与入射角的关系。在这里对 AVO(振幅与炮检距关系)技术的应用做了系统的讨论，特别是对 AVO 分析前的处理要求与处理方法进行了分析，以保障振幅的保真度。第 5 章是地球物理场的向地下延拓和成像问题的研究。在这一章里主要针对三维地震深度偏移成像和多波多分量地震记录的波场分离和转换波成像问题展开讨论。这些内容，除了有相当的新颖性外，并且很实用。在我国不少地区实用过，取得了良好的效果。在这一章中还介绍了电磁波场的电阻率偏移成像问题。文中叙述了电磁(EM)场偏移的物理意义，数学基础和地电分界面成像及电阻率成像。其中的方法原理与地震偏移成像有许多相似之处，成功地借鉴了地震偏移成像的计算方法和技术。第 6 章是谈波动方程参数反演方法问题。使用波动方程对波阻抗、速度、密度、弹性系数进行反演的方法甚多，但很实用的方法并不多。因此，在这方面本章不是全面地介绍各种反演方法，而是从中选取有相当实用价值和有代表性的内容进行详细阐述与讨论。我们分四个方面进行论述，即一维波阻抗反演中的特征线法和拟合 - 线性化法；弹性波多参数反演，利用二分量多炮检距记录可同时反演纵波速度、横波速度和密度等；多维反散射方法是采用 Born 近似导出积分方程求出解析式；最后一部分是非线性拟合反演的介绍。第 7 章是有关层析成像的论述。这方面的论文不少，但由于地

球物理数据不完备,使求解的可靠性和分辨率都难以达到使用的目的。为了本书的完整性,还是对这部分内容做了概要的叙述。第8章是横波分裂与裂隙检测。在这一节中首先介绍了地震各向异性和横波分裂的理论与实验结果。在此基础上介绍用垂直地震剖面的三分量观测记录和地面地震资料进行裂缝检测的方法和实例。这一章的内容是有一定的新颖性的。第9章讨论人工神经网络的方法原理及其在油气预测中的应用。作者在此方向上做了不少实用性研究,取得了较好的成果。第10章是对地球物理中使用的一些非线性方法进行了理论结合实际的较系统的阐述。这也是近年来进行实用性探索的一个总结。

从以上概略介绍的内容,大家可以看出,尽管本书的字数已达40多万,但仍然包括不了计算地球物理的全部内容。还有很多的内容并未涉及。希望有更多的同行进一步写出计算地球物理的其它内容。使计算地球物理这门新学科分支得到进一步的发展,以推动整个地球物理各学科的全面发展。本书只能起到抛砖引玉的作用。对书中引用的国内外专家、学者的研究成果,表示衷心的感谢。同时也感谢国家自然科学基金会,多年来对本书作者所进行的科学研究的一贯支持。因此,本书也可看做是国家自然科学基金会资助的科研成果的内容之一。

第1章 参考文献

1. 石油部地球物理勘探局计算中心,北京大学数力系等地震勘探系数字技术第一册(1973)第二册(1974)第三册(1977)科学出版社
2. Robinson, E. A., 1967 Multichannel time Series analysis with digital computer programs: San Francisco, Holden-Day. Inc. 298P.
3. Backus, G. and Gilbert, F., Numerical applications of a formulism for geophysical inverse problems, Geop. Journal of the Royal Astronomical society, 13, 247—276P.
4. Backus, G. and Gilbert, F., The resolving power of gross Earth data. Geop. Journal of the Poyal Astronomical Society, 16:169—205P.
5. Backus, G. and Gilbert, F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A266:123—192P.
6. Ware, J.A,, and Aki,K., Continuous and diserete inverse scattering problems in a stratified elastoc medium, Joural of the Acoustical Society of America 45:911—921P.
7. Marchenko, V. A., 1955, Sturm-Liouville operators and their applications (in Russian) Naukova Dumka, Kiev
8. Tikhonov, A. N., 1963, Resolution of ill-posed problems and the regularization method (in Russian) Dakl. Akad. Nauk SSSR,151:504P.
9. Bleistein, N., Cohen, J.K., and Hagiu, F.G., 1987 Two-and-one-half dimensional Born inversion with an arbitrary reference. Geophysocs,Vol.52 26—36
10. Bube, K.P., and Burridge, R., The one-dimension inverse problem of reflection seismology, SIAM Review,25,497—559,1983
11. Romonov, V.G., Inverse problems of mathematical physics, VNU Science Press. Urtrecht,1987

第2章　复杂介质地震波场的数学模拟

2.1　概述

应用地球物理学中的一项重要任务就是寻找地下油气藏，油气藏一般都是存在于沉积盆地中有孔隙的构造之中，另外也有薄互层的岩性油气藏。我们的任务就是把油气藏的范围和位置准确地确定下来。实际上这是一项综合性的工作。一般情况下是首先对这一地区采集的地震资料进行各种处理，然后依据处理的结果以及这一地区的地质资料、测井资料（如果有的话）作出构造及岩性方面的解释。常常由于构造复杂，岩性及速度变化太大，给各种处理方法特别是成像处理带来很大的困难，以致难于作出确定的解释。这时，人们会在这些资料的基础上再加上经验对这一地区的构造及岩性先作出各种猜测，即形成一种模型，然后再依据地震波在介质中传播的理论，仿照各种数据采集方式，计算出数字模拟剖面（也叫做人工合成剖面），再与实际资料对比。尽管人工合成记录与实际记录不会完全一样，但是通过对比其相似性及差异性，地球物理解释人员可以获得许多对该地区构造、岩性、速度的再认识，然后修改模型，再模拟、再对比，直至获得满意的地质解释。这就是数字正演模拟的一个重要的应用。

另外，地震数据处理中要经常研究一些新的处理方法来不断改善速度分析及成像等问题，这种方法有许多而且不断地出现，如何对它们进行检验、评价和对比就成为一个重要的问题了。这时往往正演数字模拟成为解决这个问题的标准数据。之所以不用实际数据，是因为它还存在静校和速度未知等不确定因素，而数字正演数据就排除了这些不确定的因素，用各种处理方法处理的结果就决定了方法的优劣。这种思想愈来愈引起大家的注意。EAEG（欧洲地球物理学会）在1990年就曾专门开过这样的讨论会（用 Marmousi 模型），以后又与 SEG（美国勘探地球物理学家协会）共同推出一些复杂地质模型的三维数字模拟，并向世界范围的地球物理工作者提供这些数据，以检验自己方法的效果。

数字正演模拟有时在设计某区域的采集方案时可以用来检验其采集方法及参数，以使在实际施工中取得更好的效果。

数字正演模拟还有一个重的作用就是形象地教学和科普学的作用。在讲解波的传播过程时，或向大众介绍地震勘探原理时，用数学公式来描述波的传播往往会使人感到抽象和枯燥，而用数学公式计算的数字正演模拟可以把地下构造在每个时刻振动的情形都记录下来，也是把地震波在构造中的传播过程全部记录下来，用这各个时刻的振动制作成动画或电影，这样就可使人们直观、形象地了解到地震波在地球内部传播的情形，这在实际试验中无论如何是无法了解的。这个动画的作用也不限于教育和科普，有时研究人员在碰到一些难于解释的同相轴时，通过地震波传播过程的描述，可以追踪其来源，所以这也是认识波的复杂关系的一个有效的方法。

正演模拟的方法有物理模拟及数值模拟，物理模拟是在实验室用一些特殊材料做成缩小了的地质模型来测量波的传播。应用地球物理中常见的一种方法是模拟地质体的波阻抗

界面,并且在水面测量波的传播,这非常接近实际采集数据的方法。由于地质模型由几公里缩小为厘米级,所以声波的频率也由几十赫提高到几十万赫,密度及速度也要按比例相应地改变。

数值模拟又分为波动方程的解析解及数值解(包括近似解)。对于一些简单的地质模型,例如均匀水平层状介质等,我们可以得到其精确解,对于复杂的地质模型解析解很难获得,这只有靠被动方程的数值解才能说明构造对波的传播的影响。在应用中即使简单模型也常常求其数值解,解析解只是作为对数值解的一种检验。数值方法一般采用有限差分法、有限元法或虚谱法等来求复杂介质条件下的波动方程数值解。

射线追踪也是常采用的一种正演模拟方法,射线追踪的理论基础是几何光学,它对地质模型的几何尺寸的要求是大大超过子波的波长。另外还有高斯射线束等方法。

下面对数值解法及射线追踪法给予较详细的讨论。

2.2 有限差分法正演数值模拟

对不同的边界条件和震源用有限差分法解声波方程或弹性波方程,我们可以得到各种地质模型的人工合成记录。

2.2.1 声波方程的人工合成记录

1. *声波方程*

非均匀介质的声波方程可由对连续介质力学方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\rho c^2\nabla \boldsymbol{V}=0 \tag{2.2.1}$$

的两端对时间 t 求导,并利用欧拉方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\nabla P=0 \tag{2.2.2}$$

而推得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\rho c^2\nabla\cdot\left[\frac{1}{\rho}\nabla P\right]=0 \tag{2.2.3}$$

其中 P 是声压,$\boldsymbol{V}$ 是质点运动速度向量,ρ 是密度,c 是波在介质中的传播速度,ρ 和 c 是在空间中变化的。如果引入震源,(2.2.3)式可写为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\rho c^2\nabla\cdot\left[\frac{1}{\rho}\nabla P\right]=\delta(t)\delta(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.4}$$

其中 $\delta(\cdot)$是 Direc 函数,$\boldsymbol{r}$ 是位置向量。但在实际问题中,我们总是用一个有限宽频节的时间函数来代替 $\delta(t)$,这样才能真实地反映地震源传播的情形。

下面以二维为例进行较详细的讨论。对于三维的情形,可以依些推广,而没有本质上的困难。

2. *有限差分近似*

下面讨论如何用有限差分法解方程(2.2.3)或(2.2.4)。

时间导数用二阶差商来近似时,可表示为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\frac{1}{\Delta t^2}[P_{m,n}^{k+1}-2P_{m,n}^{k}+P_{m,n}^{k-1}] \tag{2.2.5}$$

其中 $P_{m,n}^{k}=P(m\Delta x,n\Delta z,k\Delta t)$，$\Delta x$，$\Delta z$ 是空间间隔，Δt 是时间间隔。空间导数按 Mitchell (1969)方式给出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,z)\frac{\partial}{\partial x}P(x,z,t)\right]$$
$$=\frac{a\left(m+\frac{1}{2},n\right)}{\Delta x^2}[P_{m+1,n}^{k}-P_{m,n}^{k}]-\frac{a\left(m-\frac{1}{2},n\right)}{\Delta x^2}[P_{m,n}^{k}-P_{m-1,n}^{k}] \tag{2.2.6}$$

其中

$$a\left(m\pm\frac{1}{2},n\right)=\frac{a(m\pm 1,n)+a(m,n)}{2} \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[a(x,z)\frac{\partial}{\partial z}P(x,z,t)\right]$$
$$=\frac{a\left(m,n+\frac{1}{2}\right)}{\Delta z^2}[P_{m,n+1}^{k}-P_{m,n}^{k}]-\frac{a\left(m,n-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z^2}[P_{m,n}^{k}-P_{m,n-1}^{k}] \tag{2.2.8}$$

其中

$$a\left(m,n\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{a(m,n\pm 1)+a(m,n)}{2} \tag{2.2.9}$$

现以离散脉冲震源为例，把(2.2.5)，(2.2.6)，(2.2.8)式代入(2.2.4)式，则有

$$P_{m,n}^{k+1}=2P_{m,n}^{k}-P_{m,n}^{k-1}+\frac{r^2(m,n)}{2c(m,n)}\left\{\left[\frac{1}{\rho(m+1,n)}+\frac{1}{\rho(m,n)}\right][P_{m+1,n}^{k}-P_{m,n}^{k}]\right.$$
$$-\left[\frac{1}{\rho(m,n)}-\frac{1}{\rho(m-1,n)}\right][P_{m,n}^{k}-P_{m-1,n}^{k}]+\frac{\Delta x^2}{\Delta z^2}\left[\frac{1}{\rho(m,n+1)}-\frac{1}{\rho(m,n)}\right]$$
$$\left.[P_{m,n+1}^{k}-P_{m,n}^{k}]-\left[\frac{1}{\rho(m,n)}-\frac{1}{\rho(m,n-1)}\right][P_{m,n}^{k}-P_{m,n-1}^{k}]\right\}+\delta_{m_0,n_0,0}^{m,n,k} \tag{2.2.10}$$

其中

$$r(m,n)=\frac{c(m,n)\Delta t}{\Delta x}$$

$c(m,n)$为空间格点(m,n)处的速度，

$$\delta_{m_0,n_0,k_0}^{m,n,k}=\begin{cases}1 & m=m_0,n=n_0,k=k_0\\ 0 & 其它\end{cases} \tag{2.2.11}$$

由于(2.2.10)中的震源项用的是 Kronecker 函数 $\delta(n)$。当有限宽频带子波 $f(t)$作为震源时，我们可用方程(2.2.10)的解与该子波作褶积而得到以此子波为震源的解。当然也可以直接在方程中用 $f(t)$的离散值代替 $\delta(n)$而求其解。对于 $f(t)$可以有多种选取方法，下面是其中的一种

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t^2}\sin 2\pi ft \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{2.2.12}$$

f为主频，T 为子波长度。

3. 稳定性

作为方程(2.2.10)的解，它必须是有界的，这即是对差分方程稳定性的要求。对于均匀介质，方程的解的稳定性是确定的，假设稳定系数为 s，则

$$s = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.2.13}$$

c 是均匀介质中的波的传播速度，这里的 Δx 应为实际差分格点中 Δx 和 Δz 中的最小者。对于我们应用地球物理中常用的非均匀介质，常常是指由各种几何形体的均匀介质组合而成的介质，对于这种非均匀介质，方程的稳定系数 s 当然应当满足下式

$$s = \frac{c_{\max}\Delta t}{\Delta x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.2.14}$$

$c_{\max}$是各种均匀介质中最大的波速。

4. 边界条件

由于我们是在计算机上实现上述算法，在空间上必须给定一个有限的范围。首先假设地面是自由表面，也就是设地面的声压始终为零。另外在横向及深度方向都是有界的，这样给定的结果，就是在模型范围之内，ρ，c 均不为零，在模型这外 ρ 及 c 都是零，无形之中就给定了一个界面，这样计算的结果就出现来自边界及底面产生的反射波。这种反射会严重地干扰我们想要的反射波。为了消除这种来自边界及底部的反射，人们想出了各种办法，这些以后再详细，现就本问题给出相应的处理办法。

Reynolds(1978)的处理方法既具有明确的物理意义，又有明显的效果。方程(2.1.3)本来应在无穷介质 D 中求解，

$$D = \{(x,z,t) \mid -\infty < x < \infty, 0 \leqslant z < \infty, t \geqslant 0\} \tag{2.2.15}$$

但模型是在一个有限的区域 $\overline{D}$ 之内，

$$\overline{D} = \{(x,z,t) \mid -a \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T\} \tag{2.2.16}$$

如直接取边界条件为

$$P(\pm a,z,t) = 0 \quad , \quad P(x,b,t) = 0 \tag{2.2.17}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}P(\pm a,z,t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}P(x,b,t) = 0 \tag{2.2.18}$$

在这种情形下考虑方程(2.2.3)的平面波解，则有

$$P = e^{i(\omega t - kx\cos\theta \pm kz\sin\theta)} + Re^{i(\omega t + kx\cos\theta \pm kz\sin\theta)} \tag{2.2.19}$$

其中第一项是沿 x 轴的正方面的入射波，θ 为波荷与 x 轴间的夹角，第二项为沿 x 反方面传播的反射波，R 为反射系数。把边界条件(2.2.17)代入方程的解(2.2.19)中，可以得到

$$|R| = 1 \tag{2.2.20}$$

这就是因边界条件取的不当而产生的边界强反射。这当然不是我们所需要的。我们希望在 $x = a$ 处取的边界条件能使 $R = 0$。按 Reynolds 给出如下的边界条件

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)P = 0$$

$$x = -a, 0 \leqslant z \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.2.21}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)P = 0$$

$$x = a, 0 \leqslant z \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.2.22}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)P = 0$$

$$-a \leqslant x \leqslant a, z=b, 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.2.23}$$

其中

$$s=\frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x}$$

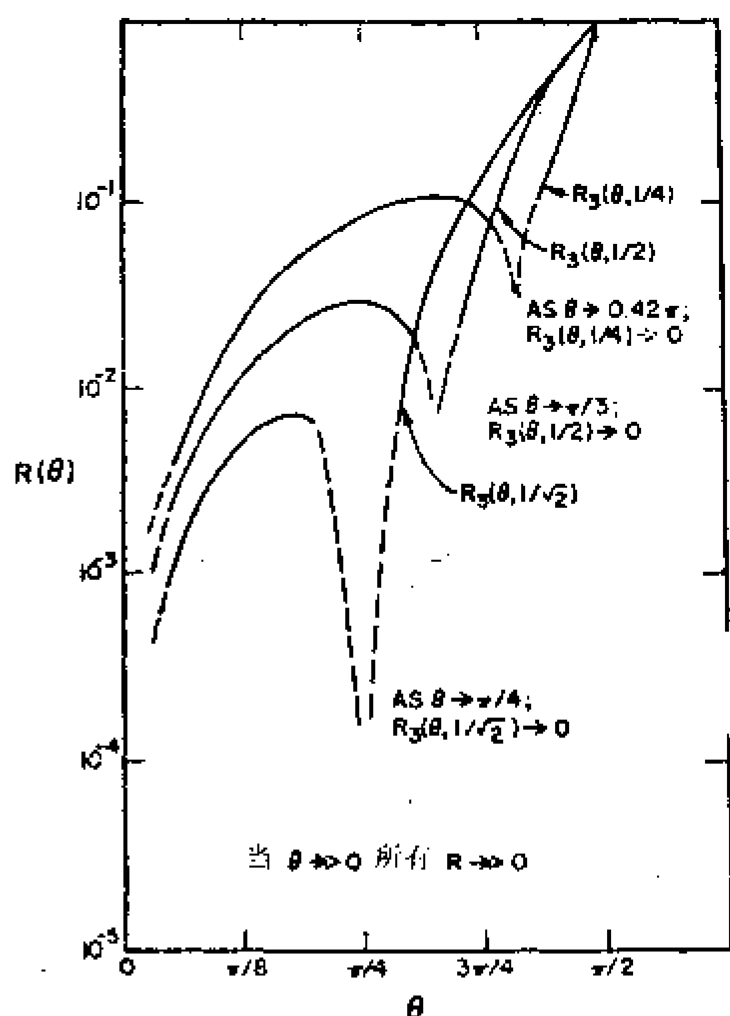


图 2.2.1　各种边界条件下的反射系数(Reynolds)

以求侧面反射波的反射系数为例,式(2.2.19)中的反射系数 R 可估计为

$$R(\theta, s)=\frac{\left|\cos\theta-\cos^2\theta-\frac{s}{1+s}\sin^2\theta\right|}{\left|\cos\theta+\cos^2\theta+\frac{s}{1+s}\sin^2\theta\right|} \tag{2.2.24}$$

R 是入射角 θ 及稳定系数 s 的函数。$R\left(\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$R\left(\theta,\frac{1}{2}\right)$及 $R\left(\theta,\frac{1}{4}\right)$的图见图 2.2.1。由于通常我们取 $s\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$,这是差分方程稳定的条件,从图中可见这时只要 $\theta\leqslant\frac{3\pi}{8}=70°$时,$R(\theta)$均小于 0.1,这基本上达到了消除侧面反射的要求,以上边界条件通常叫做透明边界条件。图 2.1.2 显示透明边界条件消除侧面反射波的效果。图 2.2.2a 是几何模型,其中只含有一个界面。图 2.2.2b 是在 Dirichlet 条件下(即直接在侧面处取 $P\doteq0$)而得到的人工合成记录,显然侧面反射严重地干扰了有效的界面反射波。图 2.2.2c 是透明边界条件下的合成记录,这时侧面反射波弱得几乎看不见了,而界面反射很清晰。

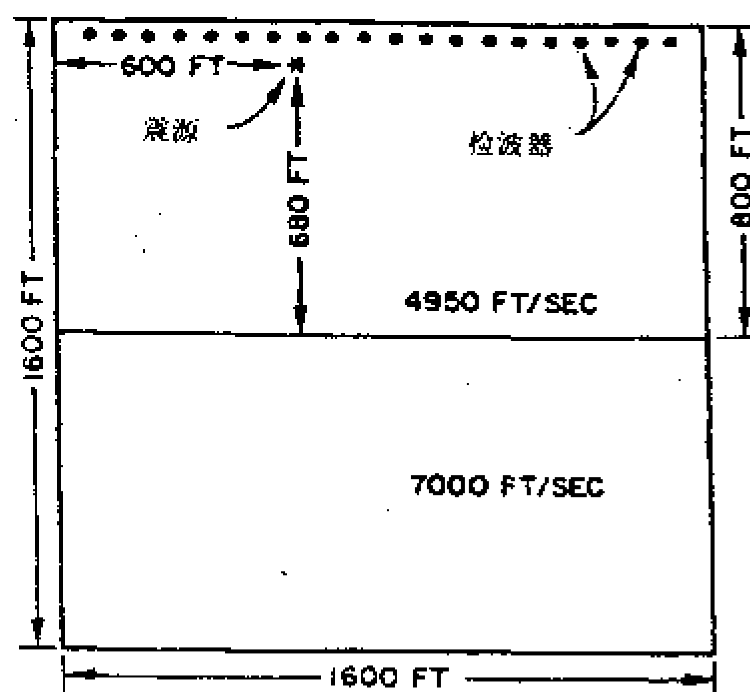


图 2.2.2a　几何模型　显示了炮点,检波点及界面的位置及介质的速度(Reynolds)

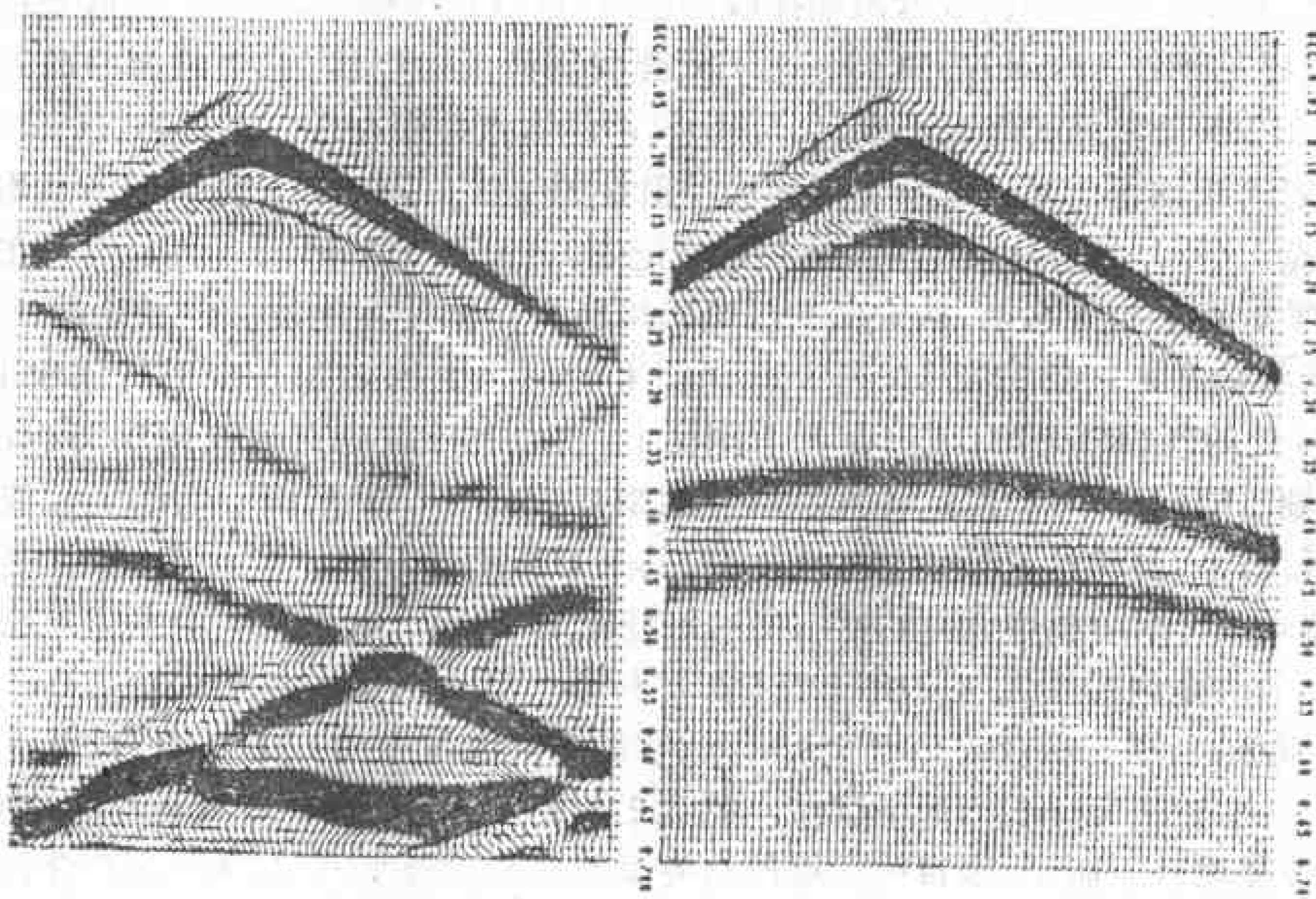


图 2.2.2b Dirichlet 边界条件下的人工合成记录，侧面反射干扰严重(Reynolds)

图 2.2.2c 透明边界条件的人工合成记录，界面反射不受侧面反射干扰(Reynolds)

5. 初始状态

为了得出定解，我们还必须给出初始条件(即初始状态)，我们假设在震源发生振动之前，各质点处于静止状态，即

$$P(x,z,t)=0 \qquad t<0 \tag{2.2.25}$$

速度也为零

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,z,t)=0 \qquad t<0 \tag{2.2.26}$$

6. 解的计算

我们在给出模型时，实际上是在离散的差分格点上给出密度及速度值，形成一个密度分布及速度分布。按给定的初始条件及边界条件，就可用式(2.2.10)递推出在各个格点上任何时刻的 P 值，然后再用一个有限宽频带的子波与之褶积，其结果就是所需要的波场。这是一个数据体，我们可以按照不同的采集要求，抽出所需要的部分数据，形成不同的剖面，例如若取地面上(即 $z=0$)某测线上各点在任何时刻的振动 $P(x,0,t)$ 就形成了共炮点道集。若取某一时刻介质各点的振动 $P(x,z,t_0)$，就是瞬时快照，如把所有的瞬时快照按时间顺序连续地显示出来，就是一部显示波在介质中传播的动画或电影，给人以直观的解释，类似地我们也可以得到 VSP 剖面。下面以两个例子显示这种人工合成记录。

7. 例 1

这是一个典型的含气油地质构造见图 2.2.3，上部是由两个水平地层及一个倾斜地层构成，在这个不整合面之下是一个含油气藏的背斜构造，各个地层的速度及密度见图2.2.3。模型宽度为 6100m，深度为 3660m，空间差分网格 $\Delta x=\Delta y=7.5\text{m}$，时间采样为 0.88ms，实际

显示 4ms,时间长度为 2s,采集方式为中间放炮,两端接收,道间距为 30m,震源位于地面之下 30m 处。图 2.2.4 是中间放炮两端接收的记录,炮点位于模型的中间,接收范围达到模型的两端,可以见到在 1.4s 以后见到一些不太强的侧面反射干扰,这个剖面的最大炮检距达 3000m,图 2.2.5 是常规的炮点记录,(a),(b),(c)的炮点位于左端,(d),(e),(f)位于中间,可以看到反射同相轴很清楚但也有一点侧面反射波的干扰。图 2.2.6 是 VSP 和共炮点的复合记录。此点位于 $x = 3200$m 处,左边是共炮点记录,右边是 VSP 记录。两个记录在炮检距和井源距为零的点上相接起来,最上面的两个相接的同相轴是直达波。位于地面反射时间 0.32s 处的同相轴是第一层的反射,在 VSP 剖面上的一个上行波和一个下行波也非常清楚。位于 0.85s 处的同相轴是第二层,在 VSP 剖面上,它的上行波与直达波在 0.45s 处相接。这二个同相轴之间的一个同相轴,地面反射时间是 0.55s,在 VSP 剖面上它的上行波终止在第一层的下行波上,显然这是第一层的二次波,其余均可明确分辨出来。图 2.2.7 是一单次叠加剖面,共 42 炮,中间放炮,两边排列,最大炮检距为 150m。由于在共炮点记录已消除噪音干扰,所以一次叠加的效果与原始模型也非常相似。第一层反射位于大约 200ms 处其二次波位于近 500ms。第二层反射位于 750ms 处,它的多次波位于约 1000ms 处(前面 VSP 剖面中也可看到)。两边还有一些侧面干扰波。图 2.2.8 是经过预测反褶积处理后十次叠加剖面,图中多次波显然被压制了,来自第一层的边界反射也变得很小,但是第二层产生的边界反射仍然存在。图 2.2.9 是波场快照,即 100ms,200ms,300ms…1600ms 这些时刻介质中各质点振动的情形,为了与介质各部位联系起来,几何模型也同时显示出来。

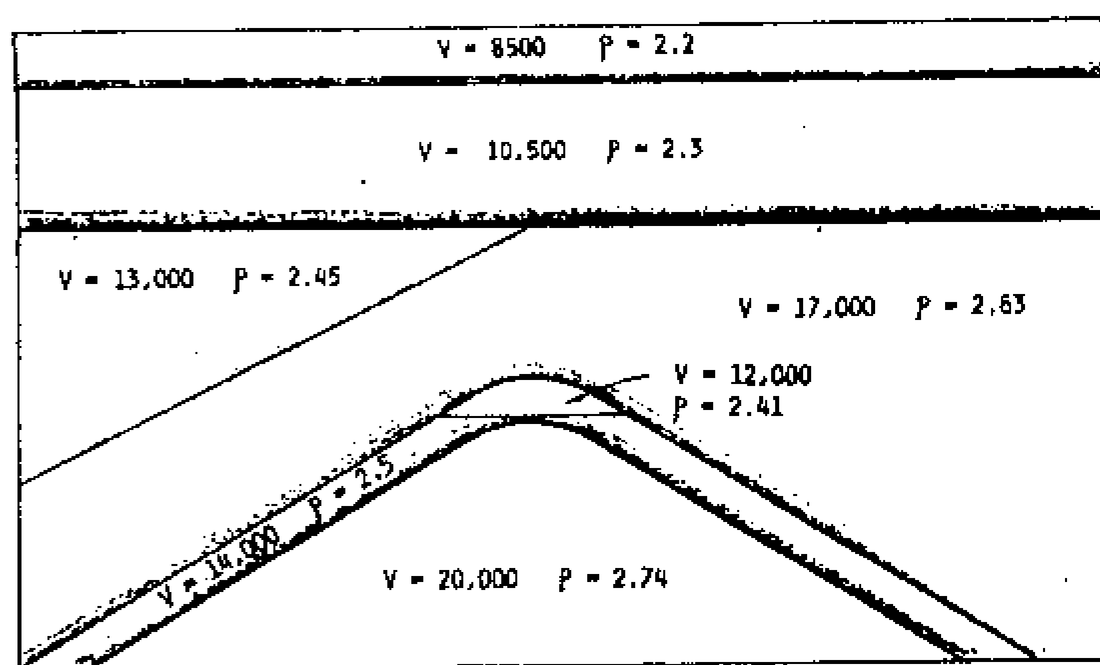


图 2.2.3 地质模型(Kelly 等)

8. 例 2 Marmousi 模型

为了检验各地球物理公司处理软件、特别是速度分析和偏移软件,1988 年法国石油研究院制作了一个叫做 Marmousi 的模型,在 1990 年的 EAEG(欧洲勘探地球物理学家协会)年会进行了讨论,现在已成为世界各地地球物理学家们检验自己处理方法的标准模型了。

这是一个复杂的 2 维声波模型,没有 P-S 转换波及 3 维方面的影响,便于对处理方法的优劣的鉴别。Marmousi 模型的地质背景是安哥拉横穿北 Quenguela 地槽的一个剖面见图 2.2.10,其地质史包含两个不同的沉积相,一个是泥灰岩和碳酸岩的沉积层,中间出现了轻

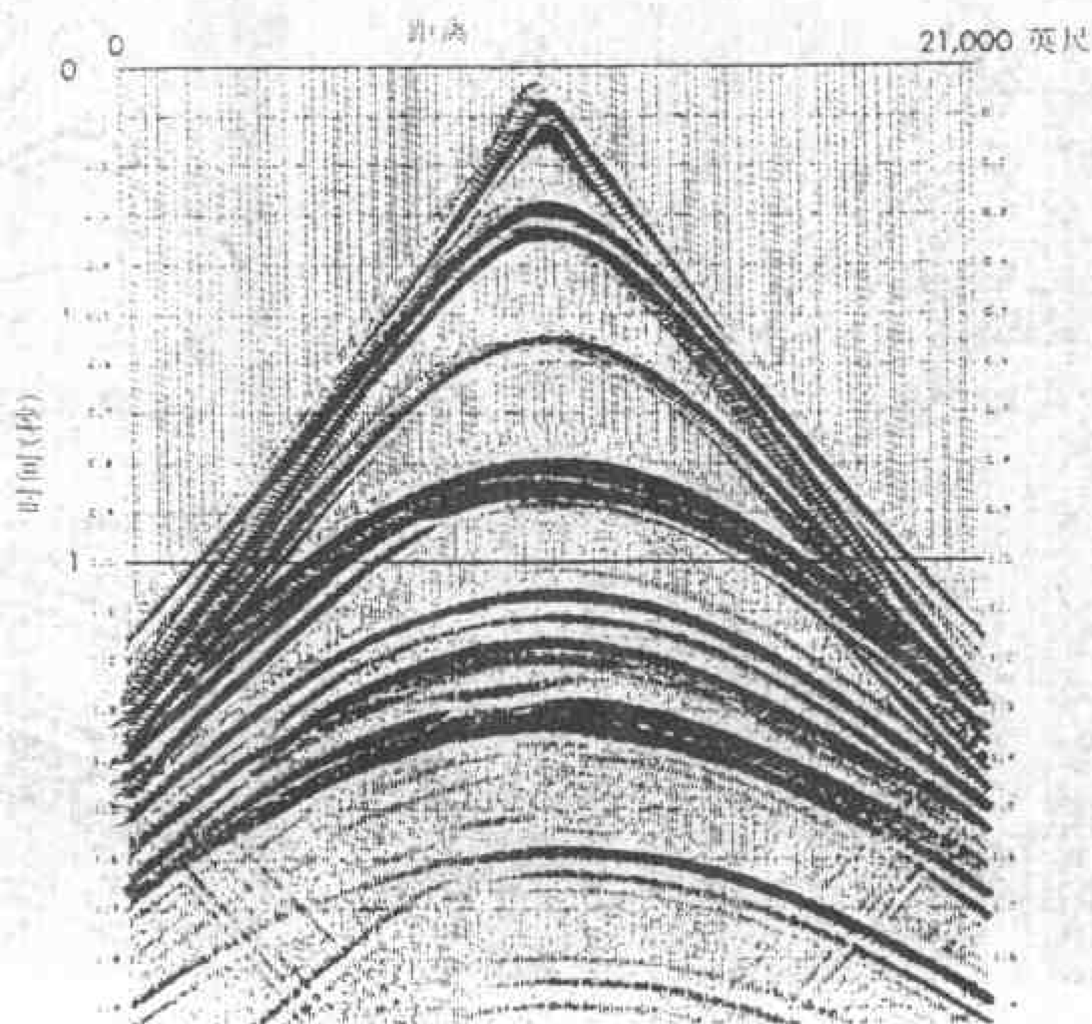
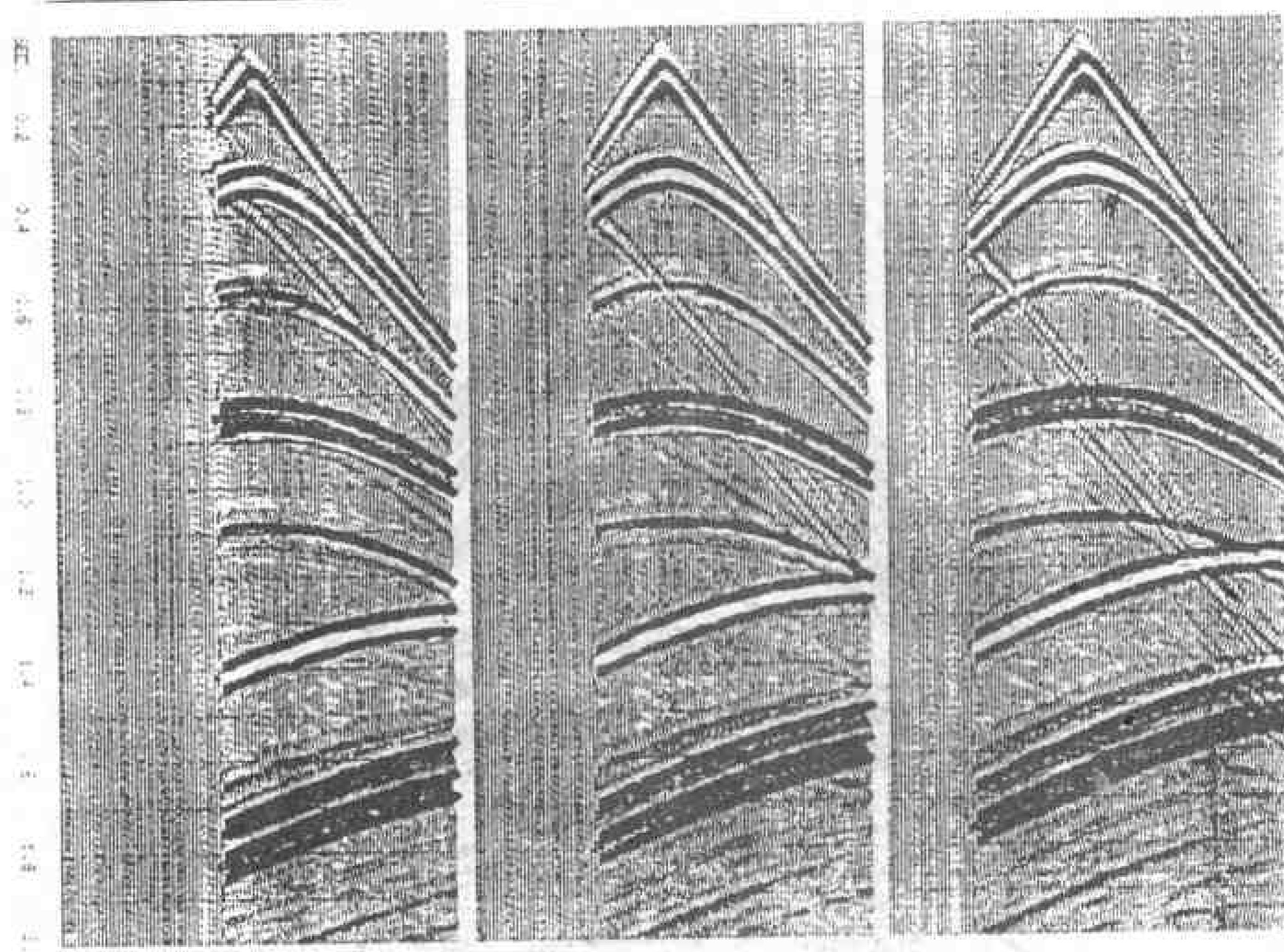


图 2.2.4　模型中间放炮两端接收的地震记录(Kelly 等)

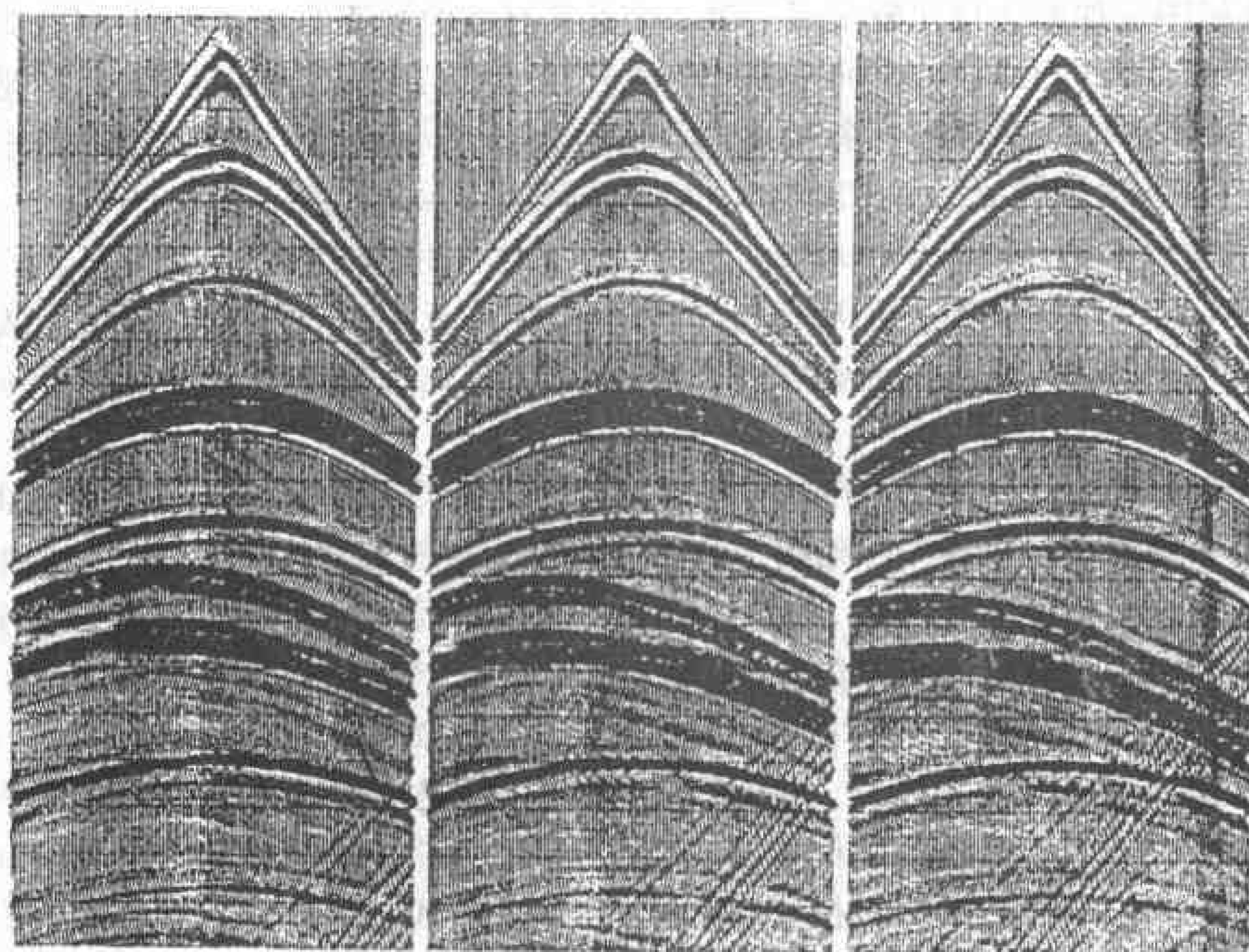
微褶皱,表层因侵蚀而变得比较平坦。第二个是等厚度的盐渍蒸发岩沉积系列,其中的粘土质泥灰岩含有丰富的有机物,上面是泥砂碎屑岩,两边是岩床。石油勘探的目标是确定与圈闭有关的盐体结构及深部的背斜构造。据此剖面,模型小组设计了含有160层的几何模型见图 2.2.11a,其速度及密度以速度梯度和密度梯形形式给出,见图 2.2.11b 及 2.2.11c。模型宽度和深度分别为 9200m 和 3000m。从反射地震学角度来讲,这个模型包含了经常要遇到的各种从简单到复杂的各种地质结构,如各种各样的反射层、陡倾角、横向及纵向的强烈速度变化等。要想对此模型取得较好的成像,必须用最先进的速度分析及叠荷深度偏移或反演方法。

该模型的数据是以 2 维 2 阶声波方程及吸收边界条件为基础,用差分法计算的,模仿海洋中的连续共炮点记录采集。考虑到子波的频率及地层速度之间的关系,格点取为 4m,数据生成之后用一个梯形频谱为(0,10,35,55Hz)的滤波器滤波,以消除数值计算中的波散。地震测线从西向东,第一个炮点位于 3000m 处,最后一个炮点位于 8975m 处,炮点距离为 25m。震源由 6 个水枪组成,水枪之间相距 8m,组合范围为 40m,炮点定为中间。震源深度为 8m。所有水枪都用同一个子波,并且同时激发。子波是用实际记录的近源场信号经梯形滤波器(0,10,40,60Hz)滤波后的信号,这非常接近实际记录的带宽信号。接收电缆水下 12m 处,由 96 个检波器组成,每个检波点由 5 个水听器组成,水听器间距为 4m。每一个记录由这 5 个水听器记录的叠加而构成。道间距为 25m,最近炮检距为 200m,最大炮检距为 2575m。

经过许多公司的处理,得到了一些非常有意义的结论和经验(Versteeg,1994)。① 对于 Marmousi 这样复杂的模型,用常规速度分析得到的速度模型作为深度偏移的初始模型仍然



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

图 2.2.5 共炮点记录

(a),(b),(c)炮点位于左端,(d),(e),(f)炮点位于中间(Kelly 等)

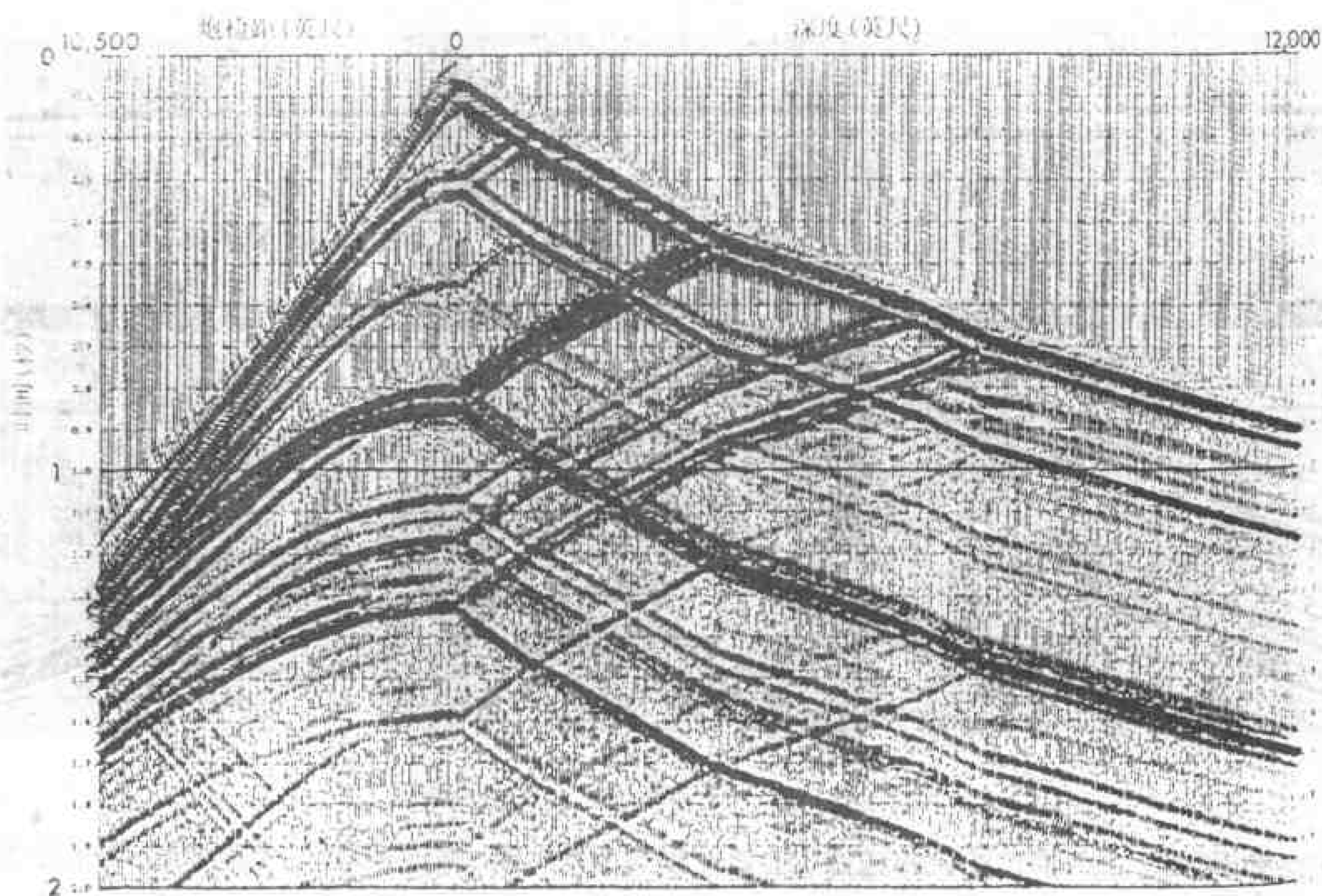


图 2.2.6　VSP 及共炮点记录(Kelly 等)

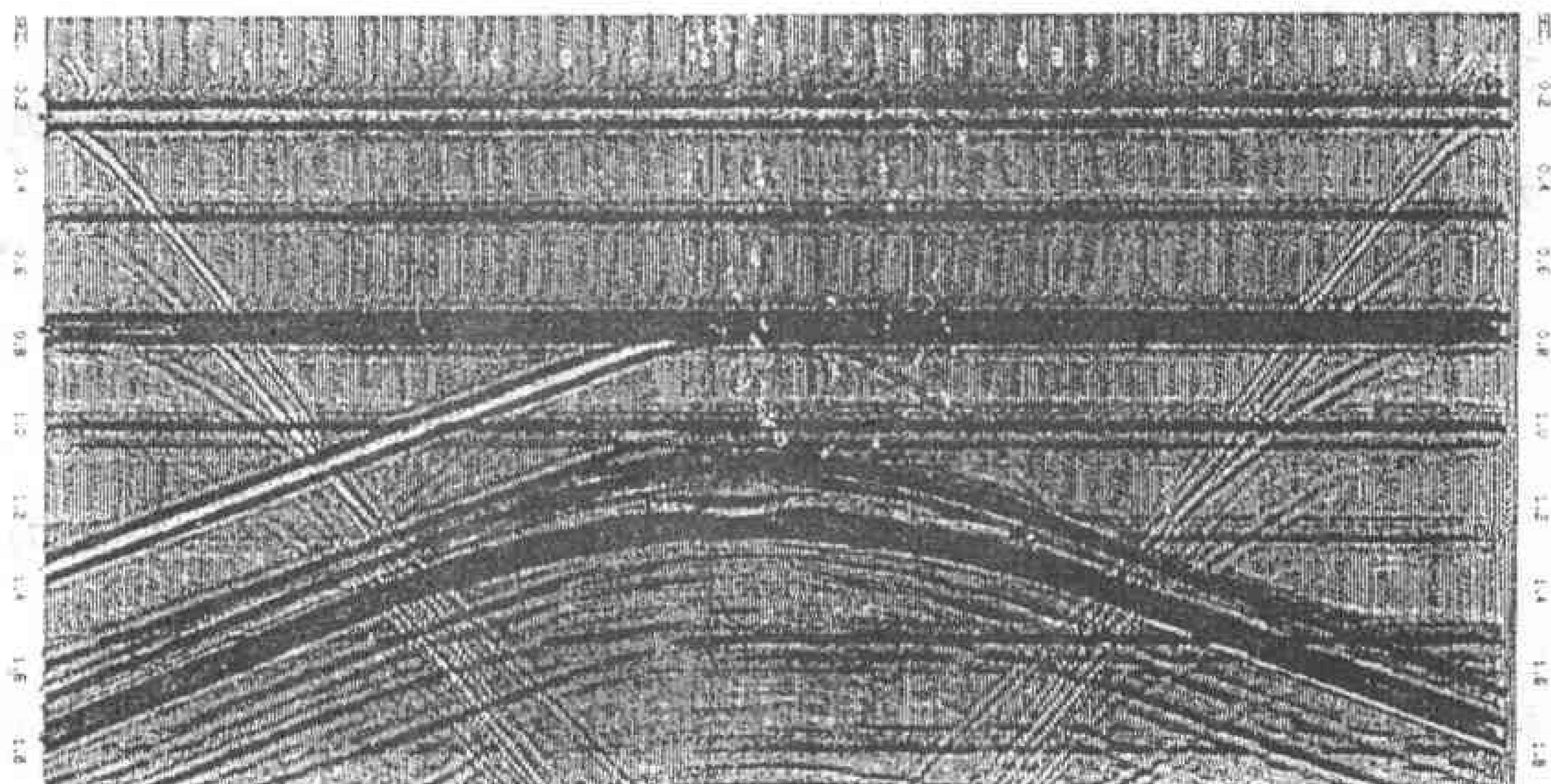


图 2.2.7　单次叠加剖面,共 42 炮,中间放炮双边排列,最大炮检距为 150m

是很有效的。看来复杂构造仍然能容忍我们所作的各种简单的假设。从图 2.2.12 就是用常规方法得到的叠加剖面,从中可以看到 Marmousi 模型中的主要反射层,可作为进一步处

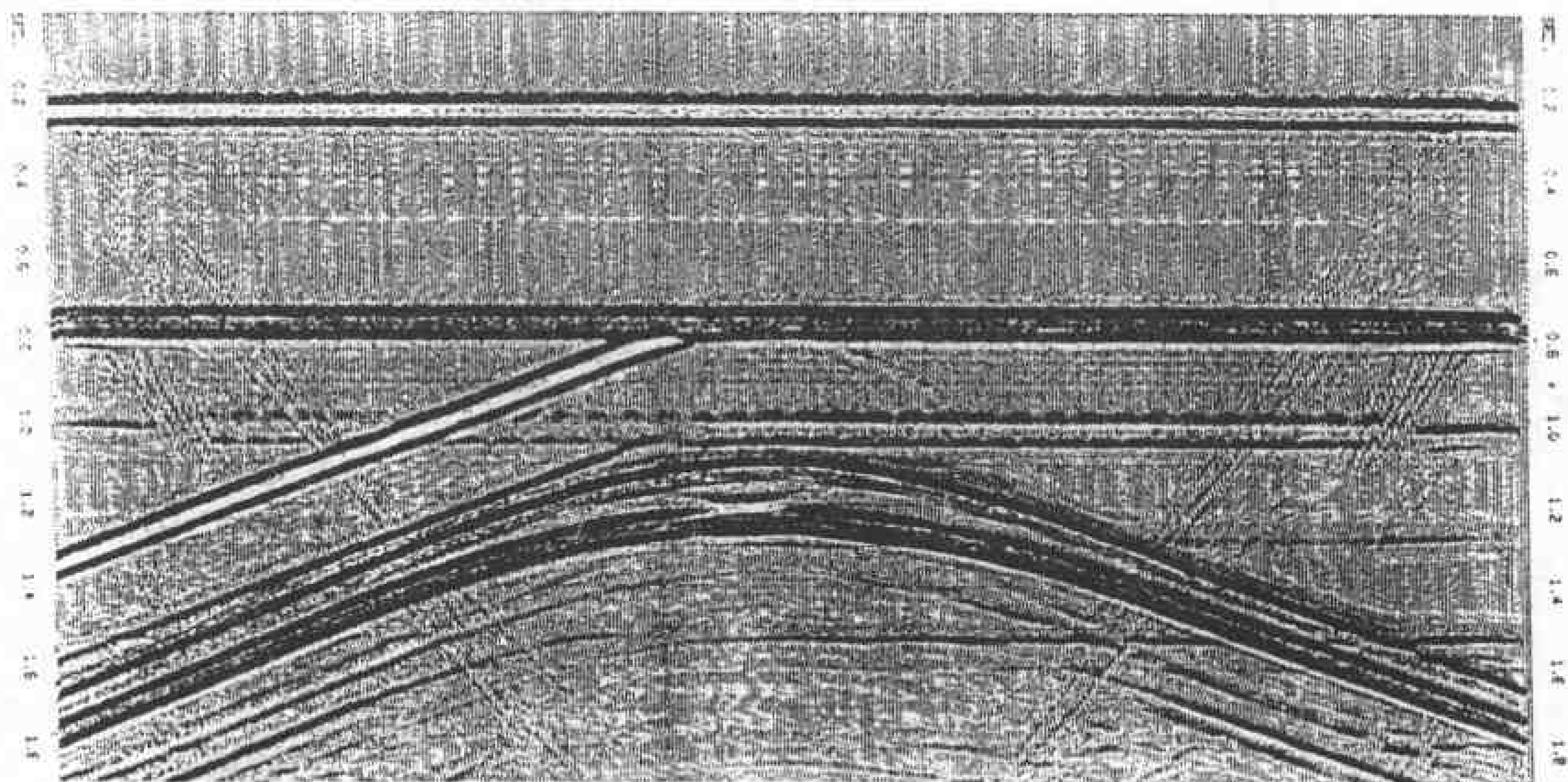


图 2.2.8 经过反褶积后的十次叠加剖面

理的参数剖面。② 对于复杂的构造，建立速度模型时，纵、横向速度的变化要给予充分大的空间。③ 建立速度模型时要充分利用各种地质信息，引入各种地质假设并进行试验。④ 在建立速度模型过程中要尽量对剖面中的各种现象给予正确的解释和分析。⑤ 通过解释和偏移可以不断修改模型，以使模型趋于最佳。

2.2.2 弹性波数值正演模拟

对于弹性波的模型，可以用弹性波方程也可用弹性动力学方程组，这里介绍用弹性动力学方程组的方法。

二维均匀各向同性弹性动力学方程组共有五个方程

$$
\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
&\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \\
&\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
&\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{2.2.27}
$$

其中 u_x, u_z 分别为在 x, z 方向的位数，τ_{xx}, τ_{zz} 及 τ_{xz} 是应力张量，$\rho(x, z)$ 是密度、$\lambda(x, z)$、$\mu(x, z)$ 是拉梅系数。下面把式(2.2.27)变换为一个一阶的方程组

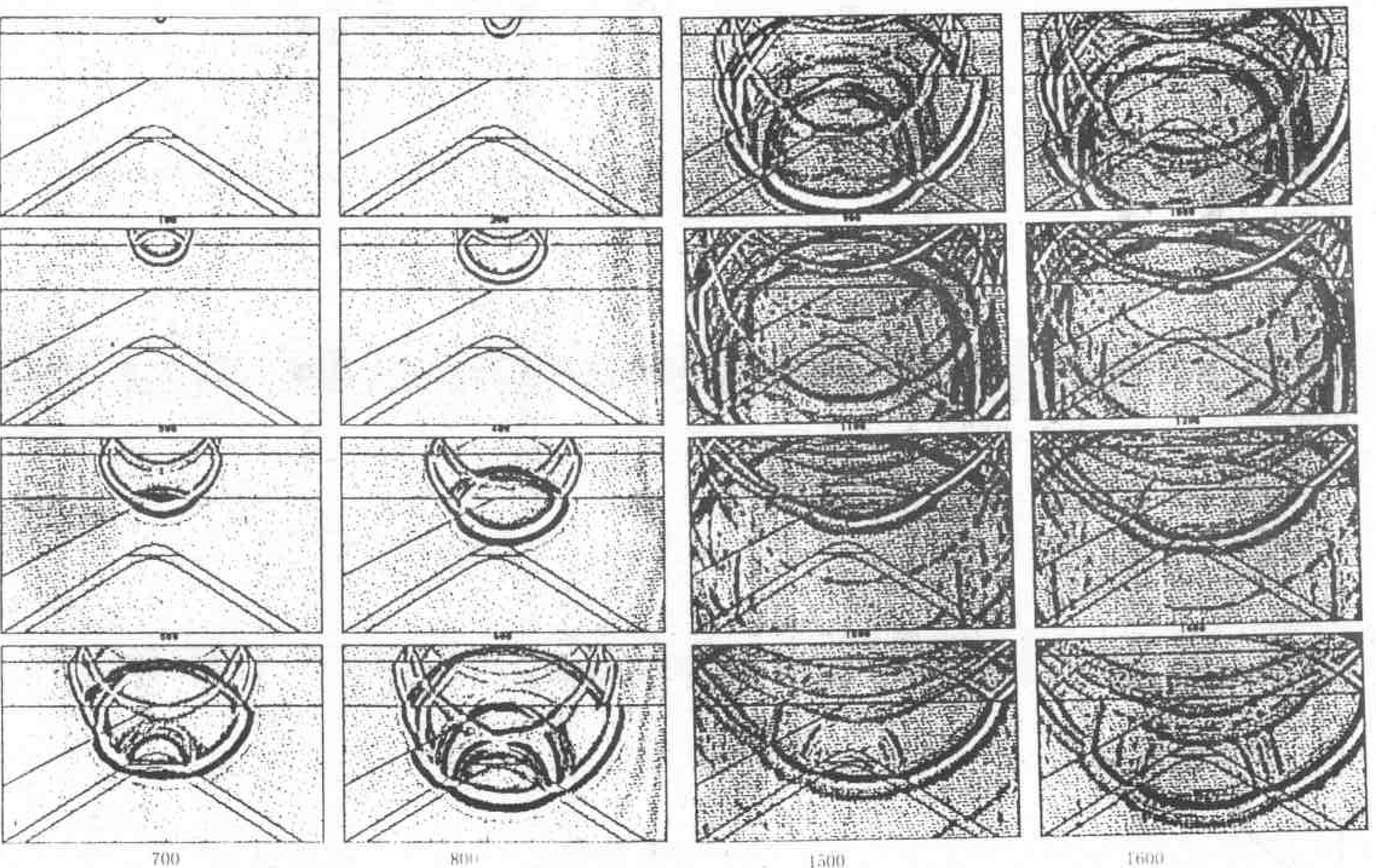


图 2.2.9　波场振动快照，显示了波的传播过程

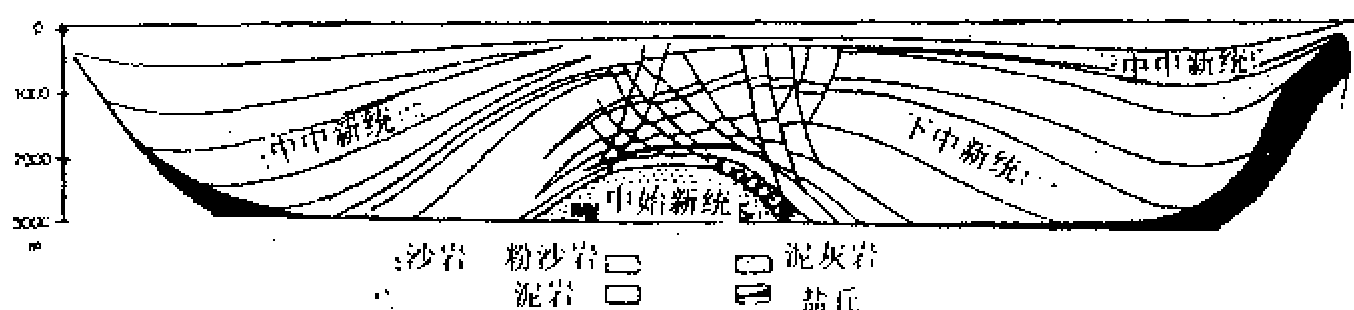


图 2.2.10 Marmousi 模型的地质背景——安哥拉北 Quenguela 地槽构造

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= b\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} &= b\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{2.2.28}
$$

其中 $v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}$，$v_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}$ 表示质点在 x 和 z 方向的速度，$b(x,z)$ 是密度的倒数，或者叫疏度。

初始条件：在 $t=0$ 时，介质是处于平衡的静止状态，即 $v_x(x,z,0) = v_z(x,z,0) = 0$ 及 $\tau_{xx}(x,z,0) = \tau_{zz}(x,z,0) = \tau_{xz}(x,z,0) = 0$

边界条件：仍用前面的透明边界条件。

震源：在同一个点上在 τ_{xx} 及 τ_{zz} 上加上一个有限带宽脉冲获得一个点震源，震源函数可取

$$
f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(e - t_0)^2} \tag{2.2.29}
$$

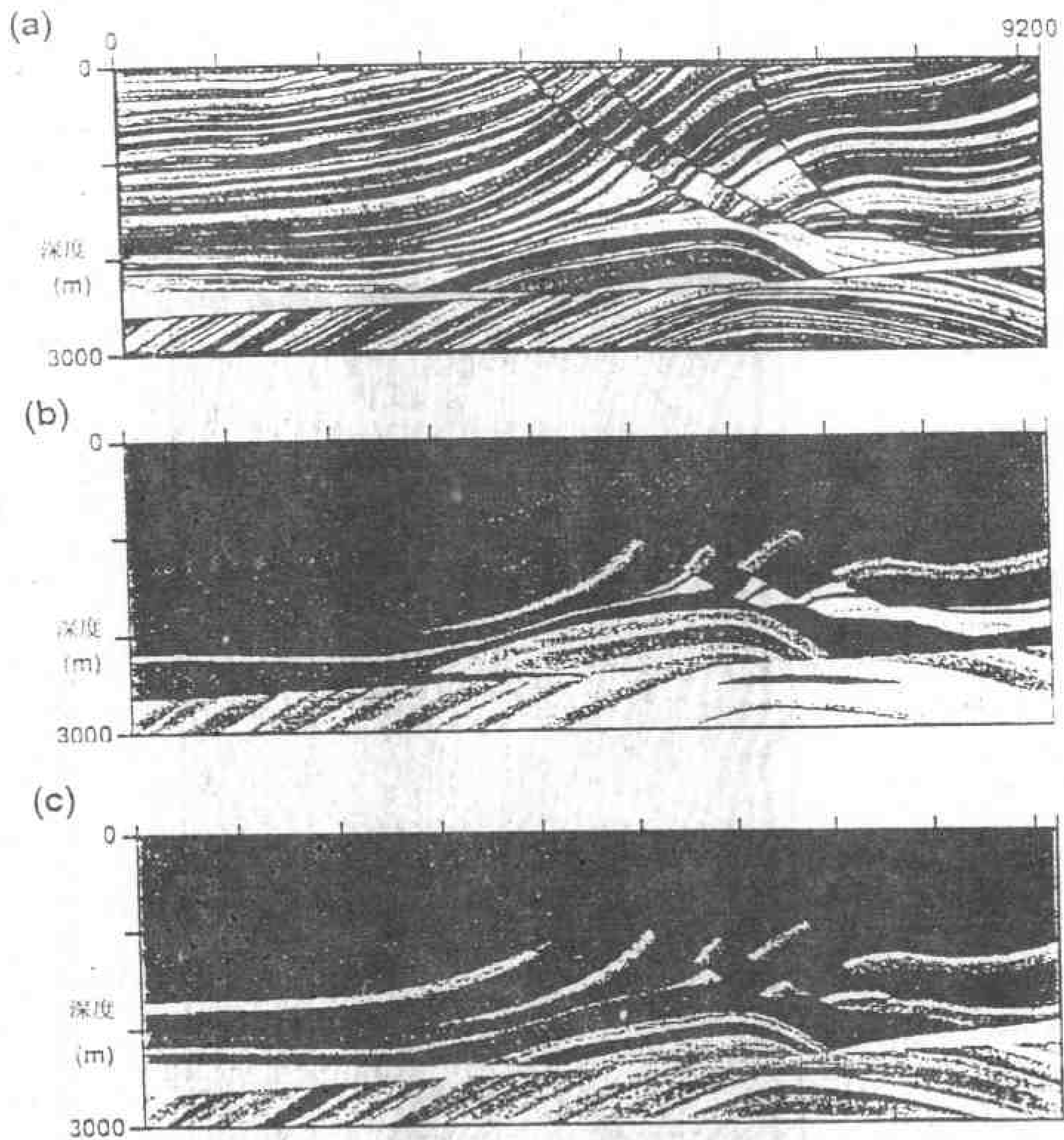
或其导数

$$
g(t) = -2\alpha(t - t_0)\mathrm{e}^{-\alpha(t - t_0)^2} \tag{2.2.30}
$$

差分格式：用交错网格法（见图 2.2.14），这 v_x，v_z 不在源点上计算，避免了振幅出现无限大的问题，但在同一个结点上，不能同时得到这两个分量，这是与普通差分之间的差别。导数均用中心差分来求，这样(2.2.28)式离散为

$$
\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,k}^{k-\frac{1}{2}} + B_{i,j}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(R_{i+\frac{1}{2},j}^{k} - R_{i-\frac{1}{2},j}^{k}\right) \\
&\quad + B_{i,j}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(H_{i,j+\frac{1}{2}}^{k} - H_{i,j-\frac{1}{2}}^{k}\right) \\
V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(H_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k} - H_{i,j+\frac{1}{2}}^{k}\right) \\
&\quad + B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(T_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k} - T_{i+\frac{1}{2},j}^{k}\right) \\
R_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} &= R_{i+\frac{1}{2},j}^{k} + (L + 2M)_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$+ L_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(V^{k+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V^{k+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right)$$



密度 (kg/m^3)	速度 (m/s)	密度 (kg/m^3)	速度 (m/s)
ABOVE 2670	ABOVE 5300	2270 - 2300	3300 - 3500
2540 - 2670	5100 - 5300	2240 - 2270	3100 - 3300
2510 - 2540	4900 - 5100	2210 - 2240	2900 - 3100
2480 - 2510	4700 - 4900	2180 - 2210	2700 - 2900
2450 - 2480	4500 - 4700	2150 - 2180	2500 - 2700
2420 - 2450	4300 - 4500	2120 - 2150	2300 - 2500
2390 - 2420	4100 - 4300	2090 - 2120	2100 - 2300
2380 - 2390	3900 - 4100	2080 - 2090	1900 - 2100
2330 - 2380	3700 - 3900	2030 - 2080	1700 - 1900
2300 - 2330	3500 - 3700	2000 - 2030	1500 - 1700
2270 - 2300	3300 - 3500	低于 2000	低于 1500

图 2.2.11 Marmousi 模型

(a) 几何模型含 160 个层位 (b) 密度模型 (c) 速度模型,图下部的数值标示各个灰度的量级

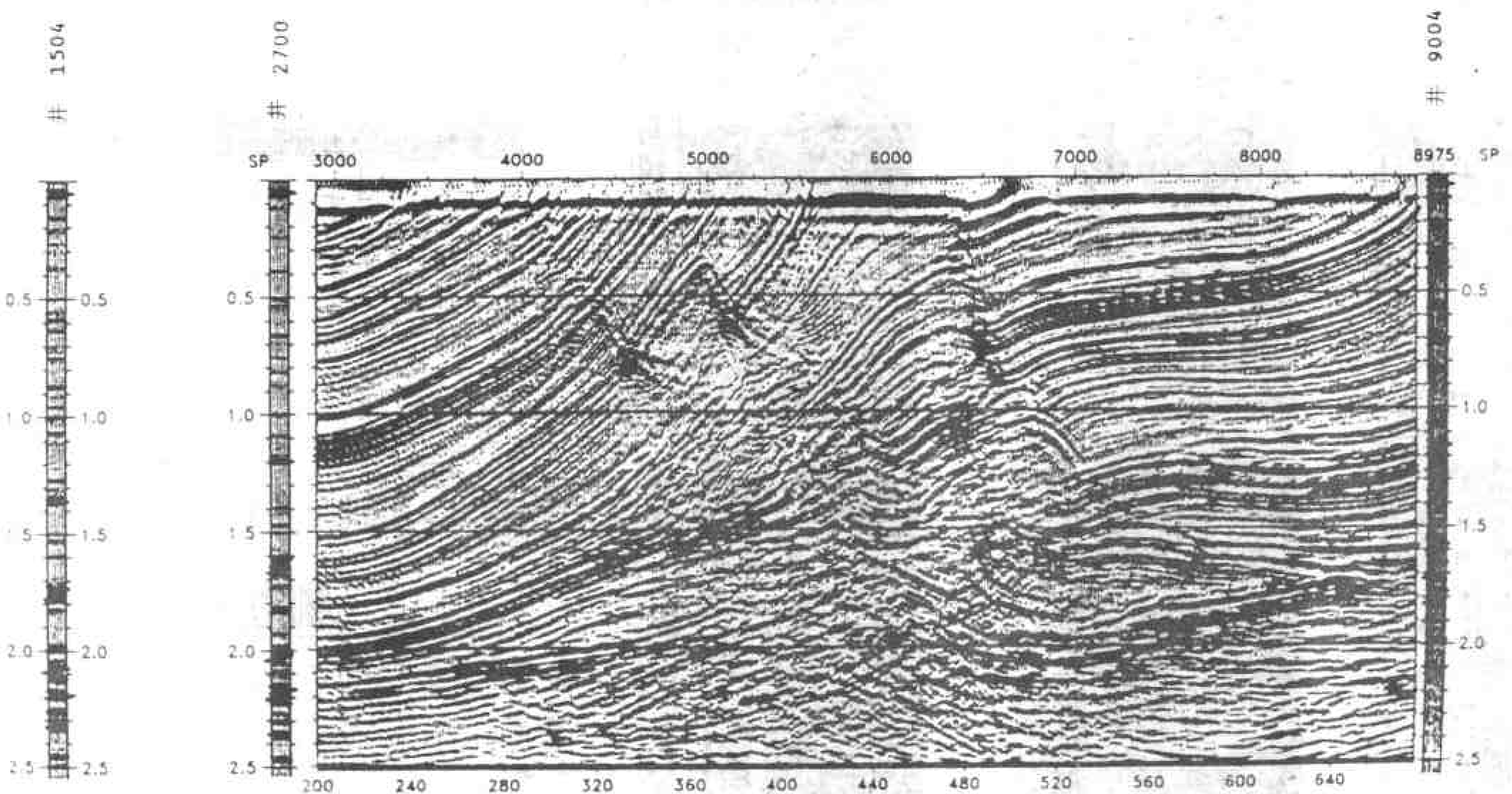


图 2.2.12　这是 Prakla 公司常规技术处理的时间偏移剖面

$$T^{k+1}_{i+\frac{1}{2},j} = T^{k}_{i+\frac{1}{2},j} + (L+2M)_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\Delta t}{\Delta x}(V^{k+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V^{k+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})$$
$$+ L_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\Delta t}{\Delta z}(U^{k+\frac{1}{2}}_{i+1,j} - U^{k+\frac{1}{2}}_{i,j})$$
$$H^{k+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = H^{k}_{i,j+\frac{1}{2}} + M_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{\Delta x}(U^{k+\frac{1}{2}}_{i,j+1} - U^{k+\frac{1}{2}}_{i,j})$$
$$+ M_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{\Delta z}(V^{k+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V^{k+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) \tag{2.2.31}$$

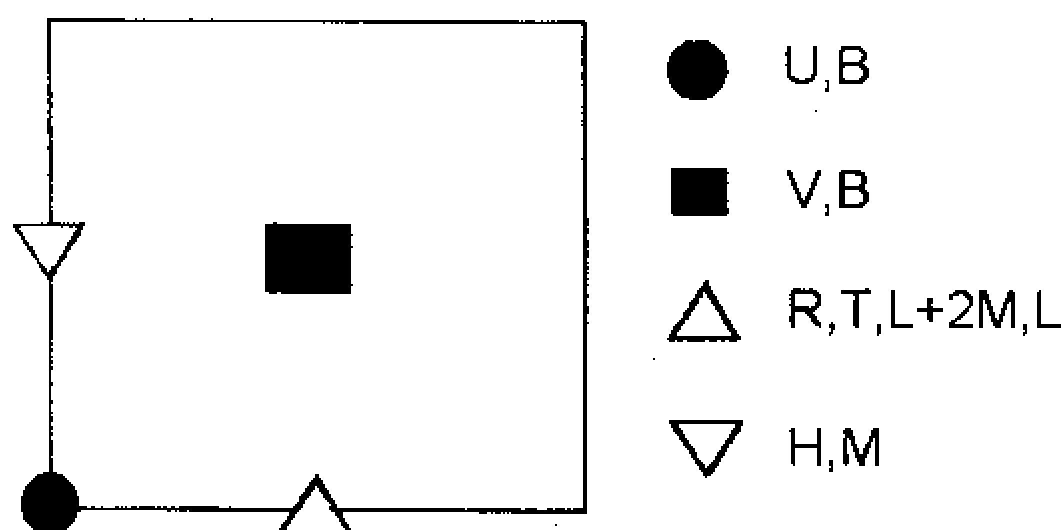


图 2.2.13 交错网格的计算方法:实心符号处在$\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时刻,有速度和疏度值。空心符号处在 $k\Delta t$ 时刻,有应力拉姆常数值

其中 U,V 分别为v_x,v_z 的离散量,R,T,H 分别为τ_{xx},τ_{xz}和τ_{zz}的离散量,上标 k 为时间t 的离散量,下标 i,j 分别为 x 和 z 的离散量。$\Delta t,\Delta x,\Delta z$ 分别为 t,x 及 z 的步长。速度 U,V 在$\left(R+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时刻求取(用的是 $k\Delta t$ 时刻的 R,T,H),而应力张量 R,T,H 则在$(k+1)\Delta t$ 时刻求取(用的量$\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时刻的 U,V)。疏度 B 在 U,V 所在的格点上均要给出,拉姆常数 M 须在R,H 所在的格点上给出,而 L 只须在R,T 所在的格点上给出。

稳定性:对于均匀介质用谱分析的方法可以这种显式的稳定性条件

$$V_p\Delta t\sqrt{\frac{1}{\Delta X^2}+\frac{1}{\Delta Z^2}}<1 \tag{2.2.32}$$

V_p 是 P 波速度,与横波速度 V_s 无关。如果 $\Delta X=\Delta Z$,则稳定性条件变为

$$V_p\frac{\Delta t}{\Delta x}<\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.2.33}$$

或

$$\sqrt{2}V_p\frac{\Delta t}{\Delta x}<1 \tag{2.2.34}$$

常规差分方程的稳定性为

$$\sqrt{V_p^2+V_s^2}\frac{\Delta t}{\Delta x}<1 \tag{2.2.35}$$

由于 $V_s<V_p$ 所以

$$\sqrt{V_p^2+V_s^2}\frac{\Delta t}{\Delta x}<\sqrt{2}V_p\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

因此交错差分格式要求的稳定性条件比常规差分的更严格。

例 1,风化层模型:其几何形态见图 2.2.14。上覆层的速度取 2000m/s,下半平面取 6000m/s,泊松比按 0.25 取,密度取 2500kg/m^3,然后按

$$V_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{2.2.36}$$

及

$$V_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.2.37}$$

计算出相应的 λ 及 μ。震源取(2.2.30)式,其中 $\alpha=40$。计算结果见图 2.2.15(a)及(b),波的符号说明见(c)。这是模拟 Rayleigh 波源的,P 波是直达波。PP 及 PS 波是反射波,很明显它们在临界角后就发生了相位移。由于震源在地面之下 400m 处,产生了下行的虚反射纵波 GP 及横波 GS。它们在下界面上又产生了 GPP、GPS、GSP 及 GSS 反射。

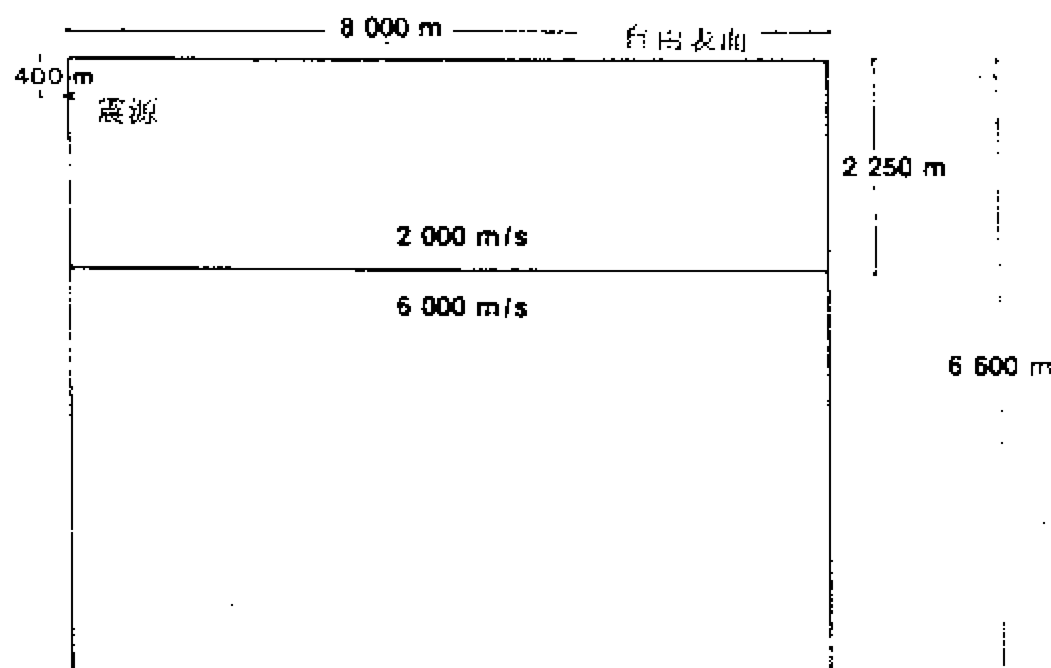


图 2.2.14　风化层的几何模型

例 2. 尖角绕射模型:其几何形态见图 2.2.16 上部介质速度为 6000m/s,下部介质的速度为 9000m/s 密度为 2500kg/m^3。震源仍用(2.2.30)式型的,频率 $\alpha=40$。这里有两种模型第一种是两种介质均具有相同的密度,λ 和 μ 不同,见图 2.2.17(a)第二种模型是 λ 及 μ 两种介质都相同,但密度不同,其剖面见图 2.2.17(b)。为了对比的方便,其中的实线表示用射线追踪计算出的旅行时。P 波是直达波,PPrefl 是 P 波的反射波,它与绕射线 PPdiff 连在一起。PSrefl 是 P 波的转换波,在水平分量剖面上可以明显看出,在远道上与虚反射 GPPrefl 及虚绕射 GPPdiff 相交。另一个明显的能量是 GPS 及 GSP,即 GP 的反射横波及 GS 的反射纵波。

图 2.2.18 是波的传播的快照,即在一些时刻时介质各点振动的情况,这里显示了 $t=0.995$,1.495,1.995,2.495,2.995s 时的振动快照,左边是水平分量,右边是垂直分量。其中 P 表示 P 波波荷,PPrefl 是 P 波的反射波波荷,PPrefr 是 P 波的透射波波荷,PSrefr 是 P 波的透射转换波波荷,PPdiff 是 P 波产生的 P 波绕射波前,GPrefl 是 P 波产生的虚反射,GSrefl 是 S 波产生的虚反射,PSdiff 是 P 波产生的 S 波绕射,PShead 是 P 波在界面产生的 S 首波,PPhead

(a) 水平分量记录

(b) 垂直分量记录

(c) 同相轴说明

图 2.2.15　风化层模型的人工合成地震记录(Virieux)

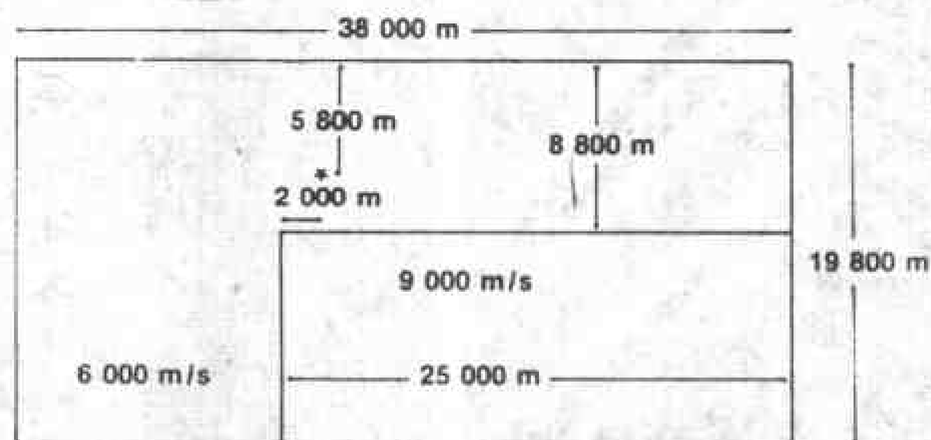
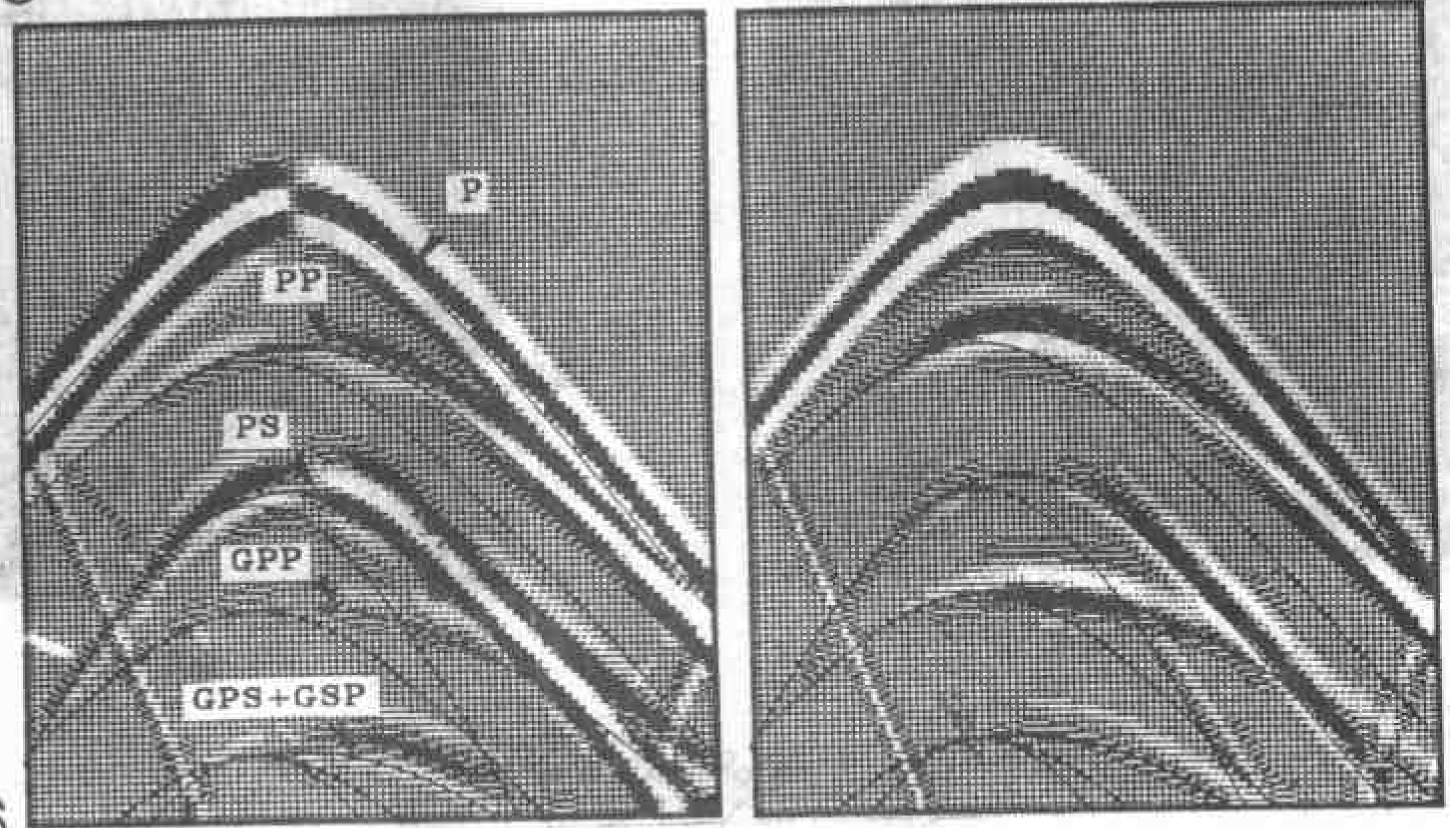


图 2.2.16　尖角绕射几何模型

是 P 波在界面产生的 P 首波。

2.2.3　弹性波在横向各向异性介质中的传播的数值模拟

随着地震勘探的深入发展，反射波的振幅愈来愈受到重视，因为其中含有岩性及流体成分的信息，例如 AVO 引起了广泛的注意，但目前的 AVO 还基本上是从均匀各向同性介质的



(a) λ,μ 变化　　ρ 不变

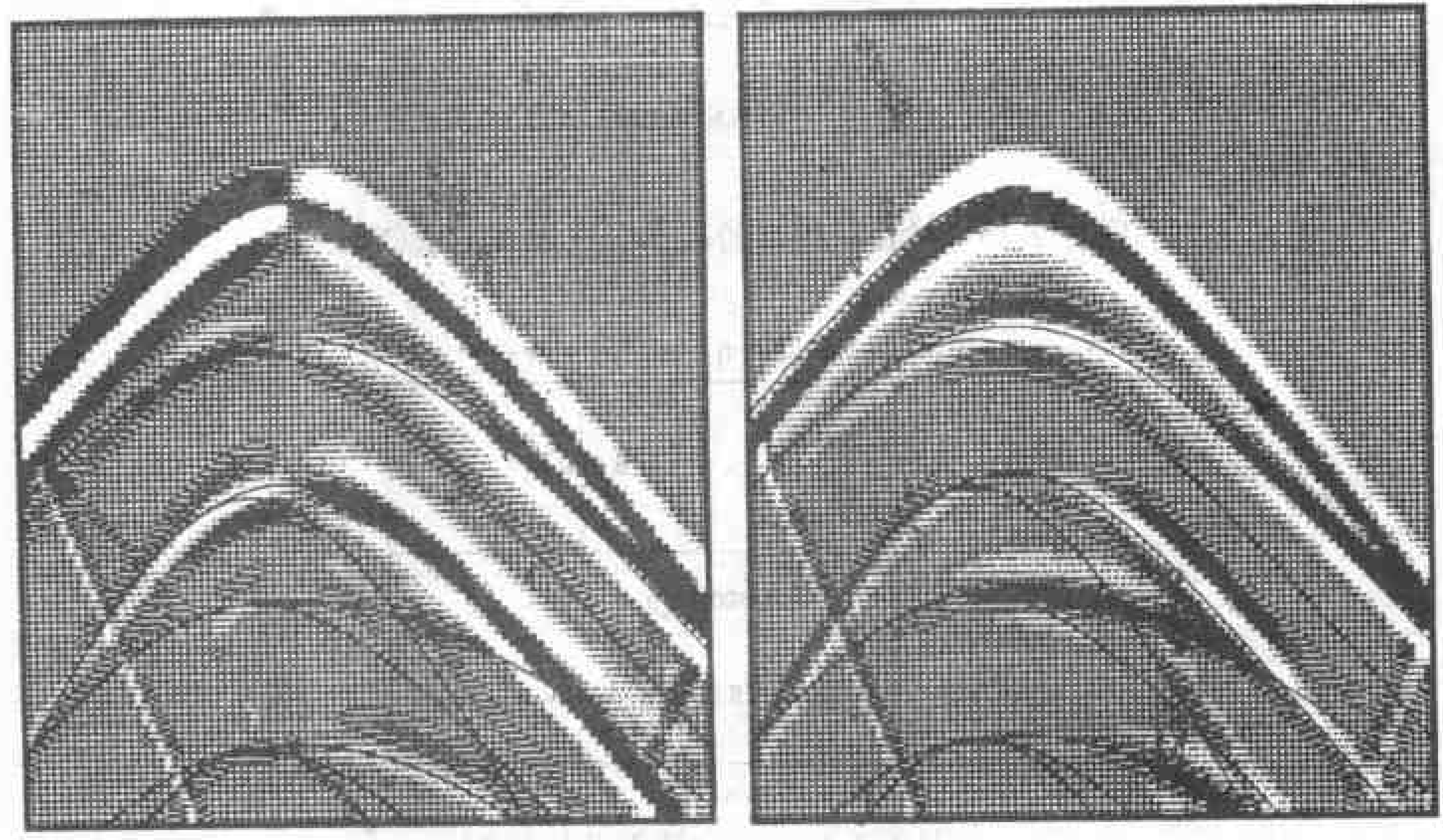

(b) ρ 变化　　λ,μ 不变

图 2.2.17　尖角绕射模型的人工合成地震记录

(a) 介质的 λ,μ 不同，ρ 相同的合成记录，左为水平分量，右为垂直分量

(b) 介质的 ρ 不同，λ,μ 相同的地震合成记录(Virieux)

界面出发，只考虑炮检距的影响还没有考虑各向异性介质对振幅的影响，实际上由于各向异

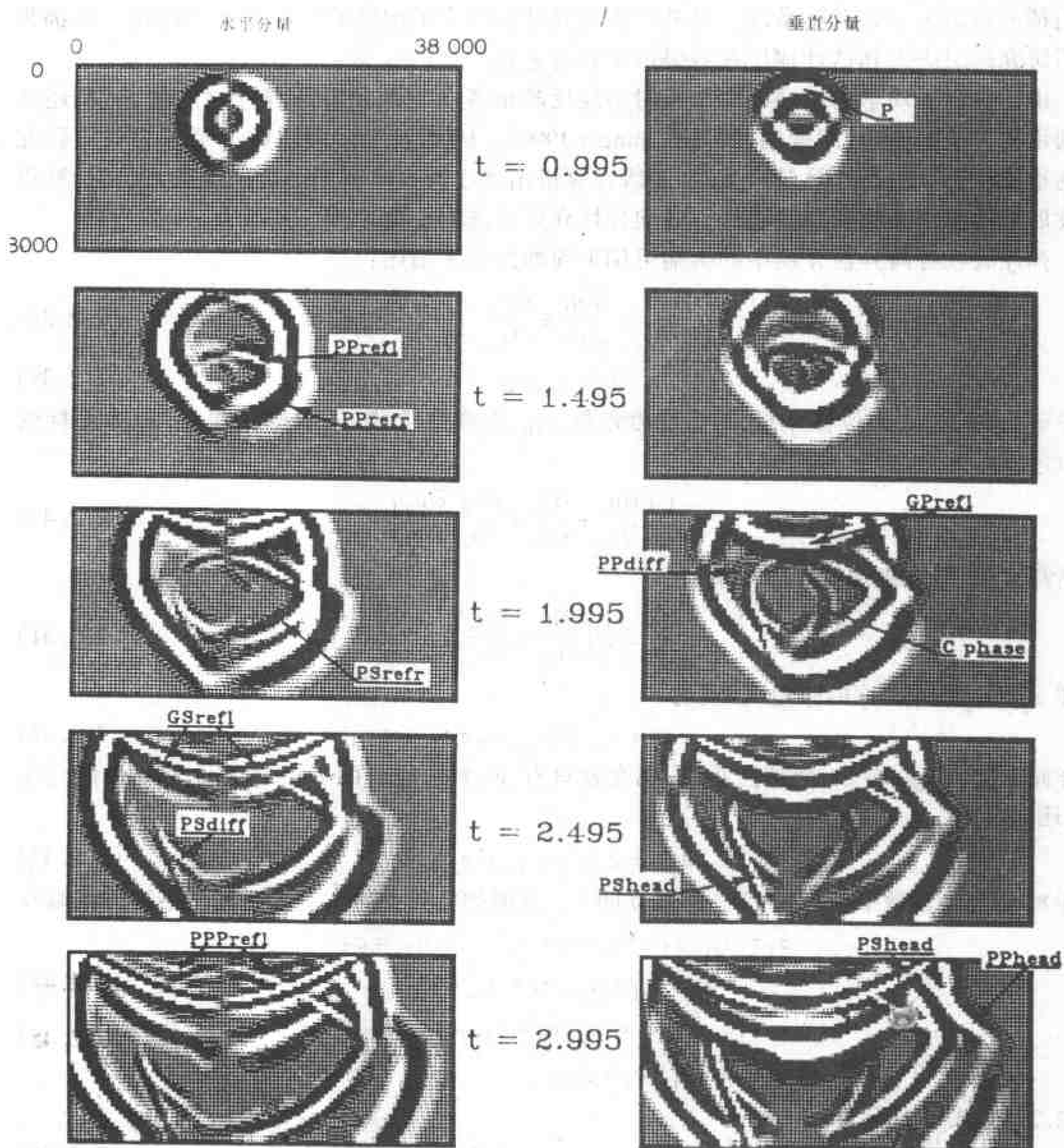


图 2.2.18 尖角绕射模型的波前快照。用箭头指出各种波的名称(Virieux)

性意味着速度还随着传播方向的变化而变化,因而影响了振幅。各向异性总是与复杂的不均匀介质有关,例如与油气藏关系较密切的裂缝及薄互层就产生各向异性。由于各种条件的限制,目前的地震处理及解释均不考虑各向异性的性质。随着地震观测精度的提高及多分量的检波器的使用,为各向异性的研究提供了可行的条件。因此研究波在各向异性介质中的传播就成为当前研究中的一个热点。

波在各向异性介质中的传播是很复杂的,但通过研究认识到波在有某种规则排列的裂

缝的岩石中的传播可以用波在均匀各向异性介质中的传播来模拟，这就是广泛扩容各向异性(EDA)模型；波在薄互层中的传播可用波在横向各向同性介质中的传播来模拟。实际上它们都可归结为六方对称系统。另外在各向异性介质中最敏感的特征是存在偏振。这都为我们研究地层应力和估计地层参数提供了新的途径。

由于仅用运动学的性质即靠旅行时不能反映出各向同性和各向异性之间的差别，还必须利用动力学的性质，即振幅的特征(Tsingas 1990)。因此人工合成地震记录成为我们研究中的重要课题。由于计算量很大，在超级计算机出现之前及应利用渐近射线法，现在计算机的发展推动了用高精度差分法计算各向异性介质中波的传播。

弹性波在各向异性介质中的传播可用下面的方程来描述：

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.2.38}$$

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}e_{kl} \tag{2.2.39}$$

其中 ρ 为密度，u_i 为位移分量，σ_{ij}为应力张量，c_{ijkl}为弹性常数，e_{kl}为应变张量，x_i 为坐标变量，$i,j,k,l=1,2,3$。e_{ij}表示为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{2.2.40}$$

忽略高次项，只考虑线性关系则有

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_z}{\partial x_i}\right) \tag{2.2.41}$$

这样 σ_{ij}和 e_{ij}都是对称的张量，因而有

$$c_{ijkl}=c_{jikl}\text{和}\ c_{ijkl}=c_{ijlk} \tag{2.2.42}$$

这样原来的 c_{ijkl}共有 81 个弹性常数，现在就只有 36 个是独立的了。对于均匀的弹性介质 c_{ijkl}还满足

$$c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{klij}=c_{ijlk} \tag{2.2.43}$$

这样 81 个弹性常数中就只有 21 个是独立的了。这时如把独立的 σ_{ij}，e_{ij}，重新按下列方式编号

$$\begin{gathered}\sigma_1=\sigma_{11},\sigma_2=\sigma_{22},\sigma_3=\sigma_{33},\sigma_4=\sigma_{23}=\sigma_{32}\\ \sigma_5=\sigma_{31}=\sigma_{13},\sigma_6=\sigma_{12}=\sigma_{21}\end{gathered} \tag{2.2.44}$$

$$\begin{gathered}e_1=e_{11},e_2=e_{22},e_3=e_{33},e_4=2e_{23}\\ e_5=2e_{13},e_6=2e_{12}\end{gathered} \tag{2.2.45}$$

则(2.2.39)式可表示为

$$\sigma_i=c_{ij}e_j \qquad i,j=1,2,\cdots 6. \tag{2.2.46}$$

其中

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\ c_{12}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\ c_{13}&c_{23}&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\ c_{14}&c_{24}&c_{34}&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\ c_{15}&c_{25}&c_{35}&c_{45}&c_{55}&c_{56}\\ c_{16}&c_{26}&c_{36}&c_{46}&c_{56}&c_{66}\end{pmatrix} \tag{2.2.47}$$

这当中只有 21 个独立常数。

对于一套由薄层介质组成的一套地层,当地震波长远远大于每一薄层的厚度时,这套地层就可当作具有垂直对称轴的横向各向同性介质(侯安宁,1994),见图 2.2.19)这时弹性常数只有五个是独立的,即 $c_{11},c_{13},c_{33},c_{44},c_{66}$:

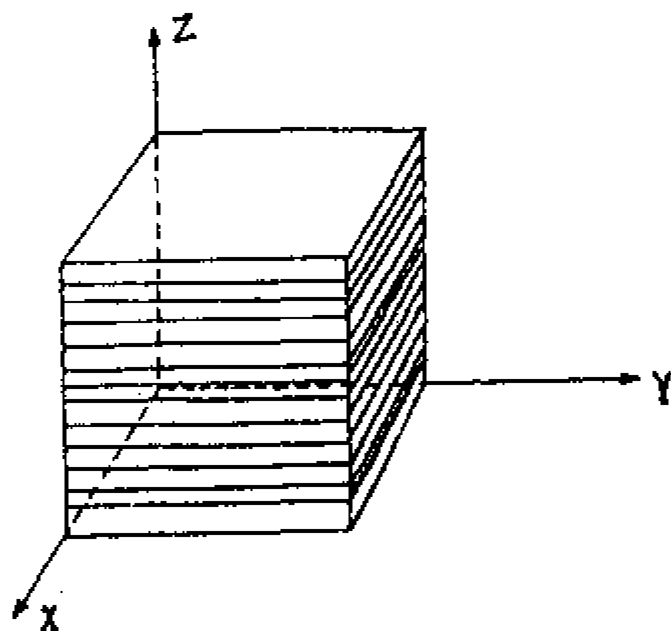


图 2.2.19 薄层介质模型

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & & & \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & & & & c_{44} & \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix} \tag{2.2.48}$$

其中 $c_{12}=c_{11}-2c_{66}$.

由式(2.2.38),(2.2.44),(2.2.45)及式(2.2.46)得到如下的三个运动方程

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+(c_{11}-c_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} \\ \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (c_{11}-c_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+c_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3} \\ \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (c_{13}+c_{14})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}+c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

如果给出各个薄层的密度 ρ 及拉梅常数 λ 及 μ,则

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left(\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right)+\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^2 \\ c_{33} &= \left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)^{-1} \\ c_{13} &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

$$c_{44} = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{-1}$$

$$c_{66} = (\mu)$$

另外

$$\rho = (\rho) \tag{2.2.51}$$

这里(·)表示平均值。

这样由式(2.2.46)及式(2.2.49)共9个方程描述了地震波在横向各向同性介质中的传播。

2) 2维横向各向同性介质中弹性波的传播及其数值计算

在2维横向各向同性的条件下,这时应力-应变方程又可简化为如下的形式(Tsingas, 1990)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\parallel} + 2\mu_{\parallel} & \lambda_{\perp} & 0 \\ \lambda_{\perp} & \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{zz} \\ e_{xz} \end{bmatrix} \tag{2.2.52}$$

其中用 x 及 z 代替原来的 x_1 及 x_3, $\lambda_{\parallel}, \mu_{\parallel}, \lambda_{\perp}, \mu_{\perp}$ 和 ν 为拉梅常数,⊥及‖表与各向同性平面相垂直及平行的方向,如果各向异性消失则 $\lambda_{\perp}$ 及 $\lambda_{\parallel}$ 均趋于 λ, $\mu_{\perp}$ 及 $\mu_{\parallel}$ 趋于 μ, $\nu = \mu$,另外

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_{zz} = \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\omega + \frac{\partial}{\partial z}u\right) \tag{2.2.53}$$

这里的 u 就是上面的 u_1,而 ω 就是上面的 u_3,这样我们有

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\parallel} + 2\mu_{\parallel} & \lambda_{\perp} & 0 \\ \lambda_{\perp} & \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial z} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \end{bmatrix} \tag{2.2.54}$$

如果我们只考虑与 y 轴无关的运动,则运动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} \tag{2.2.55}$$

对式(2.2.54)两边对 t 求导,式(2.2.55)中的 u 及 ω 也转换为它们对 t 的导数则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ \lambda_{\parallel} + 2\mu_{\parallel} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\perp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \lambda_{\perp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \tag{2.2.56}$$

现简化为

$$\partial_t U = A\partial_x U + B\partial_z U \tag{2.2.57}$$

其中 $U=[\dot{u}\dot{\omega}\sigma_{xx}\sigma_{zz}\sigma_{xz}]^{\mathrm{T}}$，$\partial_t$ 代表$\frac{\partial}{\partial t}$，$\partial_x$ 与 ∂_z 意义类似 ∂_t，A 是式(2.2.57)右端的第一个矩阵，B 是第二个矩阵。

这里用 Mac Cormack 方法(Tsingas,1991)，这种方法先在第 n 个时刻由 x 的正向差分和 z 的正向差分求第 $n+1$ 个时刻的值，然后在第 $n+1$ 个时刻剖面上用反向差分求第 $n+2$ 个时刻的值，这样交换地做下去(见图 2.2.20)。下面给出计算公式：

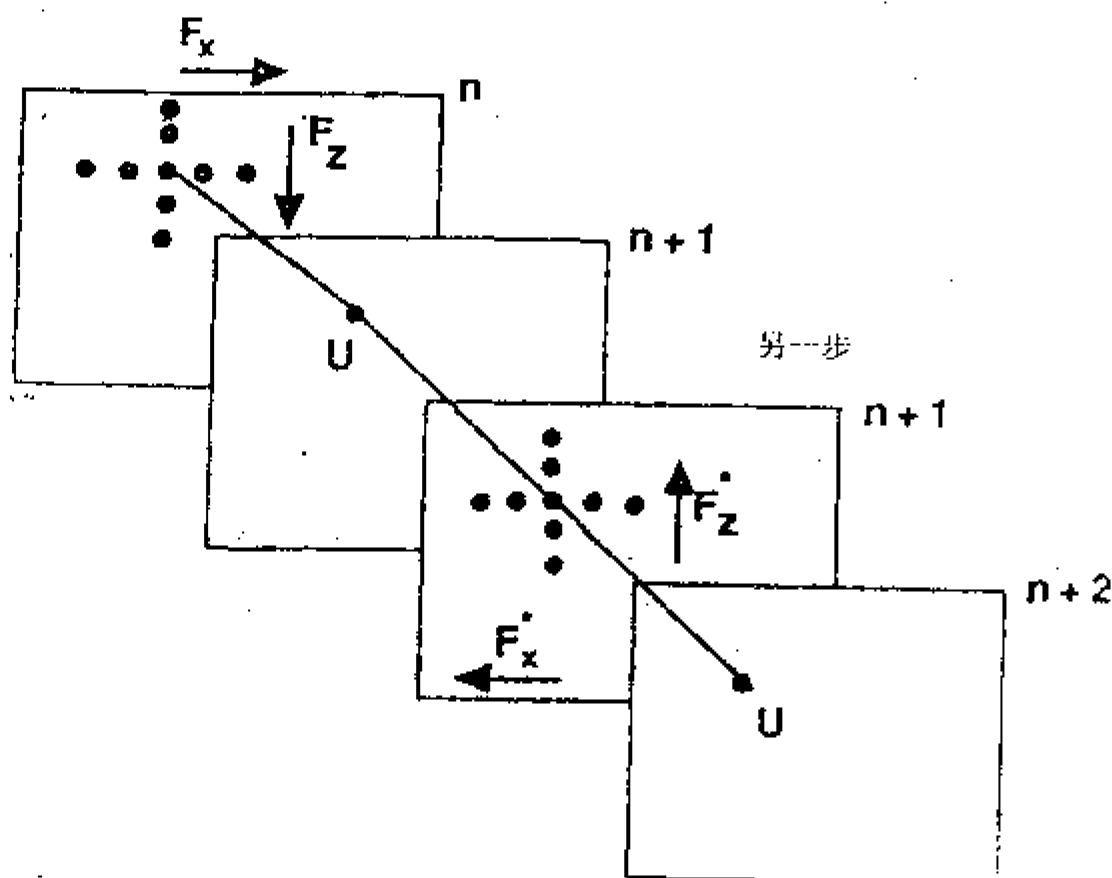


图 2.2.20 Mecormack 型有限差分分裂算法

当 $n=2k,k=0,1,2,\cdots$

$$\dot{u}^{(1)}_{j,m}=\dot{u}^{n}_{j,m}-\frac{p}{6}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xx})^{n}_{j,m}-8(\sigma_{xx})^{n}_{j+1,m}+(\sigma_{xx})^{n}_{j+2,m}]$$

$$\dot{u}^{n+1}_{j,m}=\frac{1}{2}(\dot{u}^{(1)}_{j,m}+\dot{u}^{n}_{j,m})+\frac{p}{12}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xx})^{(1)}_{j,m}-8(\sigma_{xx})^{(1)}_{j-1,m}+(\sigma_{xx})^{(1)}_{j-2,m}]$$

$$\dot{\omega}^{(1)}_{j,m}=\dot{\omega}_{j,m}-\frac{p}{6}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xz})^{n}_{j,m}-8(\sigma_{xz})^{(1)}_{j-1,m}+(\sigma)^{(1)}_{j+2,m}]$$

$$\dot{\omega}^{n+1}_{j,m}=\frac{1}{2}(\dot{\omega}^{(1)}_{j,m}+\dot{\omega}^{n}_{j,m})+\frac{p}{12}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xz})^{(1)}_{j,m}-8(\sigma_{xz})^{(1)}_{j-1,m}+(\sigma_{xz})^{(1)}_{j-2,m}]$$

$$(\sigma_{xx})^{(1)}_{j,m}=(\sigma_{xx})^{n}_{j,m}-\frac{p}{6}(\lambda_{\parallel}+2\mu_{\parallel})_{j,m}[7\dot{u}^{n}_{j,m}-8\dot{u}^{n}_{j+1,m}+\dot{u}^{n}_{j+2,m}]$$

$$(\sigma_{xx})^{n+1}_{j,m}=\frac{1}{2}[(\sigma_{xx})^{(1)}_{j,m}+(\sigma_{xx})^{n}_{j,m}]+\frac{p}{12}(\lambda_{\parallel}+2\mu_{\parallel})_{j,m}[7\dot{u}^{(1)}_{j,m}-8\dot{u}^{(1)}_{j-1,m}+\dot{u}^{(1)}_{j-2,m}]$$

$$(\sigma_{zz})^{(1)}_{j,m}=(\sigma_{zz})^{n}_{j,m}-\frac{p}{6}(\lambda_{\perp})_{j,m}[7\dot{u}^{n}_{j,m}-8\dot{u}^{n}_{j+1,m}+\dot{u}^{n}_{j+2,m}]$$

$$(\sigma_{zz})^{n+1}_{j,m}=\frac{1}{2}[(\sigma_{zz})^{(1)}_{j,m}+(\sigma_{zz})^{n}_{j,m}]+\frac{p}{12}(\lambda_{\perp})_{j,m}[7\dot{u}^{(1)}_{j,m}-8\dot{u}^{(1)}_{j-1,m}+\dot{u}^{(1)}_{j-2,m}]$$

$$(\sigma_{xz})^{(1)}_{j,m} = (\sigma_{xz})^{n}_{j,m} - \frac{p}{6}\nu_{j,m}[7\dot{\omega}^{n}_{j,m} - 8\dot{\omega}^{n}_{j+1,m} + \dot{\omega}^{n}_{j+2,m}]$$

$$(\sigma_{xz})^{n+1}_{j,m} = \frac{1}{2}[(\sigma_{xz})^{(1)}_{j,m} + (\sigma_{xz})^{n}_{j,m}] + \frac{p}{12}\nu_{j,m}[7\dot{\omega}^{(1)}_{j,m} - 8\dot{\omega}^{(1)}_{j-1,m} + \dot{\omega}^{(1)}_{j-2,m}] \tag{2.2.58}$$

当 $n = 2k+1, k = 0,1,2,\cdots$

$$\dot{u}^{(1)}_{j,m} = \dot{u}^{n}_{j,m} + \frac{p}{6}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xx})^{n}_{j,m} - 8(\sigma_{xx})^{n}_{j-1,m} + (\sigma_{xx})^{n}_{j-2,m}]$$

$$\dot{u}^{n+1}_{j,m} = \frac{1}{2}(\dot{u}^{(1)}_{j,m} + \dot{u}^{n}_{j,m}) - \frac{p}{12}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xx})^{(1)}_{j,m} - 8(\sigma_{xx})^{(1)}_{j+1,m} + (\sigma_{xx})^{(1)}_{j+2,m}]$$

$$\dot{\omega}^{(1)}_{j,m} = \dot{\omega}^{n}_{j,m} + \frac{p}{6}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xz})^{n}_{j,m} - 8(\sigma_{xz})^{n}_{j-1,m} + (\sigma_{xz})^{n}_{j-2,m}]$$

$$\dot{\omega}^{n+1}_{j,m} = \frac{1}{2}(\dot{\omega}^{(1)}_{j,m} + \dot{\omega}^{n}_{j,m}) - \frac{p}{12}\rho^{-1}_{j,m}[7(\sigma_{xz})^{(1)}_{j,m} - 8(\sigma_{xz})^{(1)}_{j+1,m} + (\sigma_{xz})^{(1)}_{j+2,m}]$$

$$(\sigma_{xx})^{(1)}_{j,m} = (\sigma_{xx})^{n}_{j,m} + \frac{p}{6}(\lambda_{\parallel} + 2\mu_{\parallel})_{j,m}[7\dot{u}^{n}_{j,m} - 8\dot{u}^{n}_{j-1,m} + \dot{u}^{n}_{j-2,m}]$$

$$(\sigma_{xx})^{n+1}_{j,m} = \frac{1}{2}[(\sigma_{xx})^{(1)}_{j,m} + (\sigma_{xx})^{n}_{j,m}] - \frac{p}{12}(\lambda_{\parallel} + 2\mu_{\parallel})_{j,m}[7\dot{u}^{(1)}_{j,m} - 8\dot{u}^{(1)}_{j+1,m} + \dot{u}^{(1)}_{j+2,m}]$$

$$(\sigma_{zz})^{(1)}_{j,m} = (\sigma_{zz})^{n}_{j,m} + \frac{p}{6}(\lambda_{\perp})_{j,m}[\dot{u}^{n}_{j,m} - 8\dot{u}^{n}_{j-1,m} + \dot{u}^{n}_{j-2,m}]$$

$$(\sigma_{zz})^{n+1}_{j,m} = \frac{1}{2}[(\sigma_{zz})^{(1)}_{j,m} + (\sigma_{zz})^{n}_{j,m}] - \frac{p}{12}(\lambda_{\perp})_{j,m}[7\dot{u}^{(1)}_{j,m} - 8\dot{u}^{(1)}_{j+1,m} + \dot{u}^{(1)}_{j+2,m}]$$

$$(\sigma_{xz})^{(1)}_{j,m} = (\sigma_{xz})^{n}_{j,m} + \frac{p}{6}\nu_{j,m}[7\dot{\omega}^{n}_{j,m} - 8\dot{\omega}^{n}_{j-1,m} + \dot{\omega}^{n}_{j-2,m}]$$

$$(\sigma_{xz})^{n+1}_{j,m} = \frac{1}{2}[(\sigma_{xz})^{(1)}_{j,m} + (\sigma_{xz})^{n}_{j,m}] - \frac{p}{12}\nu_{j,m}[7\dot{\omega}^{(1)}_{j,m} - 8\dot{\omega}^{(1)}_{j+1,m} + \dot{\omega}^{(1)}_{j+1,m}] \tag{2.2.59}$$

其中 $p = \frac{\Delta t}{\Delta x}$，上标有(1)者，是中间值。

差分方程的稳定条件是

$$pv_{\max} < 2/3 \tag{2.2.60}$$

$v_{\max}$是最大的 P 波速度(m/s)，易避免因空间格点引起的频散，要求，$\Delta x < \lambda_{\min}/6$，注意这里的 $\lambda_{\min}$是波场中的最小波长。

例 1　设上下半空间的界面，见图 2.2.21(a)及(b)其参数位于图的左方，在图 2.2.21(a)中上半空间是各向同性页岩，下部是各向同性的砂岩，在图 2.2.21(b)中上部是各向异性的页岩，下部是各向同性的砂岩。炮点及接收点排列见图 2.2.22(a)震源位于界面之上 150m 处，主频为 30Hz，是高斯子波型的 P 波线源，道间距为 18m；空间采样为 $\Delta x = \Delta z = 6$m，$\Delta t = 0.5$ms，图 2.2.22(b)是对应模型(2.2.21(a)的记录，图 2.2.22(c)是对应模型图 2.2.21(b)的记录。在各向同性介质中 P－P 波随着炮检距增加，振幅逐渐增大，P－SV 波看不出来(图 2-2-22(b)，而在各向异性介质剖面上，P－P 波的振幅随着炮检距的增加而减小，并随炮检距增加而出现了逐渐增强的 P－SV 波，同时波散也较明显见图 2.2.22(c)。这与理论上计算的反射系数(图 2.2.23(c))非常一致。在图 2.2.23(a)，(b)中也显示了理论与差分计算的振幅也非常一致，较强的 P－SV 波成为区分各向同性及各向异性介质的重要标志。

2.3　富氏变换正演模拟

前面已经看到差分法在正演模拟中是一个重要的工具，但是也看到差分法在计算导数

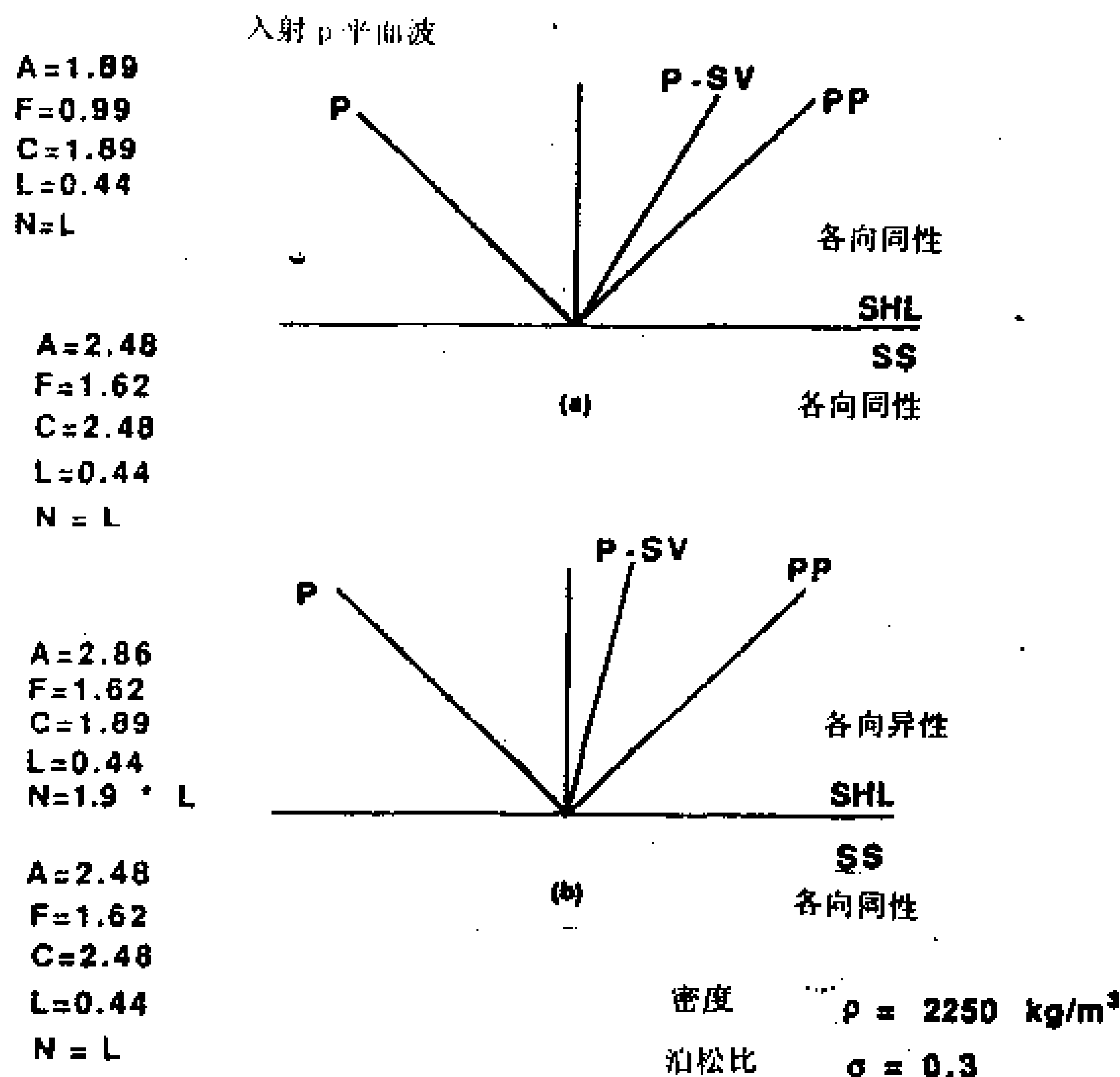


图 2.2.21 (a) 各向同性页岩——各向同性沙岩界面模型
(b) 横向各向同性页岩——各向同性沙岩界面模型

时只有几个点,这样的结果往往只能顾及局部的性质,而忽略了函数整体性质。由 Kosloff 和 Baysal(1982)发展起来,许多人如 Daudt 等(1989),曹景忠和石志国(1990),侯安宁(1994)作了应用发展的虚谱法利用富氏变换计算各点的导数,这样就照顾到函数的整体性质,具有较高的精度,另外富氏变换法产生的波散较小,对计算机要求的存储量也较小,因此虚谱法也成为波动方程数值计算的一个重要方法。

2.3.1 声波方程的数值模拟

1) 算法

波动方程(2.2.4)在 2 维的情形下也可写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+s(x,z,t) \tag{2.3.1}$$

其中 c 为波的传播速度;密度 ρ 是随空间各点可变的,如果 ρ 不变,则有

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+s(x,y,t) \tag{2.3.2}$$

现把式(2.2.62)写为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=LP+s_{i,j}^n \tag{2.3.3}$$

这里 L 代表空间的微分算子$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$,富氏变换法数值解就是用 FFT 求右端的空间导数,

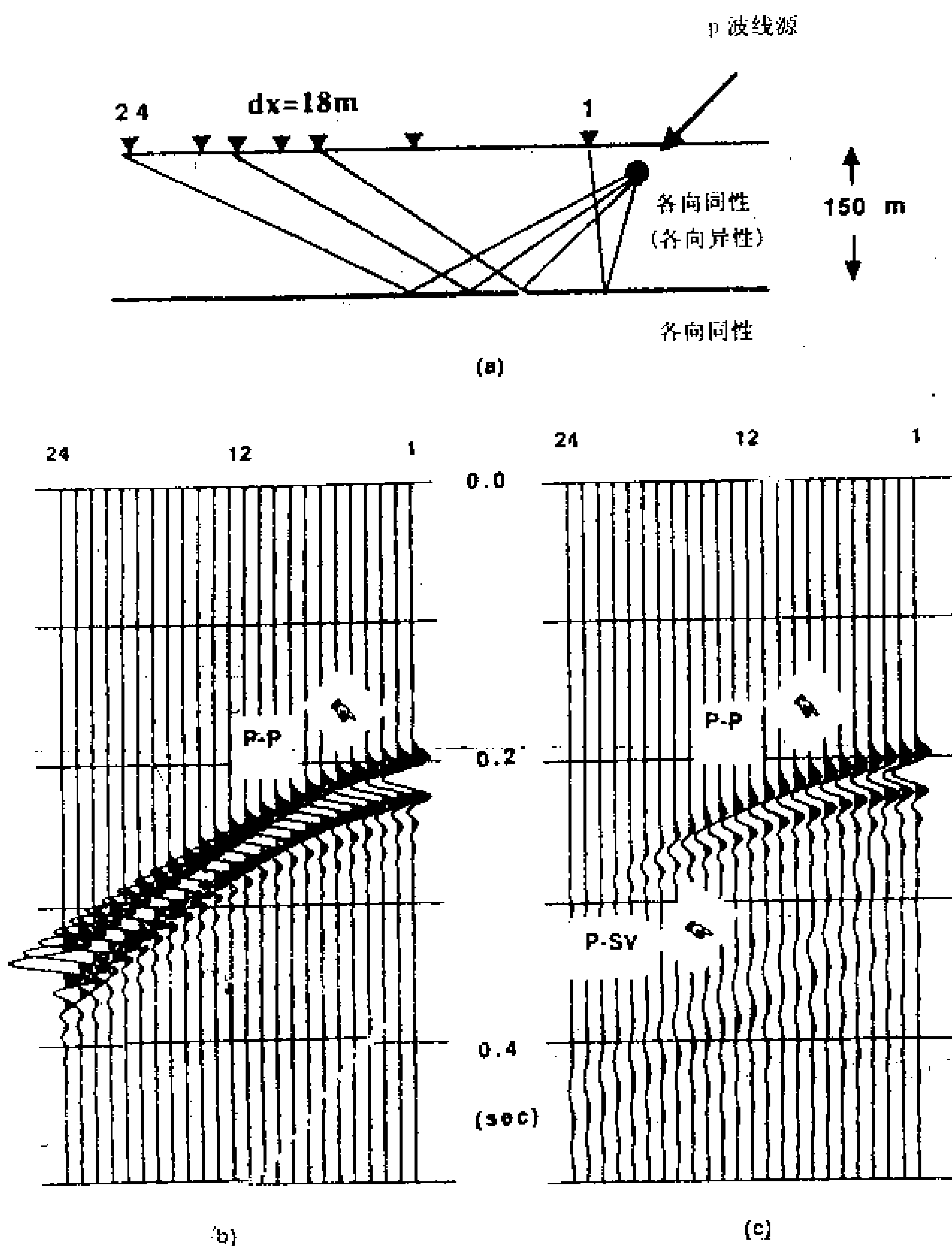


图 2.2.22 (a) 震源及排列布置图;(b) 各向同性页岩——各向同性沙岩界面的质点速度的垂直分量;
(c) 各向异性(即横向各向同性)页岩——各向同性沙岩界面的质点速度的垂直分量(Tsingas 等)

而左端的时间微分仍用差分法,假已知第 $n-1$ 和第 n 时刻的 P 值,则

$$\frac{1}{c^2\Delta t^2}[P_{i,j}^{n+1}-2P_{i,j}^{n}+P_{i,j}^{n-1}]=LP_{i,j}^{n}+s_{i,j}^{n} \tag{2.3.4}$$

这里 $P_{i,j}^n$为 $P(i\Delta x, j\Delta z, n\Delta t)$,其余类同,$s_{i,j}^n$为 $s(i\Delta x, j\Delta z, n\Delta t)$所以只要算出 $LP_{i,j}^n$即可求出 $P_{i,j}^{n+1}$,这样依次求出各个时刻的 $P_{i,j}^n$,见图 2.3.1。

$LP_{i,j}^n$按如下的富氏变换方法,

设 $F\{\cdot\}$表示富氏变换,$F^{-1}\{\cdot\}$表示富氏逆变换,i 为$\sqrt{-1}$,k_x,k_z 分别为 x 方向和 z 方向的圆波数,则

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,z,t)=F_x^{-1}\{(\mathrm{i}k_x)^2F_x\{P(x,z,t)\}\} \tag{2.3.5}$$

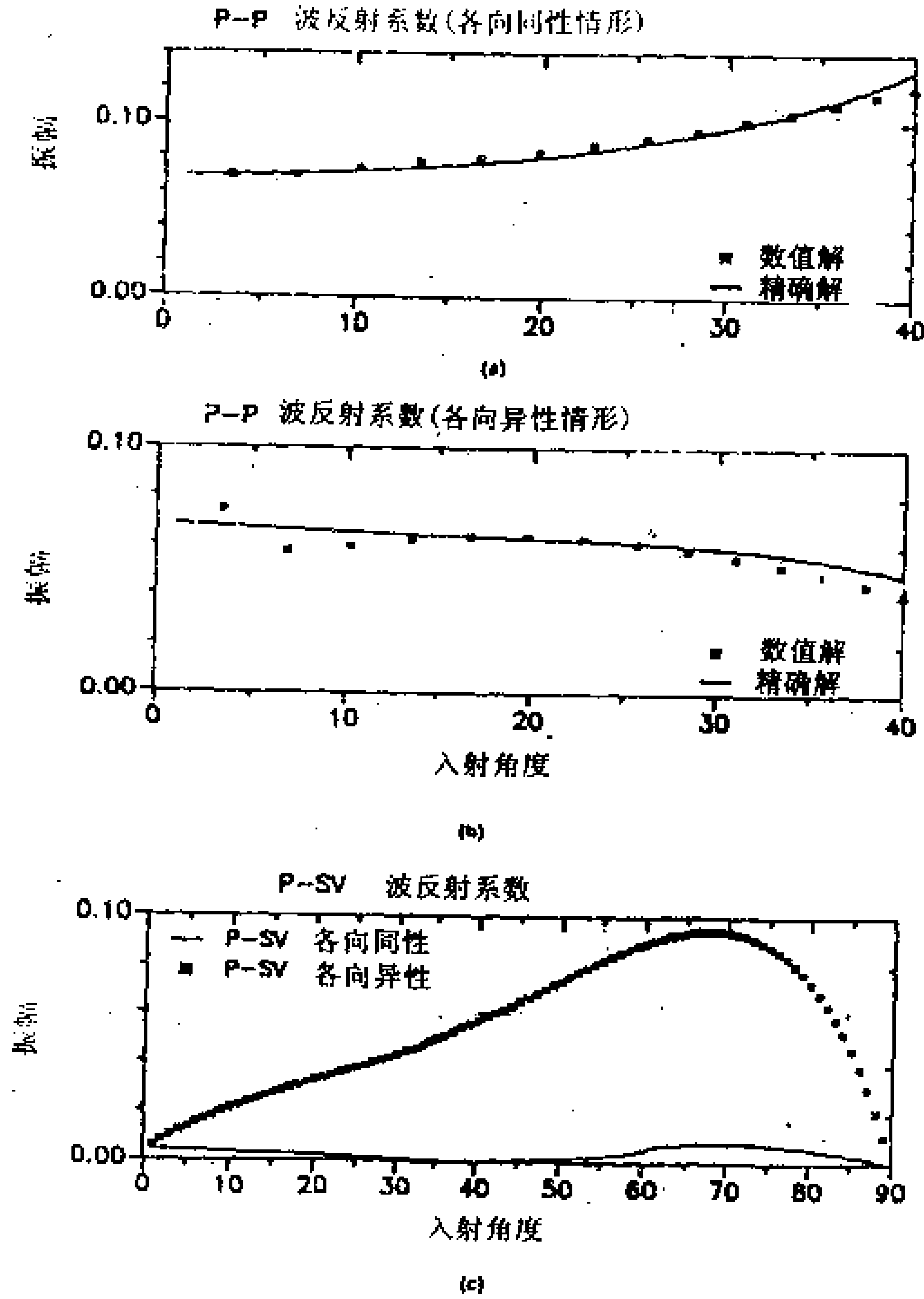


图 2.2.23 (a) 图 2.2.21(a)情形下,P-P波反射系的数值解与精确解对比

(b) 图 2.2.21(b) 情形下 P-P 波反射系数的数值解与精确解对比

(c) 图 2.2.21 两种情形下,P-SV 波反射系数的变化(Tsingas)

同样地

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}P(x,z,t)=F_z^{-1}\{(\mathrm{i}kz)^2Fz\{P(x,z,t)\}\} \tag{2.3.6}$$

类似地当 ρ 为变量时,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial P}{\partial x}\right)=F_x^{-1}\{\mathrm{i}k_xF_x\{\frac{1}{\rho}F_x^{-1}\{\mathrm{i}k_xF_x\{P(x,z,t)\}\}\}\} \tag{2.3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial P}{\partial z}\right)=F_z^{-1}\left\{\mathrm{i}k_zF_z\left\{\frac{1}{\rho}F_z^{-1}\{\mathrm{i}k_zF_z\{P(x,z,t)\}\}\right\}\right\} \tag{2.3.8}$$

实际计算时,以上均用快速富氏变换计算。

2) 波散特点

设 2 维波动方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{2.3.9}$$

的调和解为

$$p(x,z,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x x+k_z z-\omega t)} \tag{2.3.10}$$

代入(2.3.9)的两端,其右端按差分计算,则有

$$\begin{aligned}-(k_x^2+k_z^2)&=\frac{1}{c^2(\Delta t)^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\Delta t}-2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\Delta t})\\&=-\frac{4}{c^2(\Delta t)^2}\sin^2\frac{\omega\Delta t}{2}\end{aligned}$$

令 $k=\sqrt{k_x^2+k_z^2}$,则

$$k=\pm\frac{2}{c\Delta t}\sin\frac{\omega\Delta t}{2} \tag{2.3.11}$$

这就是波散关系。为了更直观地了解波散关系,作如下转换

$$c=\frac{2}{k\Delta t}\sin\frac{\omega\Delta t}{2}=\frac{2}{k\Delta t}\sin\frac{k\cdot v\Delta t}{2} \tag{2.3.12}$$

其中 v 为相速度,如果$\frac{v}{c}$趋于1,即不发生波散

$$\begin{aligned}\frac{v}{c}&=\frac{(kv\Delta t)/2}{\sin\left(\frac{k\cdot v\Delta t}{2}\right)}\\&=\frac{\frac{k\Delta x}{2}\cdot\frac{v\Delta t}{\Delta x}}{\sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\cdot\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)}=\frac{\frac{k\Delta x}{2}\cdot\alpha}{\sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\cdot\alpha\right)}\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

其中 $\alpha=\frac{v\Delta t}{\Delta x}$,图 2.3.2 显示了这种关系,显然当 $\alpha=\frac{v\cdot\Delta t}{\Delta x}<0.2$ 时就不会发生波散(以上假设 $\Delta x=\Delta z$),这样 Δt,Δx 及 Δz 除要满足采样条件外,还要满足这个不发生波散的条件。

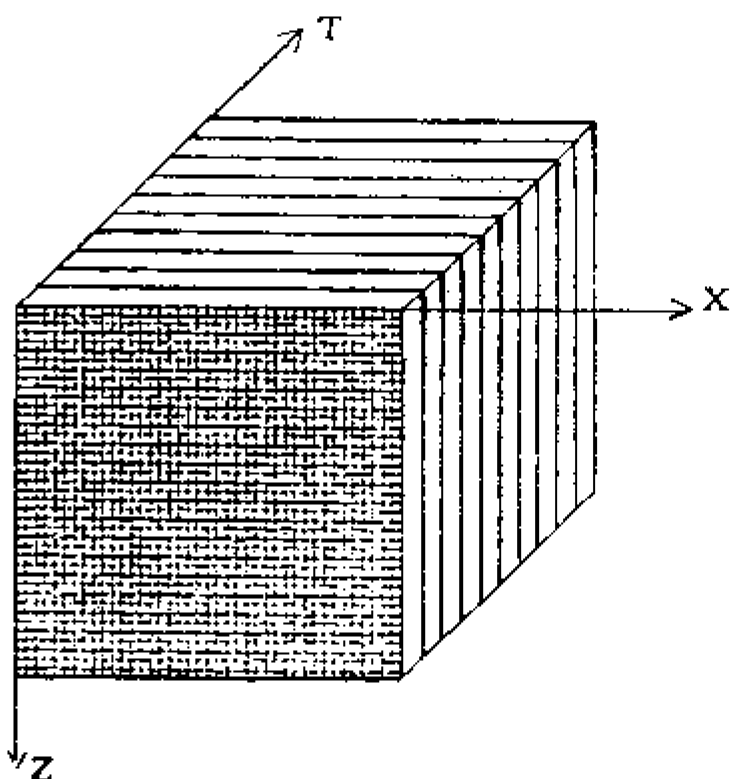


图 2.3.1 虚谱法计算顺序

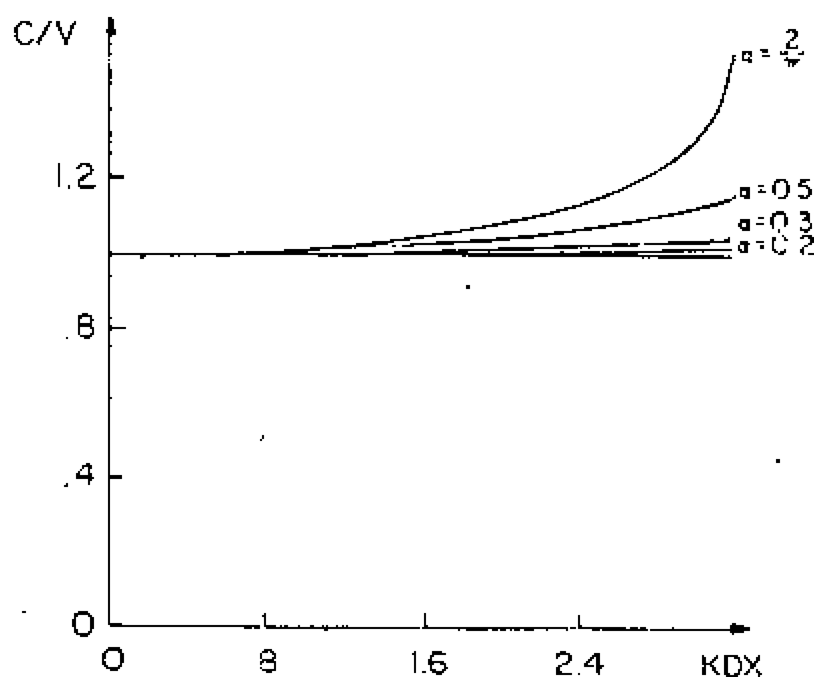


图 2.3.2 波散关系

例 1 图 2.3.3(a)是一个具 2 个界面三层介质的模型,点源位于中间,图 2.3.3(b)是数

值模拟记录，从图中可清晰地看到直达波，第一层反射及第二层反射波。如果在 s 处打一口井(见图 2.3.4(a))，井中的记录就是 VSP 剖面，图(2.3.4(b))就是数值模拟的 VSP 剖面，直达波及上行波很清楚。如在井的右方 100m 打一口井(见图 2.3.5(a))，就可计算得到非零井源距的 VSP 剖面(图 2.3.5(b))其中的上行波及下行波也非常清楚。图 2.3.6(a)是有两口相距 200m 井的模型，炮点在井中两个界面之间，图 2.3.6(b),(c),(d),(e),(f)显示了波的传播过程，图 2.3.6(g)是接收井的记录，其中直达波及第一层和第二层的反射波非常清晰。

例 2 图 2.3.7(a)是一个具有楔型形态的几何构造，如果我们把震源沿着界面布置，其强度，按照界面的波阻抗分配，这样得到的剖面见图 2.3.7(b)，图中 A，B 分别是两个斜界面，C_1 和 C_2 是界面 C 的反射，由于楔形内部是低速这部分反射时间较长，D_1 和 D_2 是 D 的反射，由于上部比下部速度高，所以反射的相位产生了反相，图中的同相轴 H 是由于楔形底面在向上反射时，从楔形上部出去时由尖点产生的绕射。

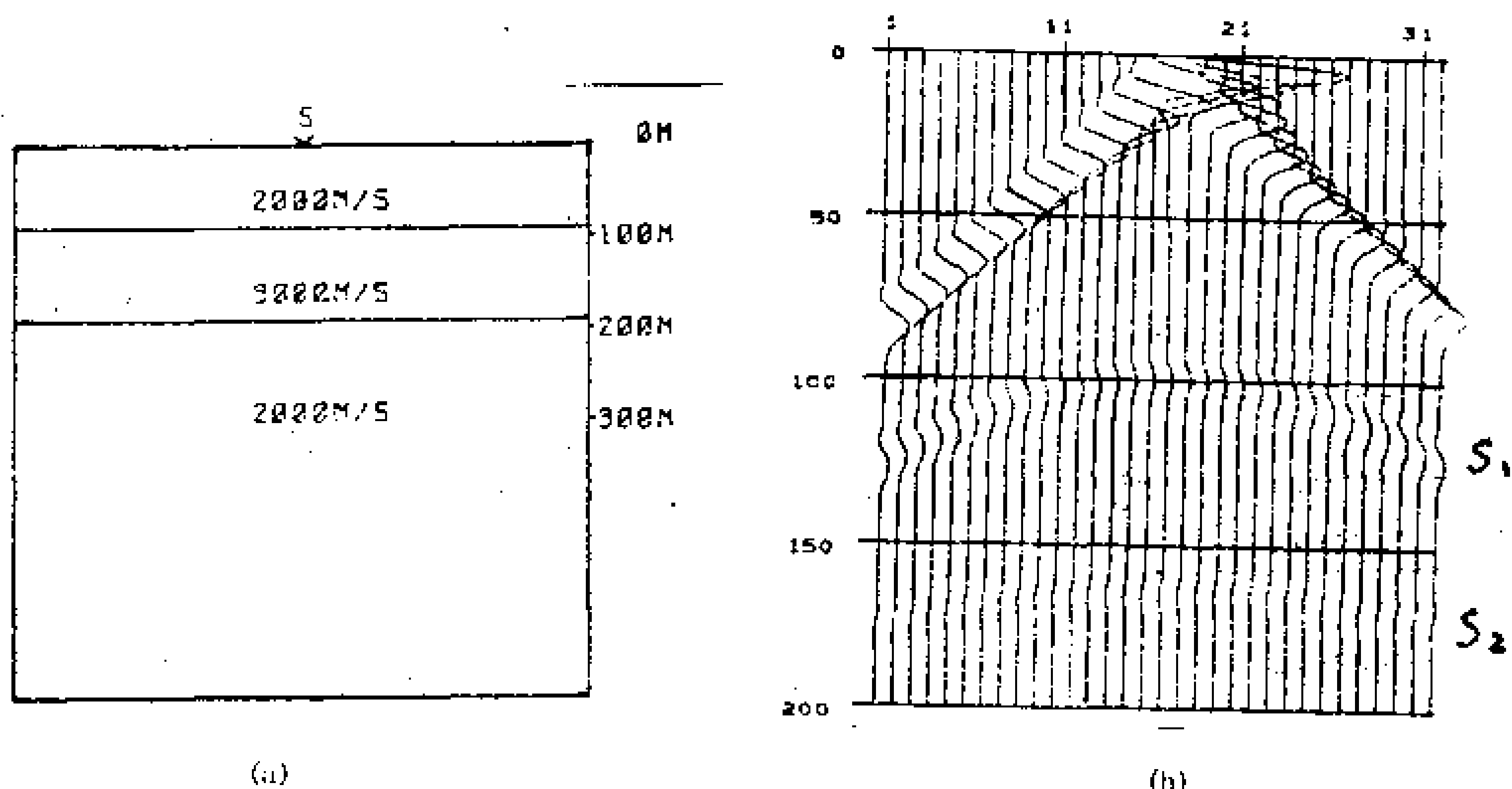


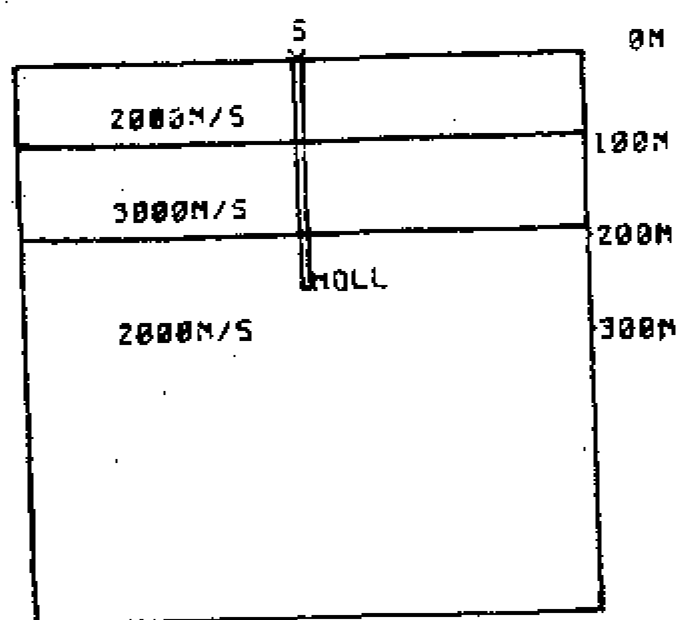
图 2.3.3 (a) 二界面模型；(b) 模型(a)的合成记录

2.3.2 弹性波的数值模型

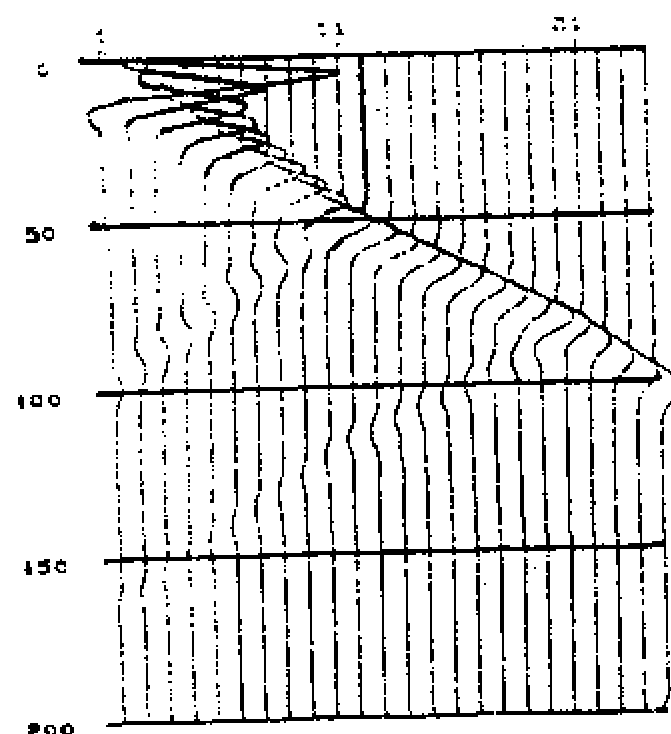
对于弹性波方程(2.2.28)也可对其时间导数用差分，空间域导数用富氏变换的方法求解，这里就不重复了。对于波散的讨论也有类似的结果，下面就看一个例子。

例 1 在一个 2 维的均匀弹性上下半空间，下半空间的 P 波与 S 波的速度之比为$\sqrt{3}:1$，上半空间令弹性常数均为零，取 $\Delta x=\Delta z$ 为一个单位上下各取 128 个点，横向取 256 个点。震源为一个垂直的点震源，位于界面之下 10 个格点。图(2.3.8(a)-(e))显示了应力 σ_{zz} 在不同时刻的空间变化。在图 2.3.8(a)中 P 波刚刚到达界面，反射波 PP 也刚刚产生。S 波也明显可见。在图 2.3.8b 至 e 可以看到 P,PP,PS,S,SS,SP 波显现及传播的过程，S 波总有个结点，这是两边相位相反的分界线。P 波比 S 波传播快，例如在图 2.3.8(b)中 PP 还落后于 S 波，在图 2.3.8(c)中 PP 波赶上了 S 波，在图 2.3.8(d)中 PP 波就已超出了 S 波。

用富氏变换法还可单独提取出 P 波及 S 波。用求散度的方法可求出 P 波 S 见图(2.3.9

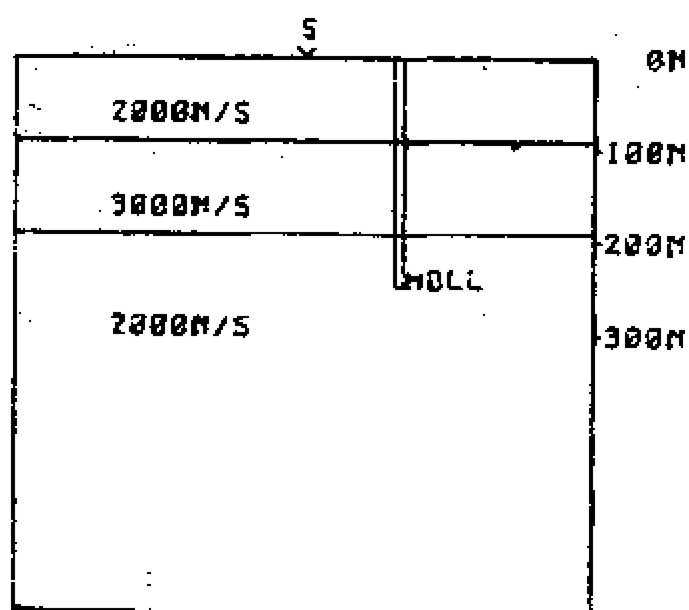


(a)

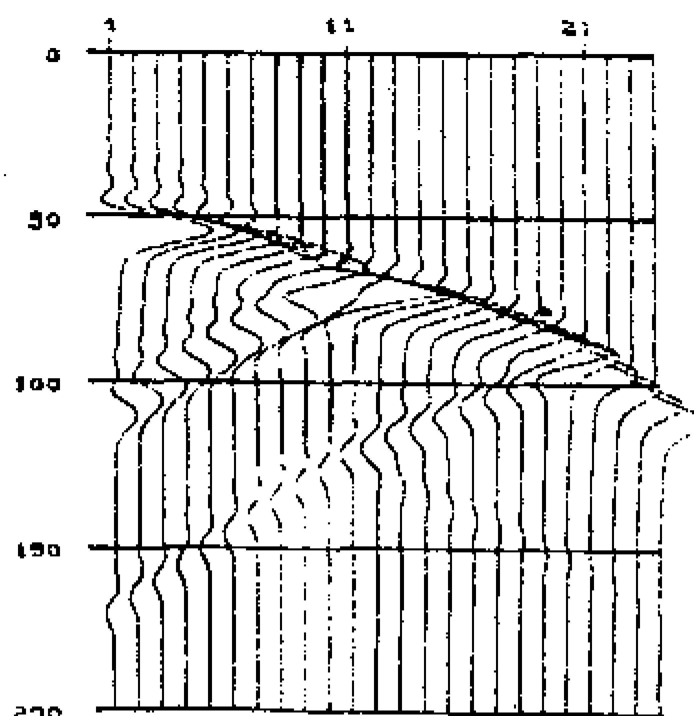


(b)

图 2.3.4　VSP 合成记录
(a) 模型;(b) 模型(a)的合成记录



(a)



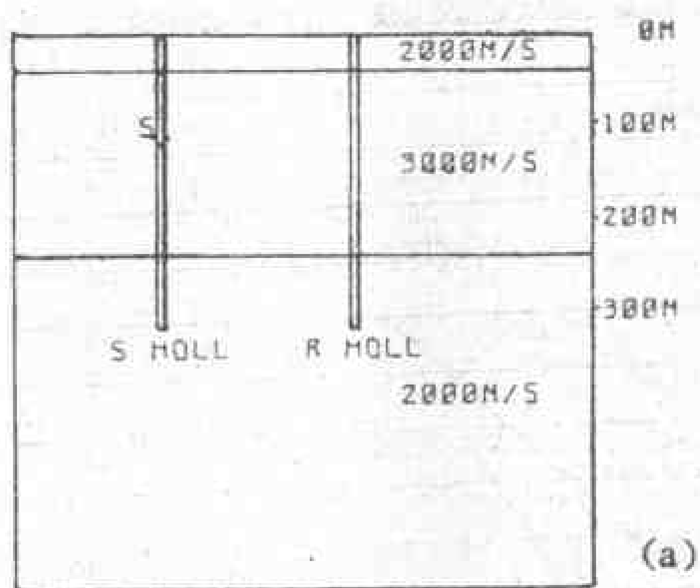
(b)

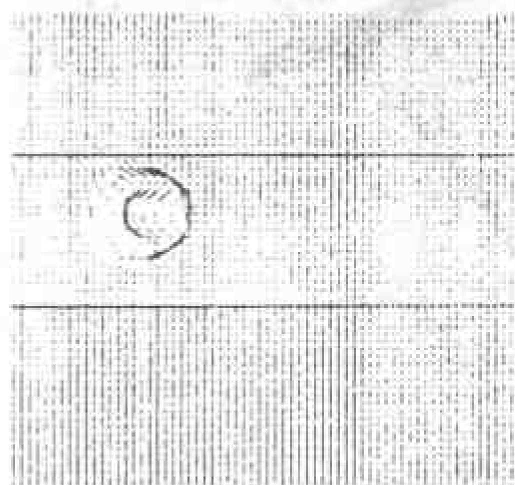
图 2.3.5　非零井源距 VSP 合成记录
(a) 模型　(b) 模型(a)的合成记录

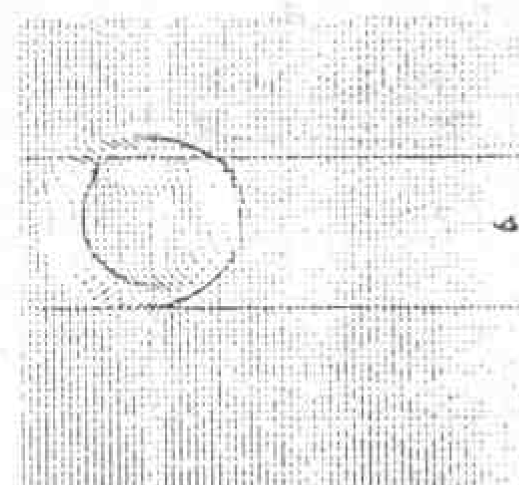
(a))用求旋度方法可求出 S 波,见图 2.3.8(b)

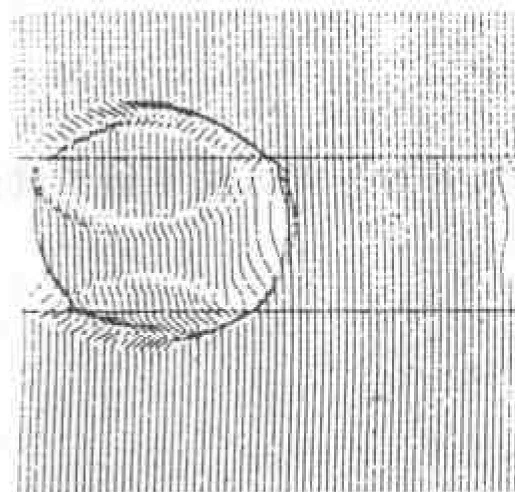
2.4　有限元法地震波场数值模拟

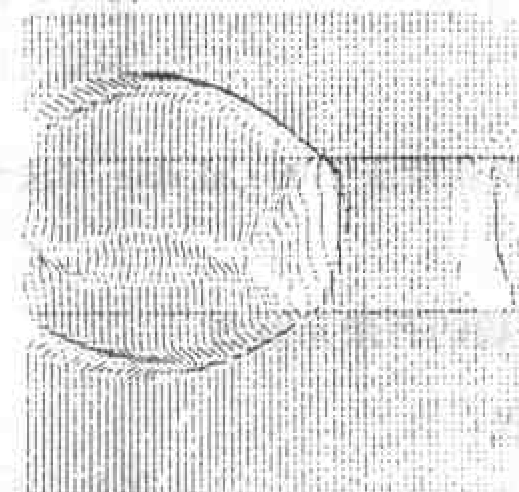
有限元法是处理固体力学问题的一种非常有效的方法,它不受边界几何形状的限制,又具有灵活的分割方法,因此在许多学科得到广泛的应用。地震偏移及正演模拟也从八十年代初期引入有限元的方法。梁国平、邵秀民等已推出一套地震波传播数值模拟有限元程序

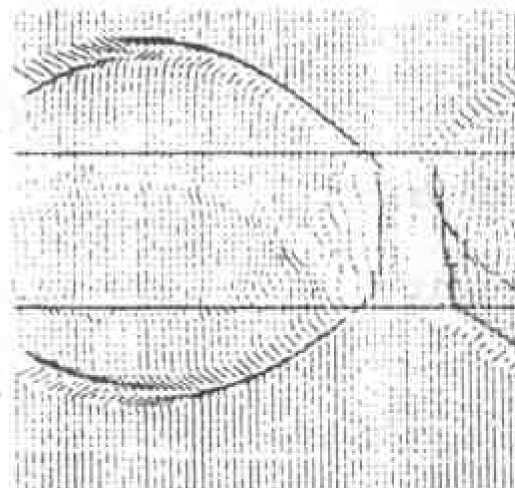












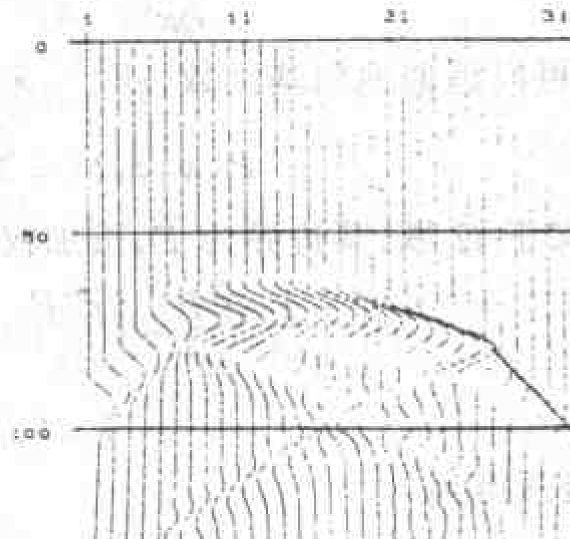
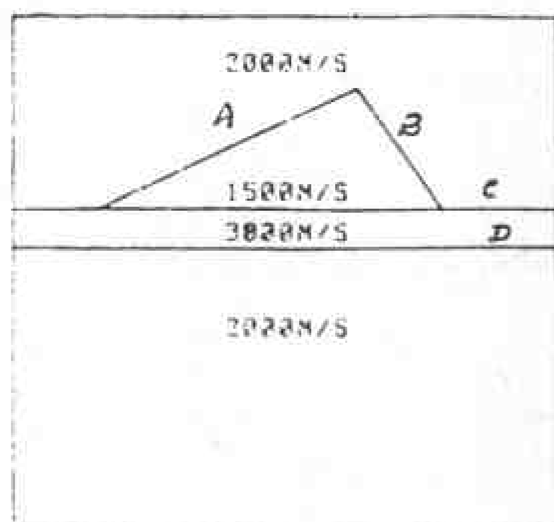
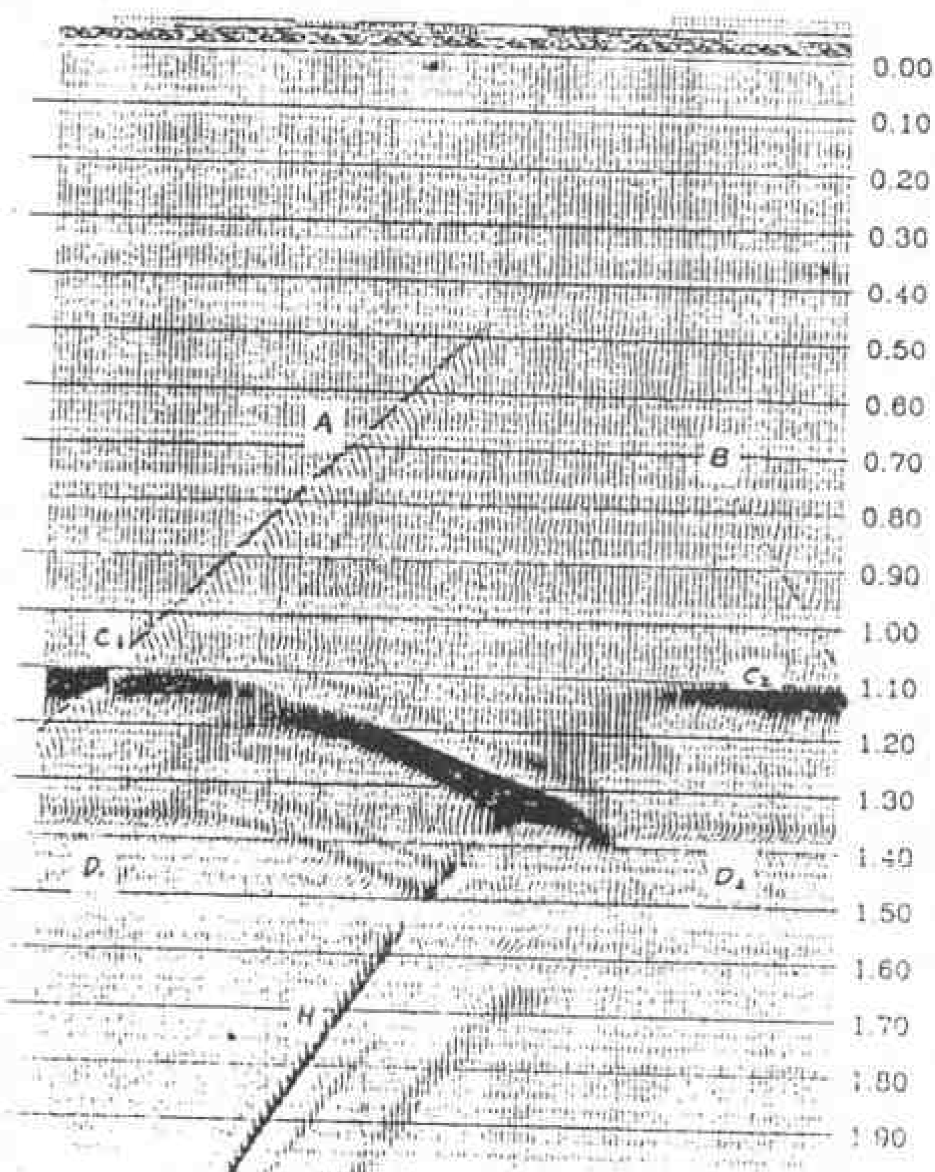


图 2.3.6 井间合成记录

(a) 模型;(b)—(f) 波的传播过程两图之间相差 20ms;(g) 接收进记录



(a)



(b)

图 2.3.7　楔形模型记录

(a) 模型　(b) 模型(a)的合成记录

系统。

我们从加权剩余法中的 Galarkin 方法给出计算的公式,并对分割方法等给予具体的讨论。

2.4.1　声波方程的有限元解法

对声波方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+f \tag{2.4.1}$$

假设其解 P 也可以近似地用基函数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ 来表示,即

$$P(x,z,t)\doteq\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\varphi_i(x,z) \tag{2.4.2}$$

设上述方程定义于 Ω 域,其边界为 Γ,按加权剩余的 Galarkin 方法有

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)+f\right]\varphi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{2.4.3}$$

用 Green 公式展开得到

$$\iint_{\Omega}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\varphi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial n}\varphi_i\mathrm{d}s+\iint_{\Omega}f\varphi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0 \tag{2.4.4}$$

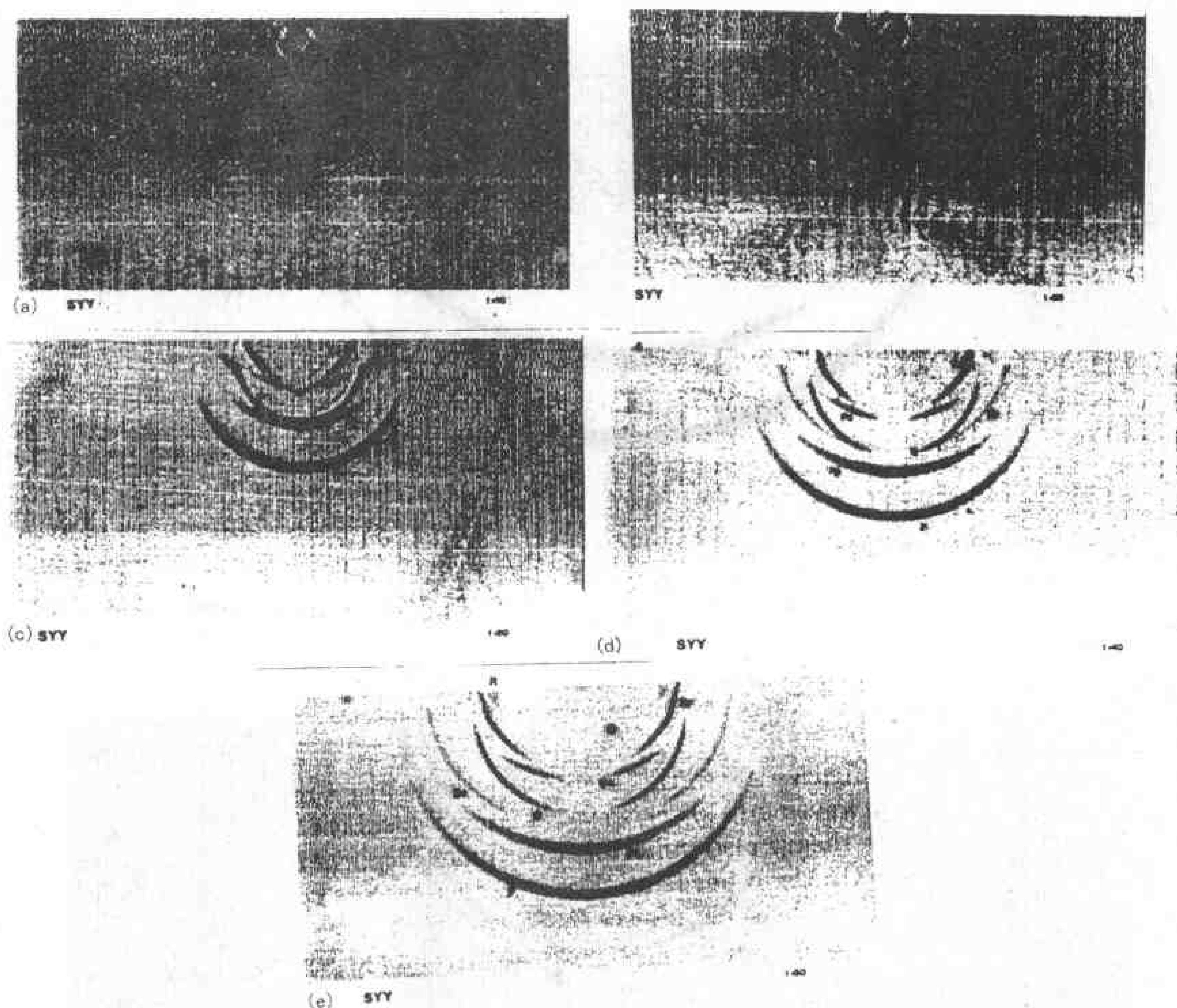


图 2.3.8 (a)—(e)应力 σ_{zz} 在不同时刻的空间变化

$$i=1,2,\cdots,N$$

然后要对 Ω 作适当的分割，先满足一定条件的基函数，由这 N 个关于 $P_i(t)$ 从而求得 $p(x,z,t)$.

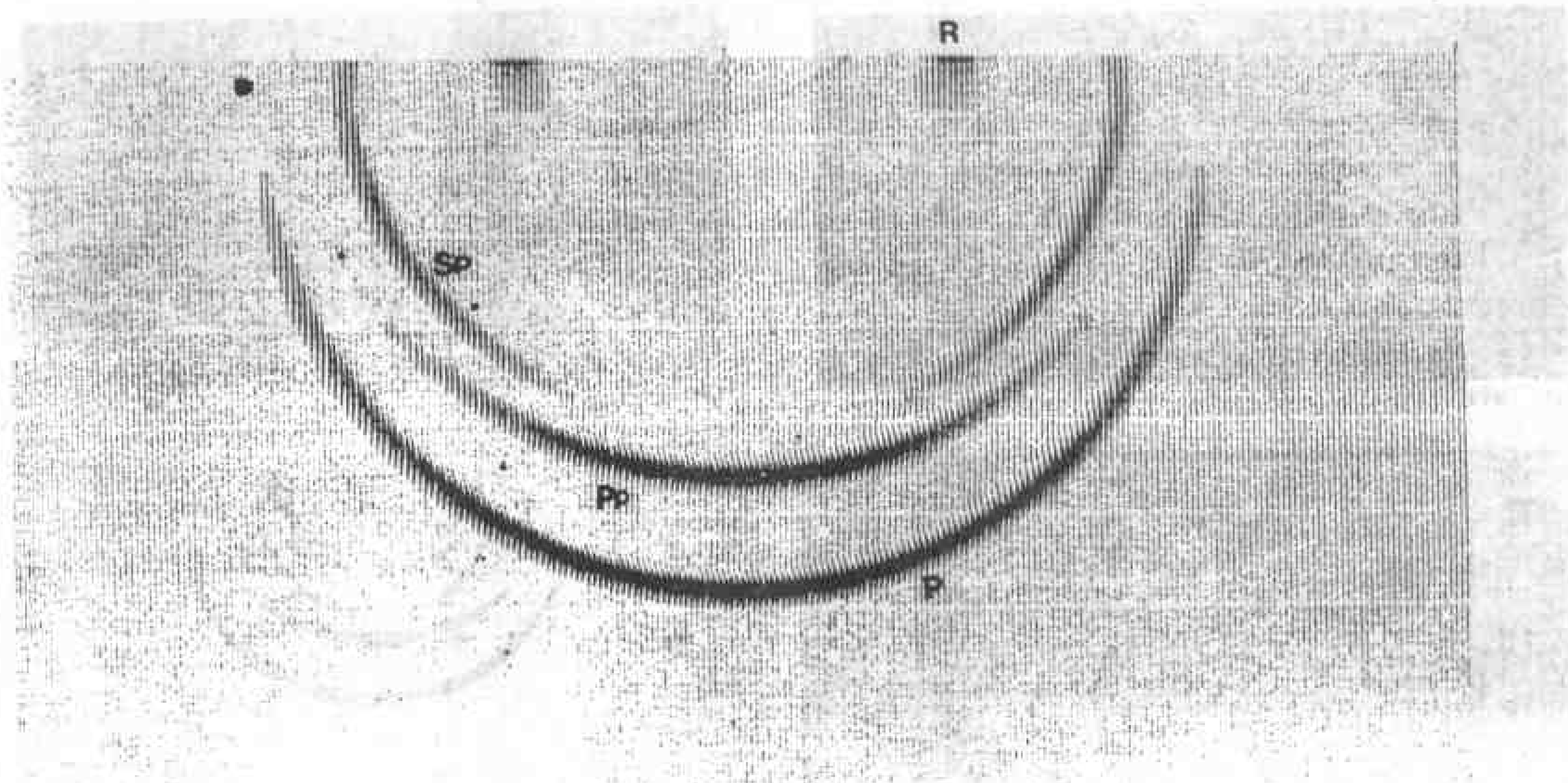
2.4.2 网格剖分

对于层状介质先输入层的参数，横向不均匀介质，则分成曲边四边形（图 2.4.1(a)），在各个曲边四边形内剖分成小的四边形（图 2.4.1）(b)是为了满足采样定理和计算精度，要求最大边长 $h_{\max}$ 满足

$$h_{\max}\leqslant\frac{c_{\min}}{10f} \tag{2.4.5}$$

2.4.3 基函数及插值函数

基函数 φ_i 取定义在一个矩形上的双线性函数 $\varphi_i(\xi,\eta)$



(a)

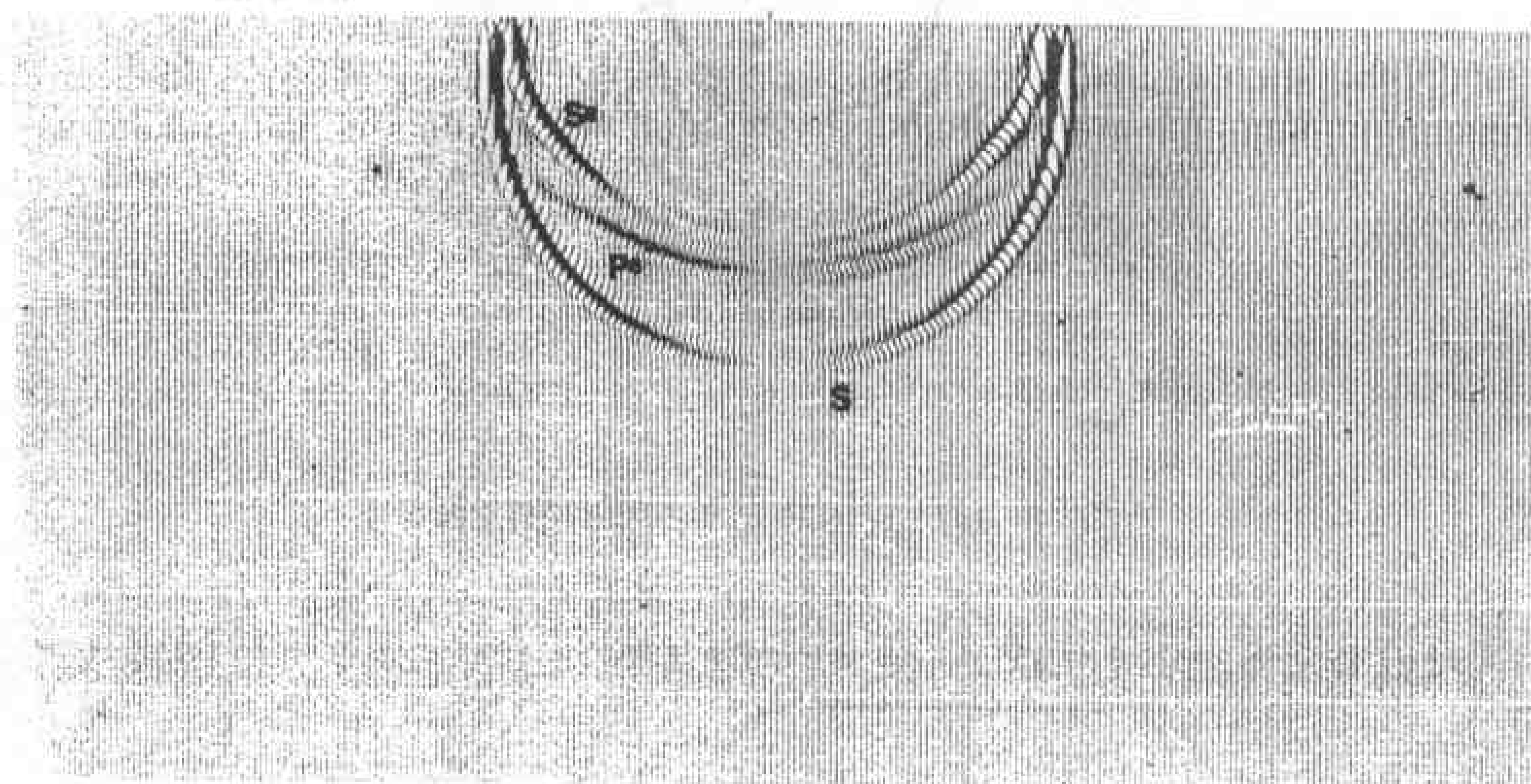


图 2.3.9 纵横波的分离 (a) 压缩波 SP,PP,P;(b)横波 SS,PS,S

$$\varphi_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \tag{2.4.6}$$

$$i=1,2,3,4$$

(ξ_i,η_i),$i=1,2,3,4$ 为矩形的四个顶点,如图 2.4.2 所示,坐标中心位矩形中心,$\varphi_i(\xi,\eta)$由四个三角形组成,顶点位于(ξ_i,η_i)之上,$\varphi_i(\xi,\eta)$分别在(ξ_i,η_i)之上为 -1,在其他顶点上为零。在这个矩形上的插值函数 $\omega(x,z)$,作如下变换:

$$x=x_0+\frac{h_1}{2}\xi,z=z_0+\frac{h_2}{2}\eta \tag{2.4.7}$$

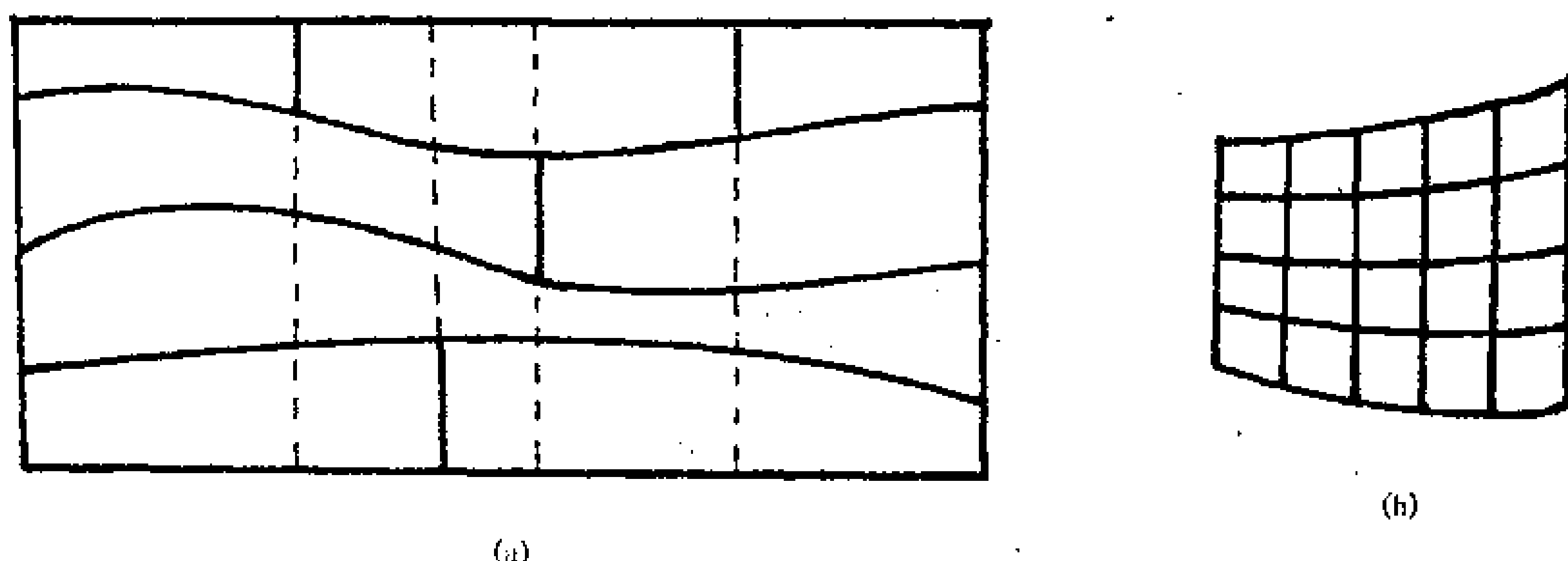


图 2.4.1 介质剖分法 (a) 按地层剖分;(b) 在(a)的每个曲边四边形中的剖分

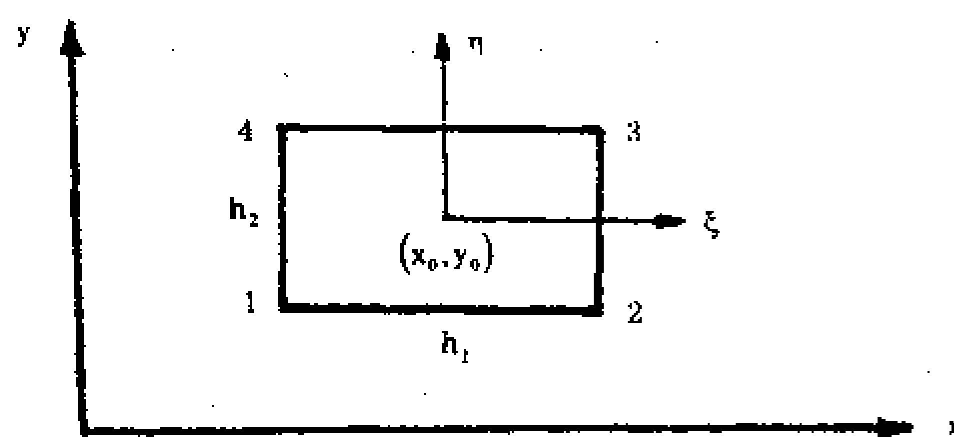


图 2.4.2 一个矩形单元上的双线性函数的变量坐标

参见图 2.4.3。这样,$\omega(x,z)$就变为 $\omega(\xi,\eta)$(为了简便,就不再对这两个函数作出区分),$\omega(\xi,\eta)$在矩形四个顶点或节点上的值记为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$,则

$$\omega(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}\omega_i\varphi_i(\xi,\eta) \tag{2.4.8}$$

式(2.4.7)中的 h_1,h_2 分别为矩形的边长。

对于一般的四边形,设四个顶点为 P_1,P_2,P_3,P_4,相应的坐标为$(x_i,z_i)\ i=1,2,3,4$。另在参考坐标系中考虑一边长为单位长度的正方形,其顶点为$(\xi_i,\eta_i)\ i=1,2,3,4$,作如下变换

$$x=\sum_{i=1}^{4}x_i\varphi_i(\xi,\eta)$$
$$z=\sum_{i=1}^{4}z_i\varphi_i(\xi,\eta) \tag{2.4.9}$$

则四边形与正方形之间的点一一对应,且(x_i,z_i),$i=1,2,3,4$ 分别对应(ξ_i,η_i),$i=1,2,3,4$.在四边形上的函数 ω,可用下面的插值函数表示:

$$\omega(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}\omega_i\varphi_i(\xi,\eta) \tag{2.4.10}$$
$$i=1,2,3,4$$

2.4.4 刚度矩阵、质量矩阵及边界质量矩阵的计算

再看式(2.4.4),重写出如下:

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial n}\varphi_i \mathrm{d}s + \iint_{\Omega} f\varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0 \tag{2.4.11}$$

在 Ω 区域内部的节点上，由于基函数的性质，

有：

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial n}\varphi_i \mathrm{d}s = 0 \tag{2.4.12}$$

在震源点之外有：

$$\iint_{\Omega} f\varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0 \tag{2.4.12}$$

在 $x = \pm a$ 及 $z = b$ 的边界上我们用吸收边界条件

$$c\frac{\partial^2 P}{\partial n \partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{1}{2}c^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = 0 \tag{2.4.13}$$

$\frac{\partial}{\partial s}$是切向的偏导数。我们假设在$\frac{\partial P}{\partial s}$在四个角点$(a,0),(a,b),(-a,b),(-a,0)$处为零，对式(2.4.3)两边乘上 φ_i 沿边界积分，同时对最后一项用分部积分，则有

$$c\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial n}\varphi_i \mathrm{d}s + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\Gamma}P\varphi_i \mathrm{d}s + \frac{c^2}{2}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial \varphi_i}{\partial s}\mathrm{d}s = 0 \tag{2.4.14}$$

$$i = 1, 2\cdots, N$$

Γ 是 $-a \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant b$ 的边界。

令

$$W_i = \int_{\Gamma}\frac{\partial p}{\partial n}\varphi_i \mathrm{d}s \tag{2.4.15}$$

这个值是未知的。

由式(2.4.2)知，$P = \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\varphi_i(x,z)$，

令

$$M_i = \iint_{\Omega} p\varphi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{N} p_i \iint_{\Omega}\varphi_i\varphi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}p_j \tag{2.4.16}$$

其中

$$M_{ij} = \iint_{\Omega}\varphi_i\varphi_j \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{2.4.17}$$

令

$$\begin{aligned} S_i &= \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \sum_{j=1}^{N} p_j \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \sum_{j=1}^{N} p_j S_{ij} \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

其中

$$S_{ij} = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{2.4.19}$$

$$M_i^B = \int_{\Gamma} p\varphi_i \mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{N} p_j \int_{\Gamma}\varphi_i\varphi_j \mathrm{d}s$$

$$= \sum_{j=1}^{N} M_{ij}^{B} p_j \tag{2.4.20}$$

其中

$$M_{ij}^{B} = \int_{\Gamma} \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}s \tag{2.4.21}$$

$$S_j^B = \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{N} p_j \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} \mathrm{d}s$$

$$= \sum_{j=1}^{N} p_j S_{ij}^{B} \tag{2.4.22}$$

$$S_{ij}^{B} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} \mathrm{d}s \tag{2.4.23}$$

则式(2.4.13)及式(2.4.14)可写为如下的矩阵方程：

$$\frac{1}{c^2} M\ddot{P} + SP - W = 0 \tag{2.4.24}$$

$$c\dot{W} + M^B \ddot{P} + \frac{c^2}{2} S^B P = 0 \tag{2.4.25}$$

这是一个微分方程组，式中：

$$P = (p_1(t), p_2(t), \cdots, P_N(t))^{\mathrm{T}} \tag{2.4.26}$$

$$W = (W_1(t), W_2(t), \cdots, W_N(t))^{\mathrm{T}} \tag{2.4.27}$$

$$M = \{M_{i,j}\},\ S = \{S_{ij}\},\ M^B = \{M_{ij}^B\},\ S^B = \{S_{ij}^B\} \tag{2.4.28}$$

(1) S_{ij}的计算

由于 Ω 是由许多四边形单元组成的

$$S_{ij} = \sum_{e \in \Omega} S_{ij}^{e} \tag{2.4.29}$$

对于矩形单元有

$$S_{ij}^{e} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

其中 $\varphi_i(\xi, \eta)$由式(2.4.6)给出

对于一般四边形，在式(2.4.9)变换下有

$$S_{ij}^{e} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \det(J) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{2.4.30}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{2.4.31}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} z_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} z_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \tag{2.4.32}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

即

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\end{pmatrix}=J^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\end{pmatrix}\tag{2.4.33}$$

$$J^{-1}=\frac{1}{\det(J)}\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial\eta} & -\frac{\partial z}{\partial\xi}\\ -\frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\xi}\end{pmatrix}\tag{2.4.33}$$

把式(2.4.31)—(2.4.33)代入式(2.4.30)即求得 S_{ij}^e.

(2) M_{ij}的计算

类似地

$$M_{ij}=\sum_{e\in\Omega}M_{ij}^e\tag{2.4.34}$$

其中

$$M_{ij}^e=\iint_e\varphi_i\varphi_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\tag{2.4.35}$$

φ_i 是正交的,有

$$M_{ij}^e=\begin{cases}\frac{A}{4} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\tag{2.4.36}$$

其中 A 为四边形的有向面积,这是个对角阵。

(3) S_{ij}^B的计算

在包括边界 $x=\pm a, z=0$ 及 $z=b$ 的单元 e 上,这个单元的边界刚度矩阵元素为

$$S_{ij}^e=\int_{\partial e}\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}\frac{\partial\varphi_j}{\partial s}\mathrm{d}s\tag{2.4.37}$$

在各个单元的 S_{ij}^e叠加抵消之后,实际上只剩下沿上述四个边界上的积分。设在 $x=a$ 上,即如图 2.4.3(a)的一个单元,其边 P_2P_3 在 $x=a$ 上,这时

$$S_{ij}^e=\int_{z_3}^{z_2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\mathrm{d}z=(z_2-z_3)\int_{-1}^1\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}(1,\eta)\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}(1,\eta)\mathrm{d}\eta\tag{2.4.38}$$

这里 ds 就是沿 z 方向的微分,而 x,z 又经过(2.4.9)的变换,$\frac{\partial\varphi_i}{\partial z},\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}$用(2.4.33)式求出。

在 $x=-a$ 上有

$$S_{ij}^e=\int_{z_1}^{z_4}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\varphi_j}{\partial z}\mathrm{d}z=(z_4-z_1)\int_{-1}^1\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}(-1,\eta)\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}(-1,\eta)\mathrm{d}\eta\tag{2.4.39}$$

在 $z=b$ 上

$$S_{ij}^e=\int_{x_2}^{x_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\mathrm{d}x=(x_1-x_2)\int_{-1}^1\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\xi,-1)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}(\xi,-1)\mathrm{d}\xi\tag{2.4.40}$$

$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x},\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}$用式(2.4.33)求出。

(4) M_{ij}^{B}的计算

$$M_{ij}^{e}=\int_{\partial e}\varphi_{i}\varphi_{j}\mathrm{d}s \tag{2.4.41}$$

与前面一样

$$M_{ij}^{e}=\begin{cases}\dfrac{A}{4} & i=j\text{ 且 }P_{i}\text{ 在边界上}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

这也是个对角阵

(5) 微分方程组(2.4.24),(2.4.25)的求解

令

$$\dot{P}=\frac{P^{n+1}-P^{n}}{\Delta t}=Q^{N+1} \tag{2.4.42}$$

$$\ddot{P}=\frac{Q^{n+1}-Q^{n}}{\Delta t} \tag{2.4.43}$$

$$\dot{W}=\frac{W^{n+1}-W^{n}}{\Delta t} \tag{2.4.44}$$

则式(2.4.24)和式(2.4.25)可写为

$$M\frac{Q^{n+1}-Q^{n}}{\Delta t}+SP^{n}-W^{n}=0 \tag{2.4.45}$$

$$\frac{W^{n+1}-W^{n}}{\Delta t}+M^{B}\frac{Q^{n+1}-Q^{n}}{\Delta t}+S^{B}P^{n+1}=0 \tag{2.4.46}$$

由此可得

$$MQ^{n+1}=MQ^{n}-\Delta tSP^{n}+W^{n}\Delta t \tag{2.4.47}$$

$$P^{n+1}=P^{n}+Q^{n+1}\Delta t \tag{2.4.48}$$

$$W^{n+1}=W^{n}-M^{B}(Q^{n+1}-Q^{n})-S^{B}P^{n+1}\Delta t \tag{2.4.49}$$

此差分方程按初始条件 $P^{0}=Q^{0}=W^{0}=0$ 即可求出 Q^{n+1},P^{n+1}及 W^{n+1}。

2.5 边界条件的讨论

在利用波动方程进行数值模拟时,我们看到除了解方程之外,还必须对边界进行适当的处理。这是由于我们的方程适用于无限介质,而我们用计算机模拟时,介质的范围必是有限的,即人为地限定地质体是有限的介质或者说在介质之内,地层的各种参数不为零,而在介质之外各参数均为零,这就人为地设置了边界,波在通过这些边界时,就会产生反射,干扰了有效波的信息,我们必须消除这种人工界面所产生的反射等干扰。我们必经消除这些干扰,这就要适当的边界处理方法。

2.5.1 透明边界条件

我们在 2.2.1 简单地介绍了 Reynolds(1978)的透明边界,现在给以较详细的说明。前面已经讲过,对于具有某初值条件的波动方程

$$\frac{\partial^{2}P}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}P}{\partial z^{2}}=\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}P}{\partial t^{2}} \tag{2.5.1}$$

如给定边界条件

$$P(\pm a, z, t)=0, P(x, b, t)=0 \tag{2.5.2}$$

或
$$\frac{\partial P}{\partial x}(\pm a, z, t)=0, \frac{\partial P}{\partial z}(x, b, t)=0 \tag{2.5.3}$$

时,则平面波

$$P=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx\cos\theta\pm kz\sin\theta)} \tag{2.5.3}$$

将在 $x=a$ 及 $x=-a$ 及 $z=b$ 处产生反射波,例如在 $x=a$ 处波场为

$$P=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx\cos\theta\pm kz\sin\theta)}+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kx\cos\theta\pm kz\sin\theta)} \tag{2.5.4}$$

其中 θ 是平面波前与 x 轴之间的夹角。R 是边界产生的反射波的反射系数。

由于
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}$$
$$=\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\right]-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \tag{2.5.5}$$

当取 $\theta=0$ 时波仅在水平方向传播,有

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}=0 \tag{2.5.6}$$

在 $x=a$ 处若

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0 \tag{2.5.7}$$

则由(2.5.5)式可取

$$\frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \tag{2.5.8}$$

类似地在 $x=-a$ 处取

$$\frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial x}=0 \tag{2.5.9}$$

把式(2.5.4)代入式(2.5.8)或式(2.5.9)得

$$R=0$$

这时在边界 $x=a$ 及 $x=-a$ 处不产生反射。

若 θ 不为零,我们仍取式(2.5.8)及式(2.5.9)作为边界条件,把式(2.5.4)代入式(2.5.8)或式(2.5.9)后得

$$R_1(\theta)=|R|=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \tag{2.5.10}$$

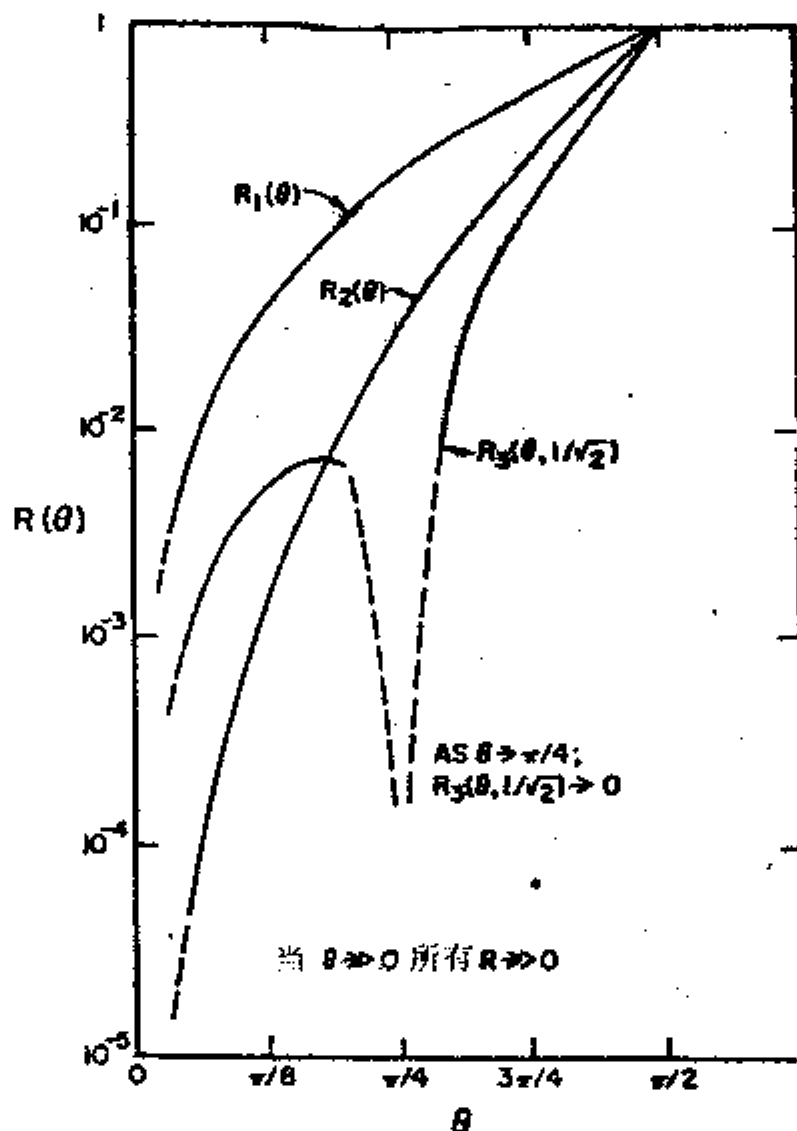
$R_1(\theta)$(见图 2.5.1),在 θ 从 0 到 $\frac{\pi}{4}$ 都是很小的。我们把式(2.5.8)及式(2.5.9)叫做 RⅠ类边界条件。

若取
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\doteq\frac{\partial}{\partial x}\left(I+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big/\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{2.5.11}$$

在边界上同样令

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)P=\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]P=0$$

并在 $x=a$ 时取



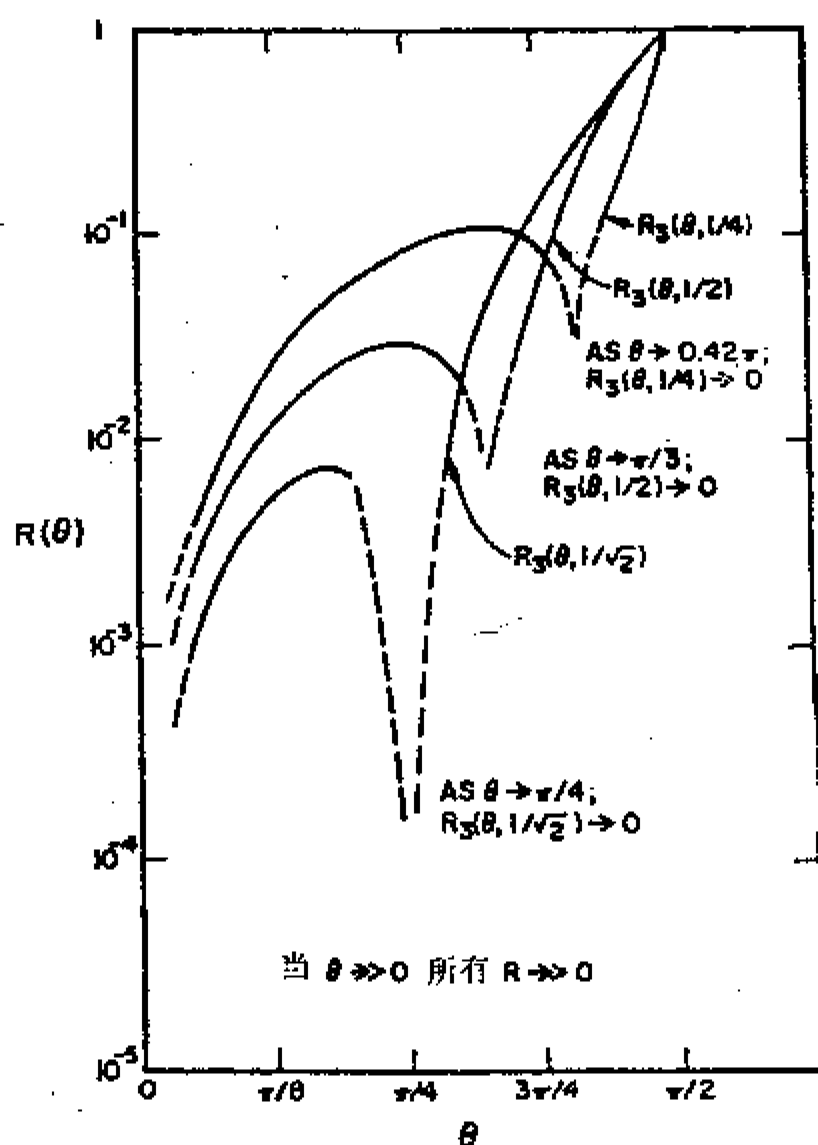


图 2.5.1　三种边界条件下的反射系数(Reynolds)　　图 2.5.2　R_3 在 S 处取不同值时的反射系数(Reynolds)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\ \frac{\partial P}{\partial t}\right)+\frac{\partial^{P}}{\partial x^{2}}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^{2} P}{\partial z^{2}}=0 \tag{2.5.12}$$

在 $x=-a$ 时取

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\ \frac{\partial P}{\partial t}\right)-\frac{\partial^{2} P}{\partial x^{2}}-\frac{1}{2}\ \frac{\partial^{2} P}{\partial z^{2}}=0 \tag{2.5.13}$$

把式(2.5.4)代入式(2.5.12)及式(2.5.13)得

$$R_{2}(\theta)=|R|=\frac{\left|1-\cos\theta-\frac{1}{2}\sin^{2}\theta\right|}{\left|1+\cos\theta-\frac{1}{2}\sin^{2}\theta\right|} \tag{2.5.14}$$

反射系数 $R_2(\theta)$见图 2.5.1,可以看到 θ 从 0 到$\frac{\pi}{3}$都是很小的,由式(2.5.12)及式(2.5.13)所确定的边界条件叫 RⅡ。

以上两种边界条件都有较小的边界反射,但尚不能与有限差分法的稳定性联系在一起。如果我们把式(2.5.12)或式(2.5.13)中$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$系数$\frac{1}{2}$看成是由$\frac{s}{1+s}$构成的,其中 $s=c\cdot\Delta t/\Delta x$,$\frac{1}{2}$是 $s=1$ 时的特例,则式(2.5.12)可写为

$$\frac{1}{c}\ \frac{\partial^{2} P}{\partial x \partial t}+\frac{\partial^{2} P}{\partial x^{2}}+\left(\frac{s}{1+s}\right) \frac{\partial^{2} P}{\partial z^{2}}=0 \tag{2.5.15}$$

把式(2.5.4)代入式(2.5.15)后得

$$R_3(\theta,s)=|R|=\frac{\left|1-\cos\theta-\dfrac{1}{1+s}\sin^2\theta\right|}{\left|1+\cos\theta-\dfrac{1}{1+s}\sin^2\theta\right|} \tag{2.5.16}$$

我们知道波动方程的二阶显式有限差分方程的稳定性条件是

$$s=\frac{c\cdot\Delta t}{\Delta x}<\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.5.17}$$

$R_3\left(\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $R_3\left(\theta,\frac{1}{2}\right)$及 $R_3\left(\theta,\frac{1}{4}\right)$的情况见图2.5.2,可见我们可以比较容易获得既可满足无反射的边界条件又很稳定的差分格式。下面作进一步的化简,由波动方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{2.5.18}$$

把式(2.5.18)代入式(2.5.15)并乘以$(1+s)$可以得到

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+s\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0,\quad x=a\text{ 时} \tag{2.5.19}$$

分解后即得

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)P=0 \tag{2.5.20}$$

类似地可求得 $x=-a$ 时的边界条件为

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)P=0,\quad x=a\text{ 时} \tag{2.5.21}$$

$z=b$ 时的边界条件为

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)P=0 \tag{2.5.22}$$

在 $z=0$ 处仍令 $P=0$,这就是透明边界条件。

2.5.2 吸收边界条件

Clayton 和 Engquist(1980)提出了三种边界条件,

$$\text{B1}:\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{b}{v}\frac{\partial P}{\partial t}=0 \tag{2.5.23}$$

$$\text{B2}:\frac{\partial P}{\partial z}-b\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{a}{v}\frac{\partial P}{\partial t}=0 \tag{2.5.24}$$

$$\text{B3}:\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial t}+cv\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}-b\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial t}-\frac{a}{v}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0 \tag{2.5.25}$$

其中 v 是波的传播速度,a,b,c 是参数,以上是右边的边界条件,在左边的边界条件,只要把式(2.5.23),式(2.5.24)和式(2.5.25)中的 b 及 c 换为相应的 $-b$, $-c$ 即可。

仍以简谐波为例,我们可以得到 B1,B2 及 B3 相应条件下的反射系数

$$\text{B1}:R_1=|R|=\frac{|\sin\theta-b|}{|\sin\theta+b|} \tag{2.5.26}$$

$$\text{B2}:R_2=|R|=\frac{|-\cos\theta+a-b\sin\theta|}{|-\cos\theta+a+b\sin\theta|} \tag{2.5.27}$$

$$
\text{B3}: R_3 = |R| = \frac{\left| -\cos\theta + \dfrac{a - b\sin\theta}{1 - c\sin\theta} \right|}{\left| -\cos\theta + \dfrac{a + b\sin\theta}{1 + c\sin\theta} \right|} \tag{2.5.28}
$$

如在 B1 中取 $b=\frac{1}{2}$，在 B2 中取 $a=1, b=2-\sqrt{3}$，在 B3 中取 $a=1, b=1, c=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，其曲线见图 2.5.3。这里需要说明的是 θ 是入射角，是当 x 取水平向右方向，z 取向上方向时，θ 是射线与 z 的负方向间的夹角。

图 2.5.4 是用 45°波动方程计算的波的传播过程，点源位于图上部的中间位置，两边用的是零斜率的 Neumann 条件，即带有人工边界条件，可能看到下部存在严重的边界反射。图 2.5.5 仍是用 45°波动方程计算的波的传播过程，与图 2.5.4 各种条件一样，只是边界用了 B1 型的吸收边界条件，可以看到大量的边界反射消失了，但下部还有微小的边界反射干扰，这是大角度入射产生的。图 2.5.6 是用 B3 型边界条件计算的波场，除边界条件外，其余与图 2.5.5 一样，可以看到所有的边界反射，几乎全都消失了。

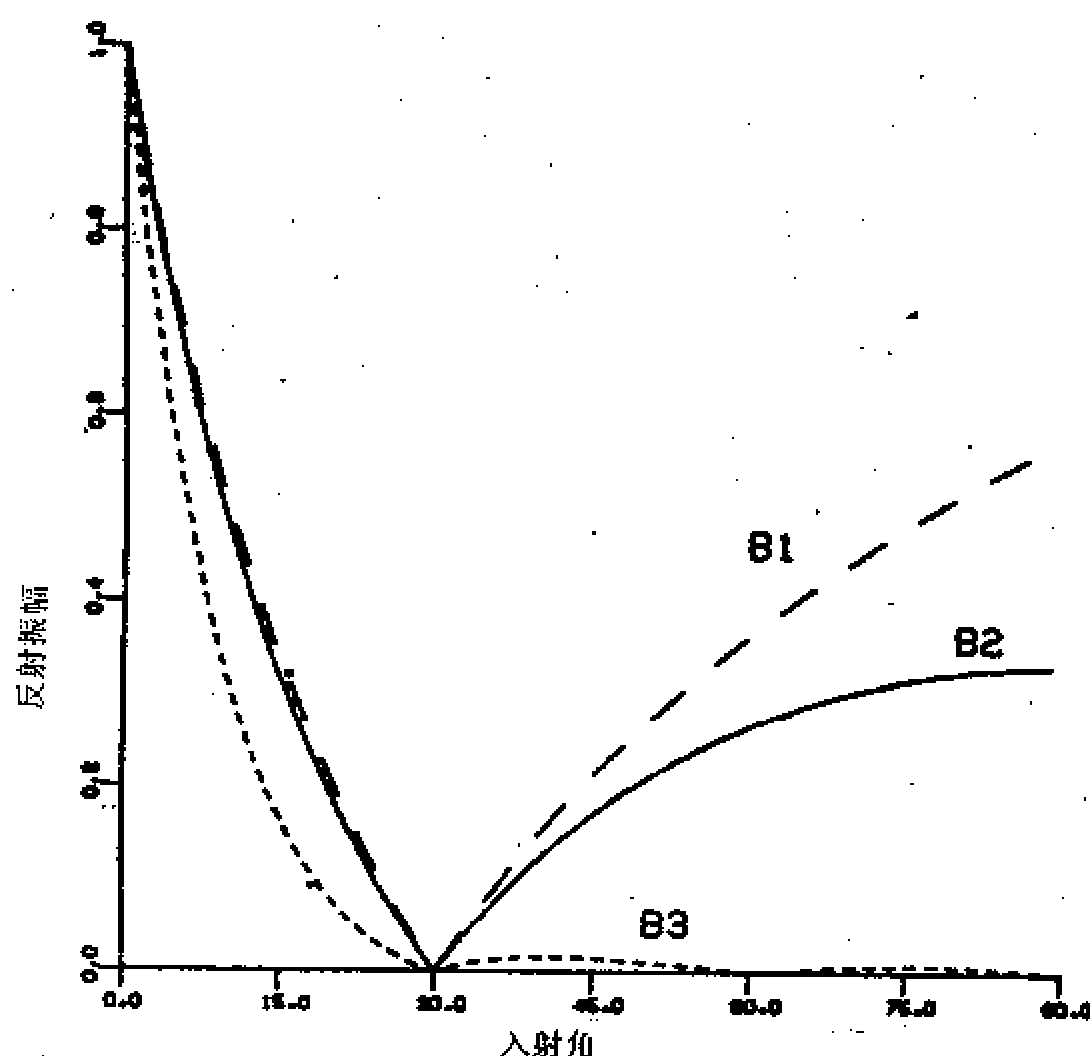


图 2.5.3　三种边界条件下的反射系数(Clayton 等)

2.5.3　弹性波模拟中的透明边界条件

和标量方程类似，我们也可用傍轴方程来近似地表示弹性波方程，我们的目的不是来近似弹性波方程，而是了解傍轴近似方程的物理意义，利用它们作为边界条件。为了方便推导，我们把均匀各向同性介质中的弹性波方程写为下面的形式：

$$
\boldsymbol{U}_{tt} = \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{U}_{xx} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{U}_{xz} + \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{U}_{zz} \tag{2.5.29}
$$

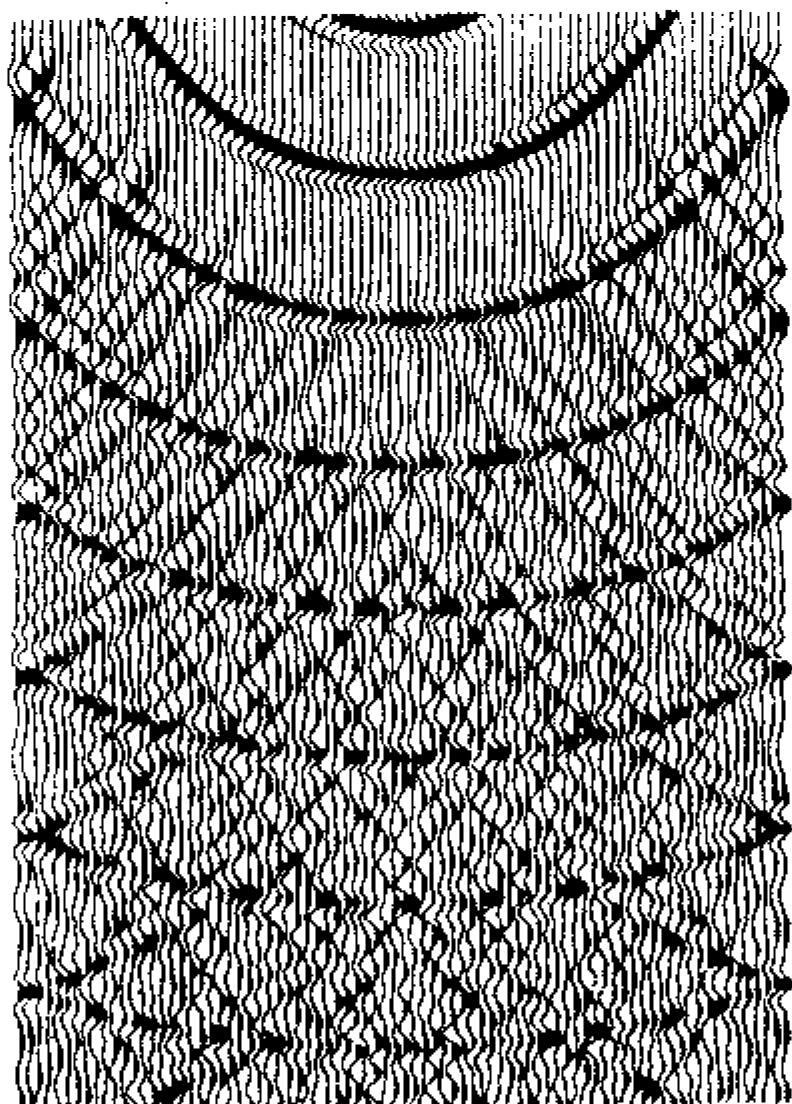


图 2.5.4　45°方程，零边界条件，下面存在严重的边界反射(Clayton 等)

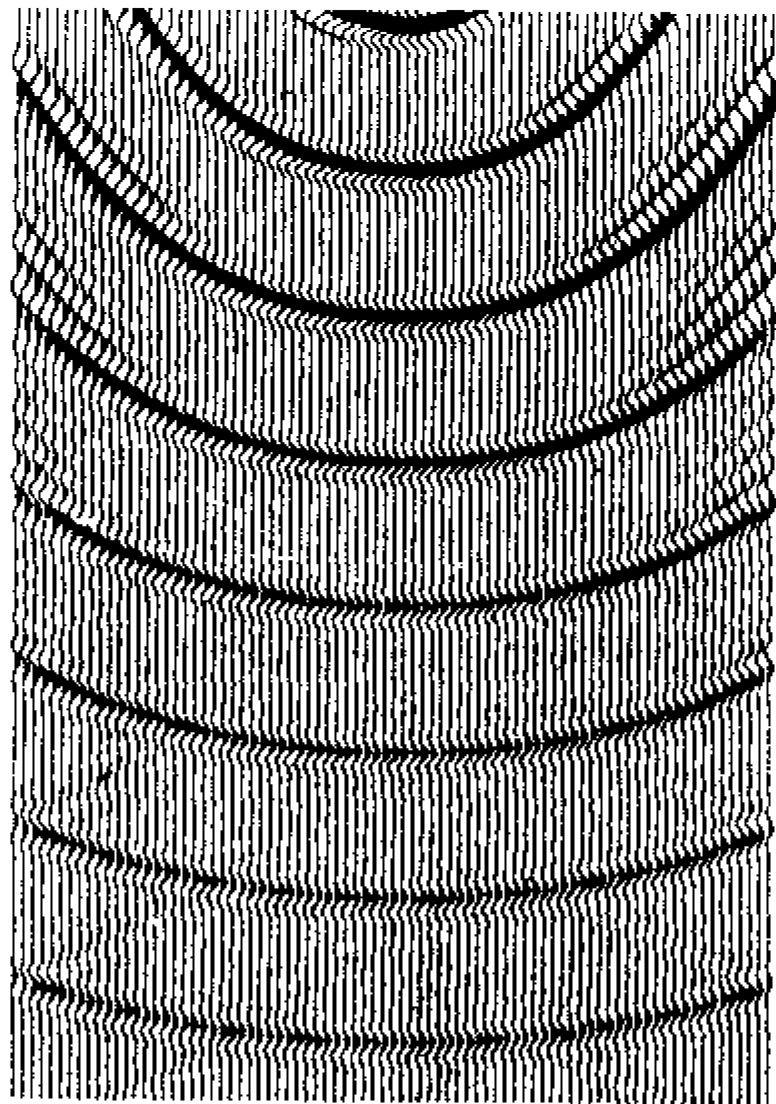


图 2.5.5　各种条件与图 2.5.4 同，唯边界条件选用 B1，可以看到边界反射变得很弱(Clayton 等)

其中　$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u\\w\end{pmatrix}$，$u$ 为水平位移，w 为垂直位移。

$$D_1=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\0 & \beta^2\end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix}\beta^2 & 0\\0 & \alpha^2\end{pmatrix},H=(\alpha^2-\beta^2)\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{2.5.30}$$

α,β 分别为纵波和横波的速度。

仿照前面的边界条件式(2.5.23)及式(2.5.25)，我们考虑垂直方向的两种傍轴近似

$$\mathrm{A1}:\boldsymbol{U}_z+B_1\boldsymbol{U}_t=0 \tag{2.5.31}$$

$$\mathrm{A2}:\boldsymbol{U}_{tz}+C_1\boldsymbol{U}_{tt}+C_2\boldsymbol{U}_{tx}+C_3\boldsymbol{U}_{xx}=0 \tag{2.5.32}$$

在 A2 中 C_2 这一项说明 u 与 w 的相互偶合。

这两边方程都描述了波只能向下传播，不能向上传播，用它们当作下底面边界的条件，能量只向下传，不能反射回来。

如果选用 A1 作为边界条件，则在边界上方程式(2.5.29)及式(2.5.31)均成立，从中可以求得

$$B_1=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\beta} & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{1}{\alpha}\end{pmatrix} \tag{2.5.33}$$

如果选用 A2 作为边界条件，则在边界上式(2.5.29)和式(2.5.32)成立，从中可以解出

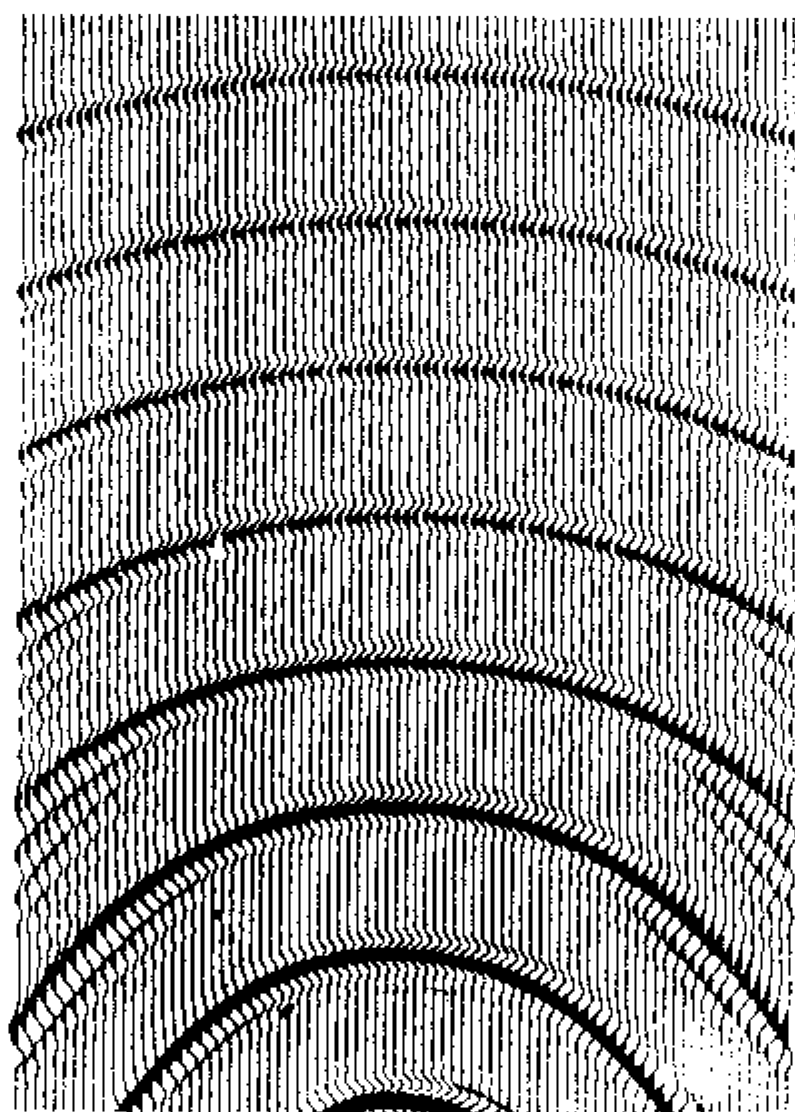


图 2.5.6 各种条件与图 2.5.4 同，唯边界条件选用 B3，边界反射全部消失（Clayton 等）

$$
C_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta} & 0\\ 0 & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}
$$

$$
C_2=(\beta-\alpha)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\beta}\\ \frac{1}{\alpha} & 0\end{pmatrix} \tag{2.5.34}
$$

$$
C_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta-2\alpha & 0\\ 0 & \alpha-2\beta\end{pmatrix}
$$

以上是底面的边界条件，对于两侧的边界，我们只要把式(2.5.31)及式(2.5.32)中的 x 和 z 交换一下即可。

下面我们以差分形式给出四个边界的边界条件，这里地面及底面分别用 $k=0$ 及 $k=K$ 来表示，左边界及右边界用 $n=0$ 及 $n=N$ 来表示，则地面的边界条件为

$$
D_{+}^{z}D_{0}^{t}U_{j,0}^{n}-\frac{1}{2}C_1D_{+}^{t}D_{-}^{t}(U_{j,0}^{0}+U_{j,1}^{n})-\frac{1}{2}C_2D_{+}^{t}D_{0}^{x}(U_{j-1,0}^{n}+U_{j,1}^{n})
$$

$$
-\frac{1}{2}C_3D_{+}^{x}D_{-}^{x}(U_{j-1,0}^{n}+U_{j+1,1}^{n})=0 \tag{2.5.35}
$$

底面的边界条件($k=K$)

$$
D_{-}^{z}D_{0}^{t}U_{j,k}^{n}+\frac{1}{2}C_1D_{+}^{t}D_{-}^{t}(U_{j,k}^{n}+U_{j,k-1}^{n})+\frac{1}{2}C_2D_{+}^{t}D_{0}^{x}(U_{j-1,k}^{n}+U_{j,k-1}^{n})
$$

$$+\frac{1}{2}C_3D_+^xD_-^x(U_{j-1,k}^n+U_{j+1,k-1}^n)=0 \tag{2.5.36}$$

左边界的边界条件($n=0$)

$$D_+^xD_0^tU_{j,k}^0-\frac{1}{2}C_1D_+^tD_-^t(U_{j,k}^0+U_{j,k}^1)-\frac{1}{2}C_2D_+^tD_0^z(U_{j-1,k}^0+U_{j,k}^1)$$
$$-\frac{1}{2}C_3D_+^zD_-^z(U_{j-1,k}^0+U_{j+1,k}^1)=0 \tag{2.5.37}$$

右边界的边界条件($n=N$)

$$D_-^xD_0^tU_{j,k}^N+\frac{1}{2}C_1D_+^tD_-^t(U_{j,k}^N+U_{j,k}^{N-1})+\frac{1}{2}C_2D_+^tD_0^z(U_{j-1,k}^N+U_{j,k}^{N-1})$$
$$+\frac{1}{2}C_3D_+^zD_-^z(U_{j-1,k}^N+U_{j+1,k}^{N-1})=0 \tag{2.5.38}$$

其中

$$U_{j,k}^n=U(t_j,z_k,x_n) \tag{2.5.39}$$

D_+^q,D_-^q,D_0^q 分别为对 q 变量的向前差分,向后差分及中心差分,例如

$$D_+^zU_{j,k}^n=\frac{1}{\Delta z}\begin{pmatrix}u_{j,k+1}^n-u_{j,k}^n\\ w_{j,k+1}^n-w_{j,k}^n\end{pmatrix} \tag{2.5.40}$$

$$D_-^zU_{j,k}^n=\frac{1}{\Delta z}\begin{pmatrix}u_{j,k}^n-u_{j,k-1}^n\\ w_{j,k}^n-w_{j,k-1}^n\end{pmatrix} \tag{2.5.41}$$

$$D_0^zU_{j,k}^n=\frac{1}{2\Delta z}\begin{pmatrix}u_{j,k+1}^n-u_{j,k-1}^n\\ w_{j,k+1}^n-u_{j,k-1}^n\end{pmatrix} \tag{2.5.42}$$

这里 $u_{j,k}^n=u(t_j,z_k,x_n)$及 $w_{j,k}^n=w(t_j,z_k,x_n)$。

最后,对这种矩形边界上的四个角点也要作适当处理,这四个角点,可用旋转 45°的 $A1$ 边界条件来处理,例如对右下角的角点(K,N)可按如下处理

$$U_z+U_x+MU_t=0 \tag{2.5.43}$$

其中

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix} \tag{2.5.44}$$

差分形式为

$$(D_-^z+D_-^x+MD_-^t)u_{j,k}^n(k,n)=(K,N-1),(K-1,N),(K,N) \tag{2.5.45}$$

Stacey(1988)对 Clayton 和 Enguist 的边界条件作了改进。其中一个是更稳定的边界条件,另一个更精确的边界条件,这两个边界条件更受到广泛的重视,这个更稳定的边界条件为

$$\begin{aligned}u_{zt}&=-\frac{1}{\beta}u_{tt}+\frac{\alpha}{\beta}(\alpha-\beta)w_{xz}+\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)u_{xx}\\ w_{zt}&=-\frac{1}{\alpha}w_{tt}+\frac{\beta}{\alpha}(\alpha-\beta)u_{xz}+\left(\frac{\beta^2}{\alpha}-\beta+\frac{1}{2}\alpha\right)w_{xx}\end{aligned} \tag{2.5.46}$$

而更精确的边界条件为

$$u_{zt} = -\beta u_{zz} + (\beta - \alpha) w_{xz} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) u_{xx}$$

$$w_{zt} = -\frac{1}{\alpha} w_{tt} - \frac{(\alpha - \beta)}{(2\alpha - \beta)} u_{tx} + \frac{\beta(\alpha + \beta)^2}{\alpha(2\alpha - \beta)} u_{xz} + \left(\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha\beta}{2(\beta - 2\alpha)}\right) w_{xx} \qquad (2.5.47)$$

以上的两个边界条件都是对 $z = b$ 的。

Mahrer(1990)对 Clayton 和 Engquist 的 A2 边界条件及 Stacey 的稳定边界条件式(2.5.46)进行了试验,除大家熟知的,即 Stacey 边界条件比 Clayton 和 Engquist 边界条件适用于范围更大的泊松比以外,还可以看到 Stacey 的式(2.5.46)边界条件具有更高的稳定性及透明性。

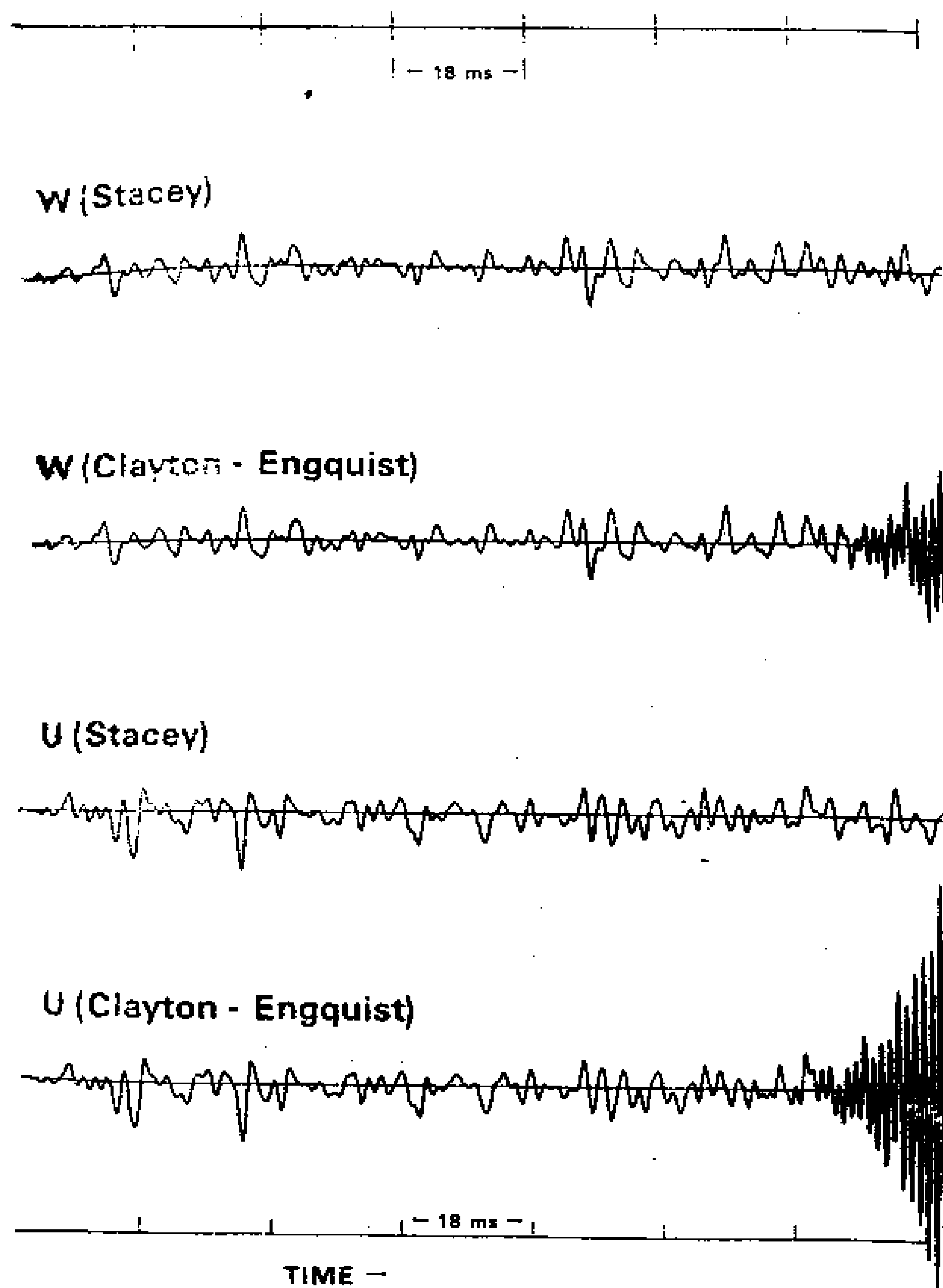


图 2.5.7 Clayton-Engguist 和 Stacey 边界条件对比

在一块 97×97 的网格上(网格为 1m×1m)计算由一组微震源产生的合成记录。震源组发生在由格点(16,38),(16,58),(34,58),(34,38)组成的矩形内(原点在(1,1)处),在每个时

间步长内有 10~20 个微震源被激发，一组震源周期为 13 个时间步长。图 2.5.7 是格点(50, 59)上的记录，w 是横向，u 是纵向，括号中的 Stacey 是指用的是 Stacey 稳定边界条件，括号中 Clayton-Engquist 是指用的是 Clayton-Engquist 边界条件。两者仅是边界条件不同，其他参数完全一样。约在 700 个时间步长(每个时间步长为 0.159ms)即 110ms 以后，在 Clayton-Engquist 边界条件下记录出现了不稳定现象，在 Stacey 边界条件下，仍然是稳定的。

2.6 射线追踪正演模拟

射线追踪也是地球物理正、反演中的一个重要方法，在正演模拟、地震偏移、地震层折成像中均有重要应用。

2.6.1 程函方程的意义

对波动方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P \tag{2.6.1}$$

其中 P 为质点位移，c 为速度，我们作关于 t 的 Fourier 变换，则得到

$$-w^2 \hat{P} = c^2 \nabla \hat{P} \tag{2.6.2}$$

其中 w 为角频率，而

$$\hat{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} P \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt} \mathrm{d}t \tag{2.6.3}$$

方程(2.6.3)的平面波解具有如下的形式

$$\hat{P} = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{2.6.4}$$

其中 A 为振幅，Φ 为相位

$$\Phi = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} \tag{2.6.5}$$

$\boldsymbol{K}$ 是波数向量，$\boldsymbol{r}$ 质点位置，且

$$|\boldsymbol{K}| = k = \left| \frac{w}{c} \right| \tag{2.6.6}$$

以上是在假设 c 是常速度的情况下得到的。

现在假设 c 是空间可变的，但是变化非常缓慢，以致下面的波动方程仍然成立

$$-w^2 p = c^2(\boldsymbol{r}) \nabla^2 P \tag{2.6.7}$$

这个假设是以 c 变化很缓慢，所以 $\nabla c(\boldsymbol{r})$ 很小，以致忽略不计。方程(2.6.7)就是 Helmholtz 方程。

现在来看如果方程(2.6.7)有下面的平面波解

$$P = A(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\boldsymbol{r})} \tag{2.6.8}$$

那么 $A(\boldsymbol{r})$ 和 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 应满足什么条件呢？我们假设 $A(\boldsymbol{r})$ 是个缓慢的实函数，表示平面波的振幅，$\Phi(\boldsymbol{r})$ 也是实函数，表示平面波的广义相位，这里 P 是频率域里的函数。把式(2.6.8)代入式(2.6.7)得

$$-w^2 A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} = c^2[\nabla^2 A - (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) A] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} + \mathrm{i}c^2(2\nabla A \cdot \nabla \Phi + A \nabla^2 \Phi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{2.6.9}$$

对比两边的实、虚部得

$$-w^2A = c^2[\nabla^2A - A(\nabla\Phi)^2] \tag{2.6.10}$$

或

$$(\nabla\Phi)^2 = \frac{w^2}{c^2} + \frac{\nabla^2A}{A} \tag{2.6.11}$$

及

$$\nabla^2\Phi + 2\nabla\log A\cdot\nabla\Phi = 0 \tag{2.6.12}$$

对式(2.6.11),由于我们已假设 $A(\boldsymbol{r})$是个缓变的函数,因此∇^2P 很小,与$\frac{w^2}{c^2}$相比可以忽略,特别是在高频的情况下如此,这样得到

$$(\nabla\Phi)^2 = \frac{w^2}{c^2} \tag{2.6.13}$$

对于 c 是常量时,A 是常数,上式是精确的。式(2.6.13)就叫做程函方程。这是一个一阶二次的常微分方程,其解是波的相曲面,由较高的频率和波速而决定,或者由局部波数($w/c(\boldsymbol{r})$)而决定。由下式

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) &= Ae^{i[\Phi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta})]} \\ &= Ae^{i[\Phi(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\delta}\cdot\nabla\Phi(\boldsymbol{r})]} \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

其中 A 的变化忽略不计,可以看到波在传播中相位的变化与介质的局部速度之间的关系。

方程(2.6.12)叫做输运方程,它反映了振幅与相位之间的关系,事实上,如果 Φ 从程函方程解出,这样缓变的振幅 A 也就可由式(2.6.12)求得了。

2.6.2 射线方程

我们现在利用费尔马原理和变分原理来推出射线方程,设波从 A 点沿某射线传播到 B 点所用的旅行时为 t,则

$$t = \int_{\text{ray path}} s(\boldsymbol{r}(\mu))\mathrm{d}\sigma(\mu) \tag{2.6.15}$$

其中 $s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c(\boldsymbol{r})}$,叫做慢度,$\mu$ 是个参数沿射线而增加,σ 表示弧长且有

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}\mu = |\dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}\mu \tag{2.6.16}$$

$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 是分别对 σ 的导数。如果换对 μ 的积分,则有

$$t = \int_{\mu(A)}^{\mu(B)} s(\boldsymbol{r})|\dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}\mu \tag{2.6.17}$$

$$= \int_{\mu(A)}^{\mu(B)} f(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}u \tag{2.6.18}$$

其中$f = s\cdot|\dot{\boldsymbol{r}}|$,费尔马原理告诉我们,波是沿具有最小旅行时的那条射线路径,即 t 的变分必为零,那

$$\delta t = \int_{\mu(A)}^{\mu(B)} [\nabla_r f\cdot\delta\boldsymbol{r} + \nabla_{\dot{r}} f\delta\dot{\boldsymbol{r}}]\mathrm{d}\mu = 0 \tag{2.6.19}$$

由分部积分有

$$\delta t = \int_{\mu(A)}^{\mu(B)} \left[\nabla_r f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\nabla_{\dot{r}} f\right]\cdot\delta\boldsymbol{r}\mathrm{d}\mu = 0 \tag{2.6.20}$$

所以

$$\nabla_r f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\nabla_{\dot{r}} f = 0 \tag{2.6.21}$$

这就是变分的欧拉方程,由于 $f = |\dot{\boldsymbol{r}}|$,我们有

$$\nabla_r f = |\dot{\boldsymbol{r}}|\nabla s \tag{2.6.22}$$

$$\nabla_{\dot{r}} f = s\dot{\boldsymbol{r}}/|\dot{\boldsymbol{r}}| \tag{2.6.23}$$

注意到 $\mathrm{d}\sigma = |\dot{\boldsymbol{r}}|\mathrm{d}\mu$,把式(2.6.22),(2.6.23)代入式(2.6.21)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(s\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \nabla s \tag{2.6.24}$$

这就是射线应满足的方程。

2.6.3 射线方程的解

现在我们讨论射线方程(2.6.24)的解法,方程(2.6.24)也叫做渐近射线方程,因为它与程函方程(2.5.13)是一致的,波的频率越高越精确。方程(2.6.24)是个常微分方程,我们把射线看作是弧长 σ 的函数,这样射线的切线就是

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\sigma} \tag{2.6.25}$$

现在把 s 仍换成$\frac{1}{c(\boldsymbol{r})}$,式(2.6.24)就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{1}{c(\boldsymbol{r})}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \nabla\left(\frac{1}{c(\boldsymbol{r})}\right) \tag{2.6.26}$$

其中 $c(\boldsymbol{r})$是介质的速度,经过两次积分,可得

$$\boldsymbol{r}(\sigma) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\tau}_0\int_0^\sigma \frac{c(\boldsymbol{r}')}{c(\boldsymbol{r}_0)}\mathrm{d}\sigma + \int_0^\sigma c(\boldsymbol{r}')\int_0^{\sigma'}\nabla_{r''}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{r}'')}\right]\mathrm{d}\sigma''\mathrm{d}\sigma' \tag{2.6.27}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是震源相对于原点(即 $\sigma = 0$ 时)的位置,$\boldsymbol{\tau}_0$ 是在 $\sigma = 0$ 时的射线方向上的单位向量。这就是线性的渐近射线。这是一个一般的积分表达式,表示射线的轨迹。而其长度则为

$$l = \int_0^\sigma |\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}')|\mathrm{d}\sigma' \tag{2.6.28}$$

旅行时则为

$$t(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}')|}{c(\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\sigma' \tag{2.6.29}$$

2.6.4 具有定常速度梯度的情形

如果在某区域内,速度是具有定常速度梯度的情形,这时我们可得到更具体的表达式,设速度场如下

$$c(\boldsymbol{r}) = c_* + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r} \tag{2.6.30}$$

其中 c_* 是原点处的速度,$\boldsymbol{\lambda}$ 是速度梯度$\nabla_r(c(\boldsymbol{r}))$,$c(\boldsymbol{r})$的倒数即为

$$\frac{1}{c(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{c_* + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{1}{c_*}\frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}{c_*}} \tag{2.6.31}$$

当$\left|\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}{c_*}\right|<1$时可展为下式

$$\frac{1}{c_*+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}=\frac{1}{c_*}\left[1-\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}{c_*}+\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}{c_*}\right)^2\right] \tag{2.6.32}$$

因而有

$$\nabla_r\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{r})}\right]=\frac{1}{c_*}\left[-\frac{\boldsymbol{\lambda}}{c_*}+\frac{2\boldsymbol{\lambda}}{c_*}\frac{(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r})}{c_*}\right] \tag{2.6.33}$$

把式(2.6.30),(2.6.33)代入式(2.6.27)并积分得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\sigma)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\tau}_0\sigma\left[1+\frac{\sigma}{2c_*}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)\left(1\cdot\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}_0}{c_*}\right)\right]\\ -\frac{\boldsymbol{\lambda}\sigma^2}{2c_*}\left(1-\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}_0}{c_*}\right)-\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{6c_*^2}\sigma^3[|\boldsymbol{\lambda}|^2-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)^2]\end{aligned} \tag{2.6.34}$$

此式精确到$\left|\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}{c_*}\right|^2$,$|\boldsymbol{\lambda}|$不能太大或$|\boldsymbol{r}|$也不能太大,即当速度梯形的模大时,格点要取得不能太大。如果把射线进入某网格时的速度记为c_0,式(2.6.43)又可简化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\sigma)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\tau}_0\sigma\left[1+\frac{\sigma}{2c_0}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)\right]\\ -\frac{\boldsymbol{\lambda}\sigma^2}{2c_0}-\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{6c_0}\sigma^3[|\boldsymbol{\lambda}|^2-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)^2]\end{aligned} \tag{2.6.35}$$

这就是用弧长来计算射线$\boldsymbol{r}(s)$的公式。对式(2.6.35)求导得

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma)=\boldsymbol{\tau}_0\left[1+\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0}{c_0}\sigma\right]-\frac{\boldsymbol{\lambda}\sigma}{c_0}-\frac{\boldsymbol{\tau}_0\cdot\sigma^2}{2c_0^2}[|\boldsymbol{\lambda}|^2-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)^2] \tag{2.6.36}$$

旅行时$t(\sigma)$按式(2.6.29)及$|\boldsymbol{\tau}(\sigma)|=1$有

$$t(\sigma)=\frac{1}{c_*}\int_0^\sigma\left[1-\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}'}{c_*}\right)+\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}'}{c_*}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma' \tag{2.6.37}$$

经积分及类似式(2.6.34)及式(2.6.35)的处理得

$$t(\sigma)=\frac{s}{c_0}\left\{1+\frac{s^2}{6c_0^2}[|\boldsymbol{\lambda}|^2+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)^2]-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0\frac{s}{2c_0}\right\} \tag{2.6.38}$$

以上各式对于2维及3维介质都是适用的。

2.6.5 初值问题

在实际进行射线追踪时,首先把介质用平行于坐标系的长方形进行分割,使每个长方形内为具有定常速度梯形区(用三角形分割也可),这些长方形应足够小,使其满足

$$\frac{|\boldsymbol{\lambda}|(a+b)}{c_0}\ll 1 \tag{2.6.39}$$

其中a,b分别为长方形的两个边长,这时式(2.6.35)、(2.6.36)及式(2.6.38)只取$\boldsymbol{\lambda}$的一次项,也具有较高的精度,这时它们分别为

$$\boldsymbol{r}(\sigma)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\tau}_0\sigma\left[1+\frac{\sigma}{2c_0}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)\right]-\frac{\boldsymbol{\lambda}\sigma^2}{2c_0} \tag{2.6.40}$$

$$\vec{n}(\sigma)=\boldsymbol{\tau}_0\left[1+\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0}{c_0}\sigma\right]-\frac{\boldsymbol{\lambda}\sigma}{c_0} \tag{2.6.41}$$

$$t(\sigma)=\frac{\sigma}{c_0}\left[1-\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0}{2c_0}\sigma\right] \tag{2.6.42}$$

如按 σ 的次数排列,式(2.6.40)可写为

$$\boldsymbol{r}(\sigma)=\frac{1}{2c_0}[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0\text{-}\boldsymbol{\tau}_0-\boldsymbol{\lambda}]\sigma^2+\boldsymbol{\tau}_0\sigma+\boldsymbol{r}_0 \tag{2.6.43}$$

这时要从射线的入射点计算射线的出射点,如图 2.6.1 设射线从 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0)$入射,从 $x=a$ 的一边出射,这时应有

$$a=\frac{1}{2c_0}[\tau_{0x}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)-\lambda_x]\vec{\sigma}^2+\tau_{0x}\sigma+r_{0x} \tag{2.6.44}$$

$\tau_{0x},\lambda_x,r_{0x}$分别为 $\boldsymbol{\tau}_0,\boldsymbol{\lambda}$ 及 $\boldsymbol{r}_0$ 在 x 轴上的分量,从中解出 σ,取正值,然后再代入下式

$$y_i=\frac{1}{2c_0}[\tau_{0x}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)-\lambda_y]\sigma^2+\tau_{0y}\sigma+r_{0y} \tag{2.6.45}$$

y_i 是出射点的 y 坐标,这样就可从初始点计算出射线路径。计算中要注意射线的各种可能,求取最小的正数 σ,那里才是真正的出射点。

对于反射界面,则要求它是连续光滑的,否则两点边值问题难于收敛。我们用一个三次样条函数表示在一个长方形单元内的反射界面

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3 \tag{2.6.46}$$

A,D,C,D 为常数,要求它与射线的交点,必须先求弧长 σ,把式(2.6.43)中 $\boldsymbol{r}(\sigma)$的 x 及 y 分量代入式(2.6.46)得

$$\begin{aligned}0=&[A+Bx_0+Cx_0^2+Dx_0^3-y_0]\\&+\sigma[\tau_{0x}(B+2Cx_0+3Dx_0^3)-\tau_{0y}]\\&+\sigma^2[\alpha(B+2Cx_0+3Dx_0^2)+\tau_{0x}^2(c+3Dx_0)-\beta]\\&+\sigma^3(\tau_{0x})[2\alpha(C+3Dx_0)+D\tau_{0x}^2]+\sigma^4[3D\alpha\tau_{0x}^2]\end{aligned} \tag{2.6.47}$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2c_0}[\tau_{0x}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)-\lambda_x] \tag{2.6.48}$$

$$\beta=\frac{1}{2c_0}[\tau_{0y}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\tau}_0)-\lambda_y] \tag{2.6.49}$$

这是关于 σ 的四次方程,为了简化可假设反射界面的变化不是很大,这样 C 和 D 就很小,我们最高只用 σ 的二次项就可以了。把求出的 σ 代入式(2.6.43)的 x 分量求出交点的 x 分量再用式(2.6.46)求得 y 分量。然后再以此为新的起点用初值问题的方法求反射的射线,它的初始方向由反射角等于入射角决定。

2.6.6 两点边值问题

应用中我们常常需要求震源到某个检波点的射线,这就是两点边值问题。一般是用插入射线的方法来解决,如果已有两条从震源出发的射线,其出射点一个超出给定检波点的位置,一个小于给定检波点的位置,见图 2.6.2,这时选新的射线使

$$\phi_n = \phi_1 + (x_r - x_1)\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \tag{2.6.50}$$

其中 ϕ_1 是出射点小于给定检波点位置的射线的入射角，ϕ_n 是新选的射线的入射角，直至出射点与给定检波点间的距离达到一个误差范围即可。这里新射线的选取方法会影响计算的速度，可用优选法例如 0.618 法。

图 2.6.3 是一个盐丘模型，盐丘右边是三个水平层，在盐丘之下有垂直断层。图 2.6.4 (a)绘出了零炮检距的射线。(b)是 x,t 域中的零炮检距射线的旅行时。

2.6.7 广义射线追踪

以上介绍的是渐近射线追踪，这种方法在计算中有一定局限性，例如丘散面上及射线的阴影区就失效了。Hanygd(1989,1993)，Hanyga 及 Helle(1995)提出了广义射线追踪算法，这是渐近射线方法的推广，这种方法关键使用了复射线及一致有效的渐近表达式，经过一些模型的试算和对比，结果甚至比差分法的精度还高。详细内容限于篇幅不再介绍，有趣者可参阅有关文献。

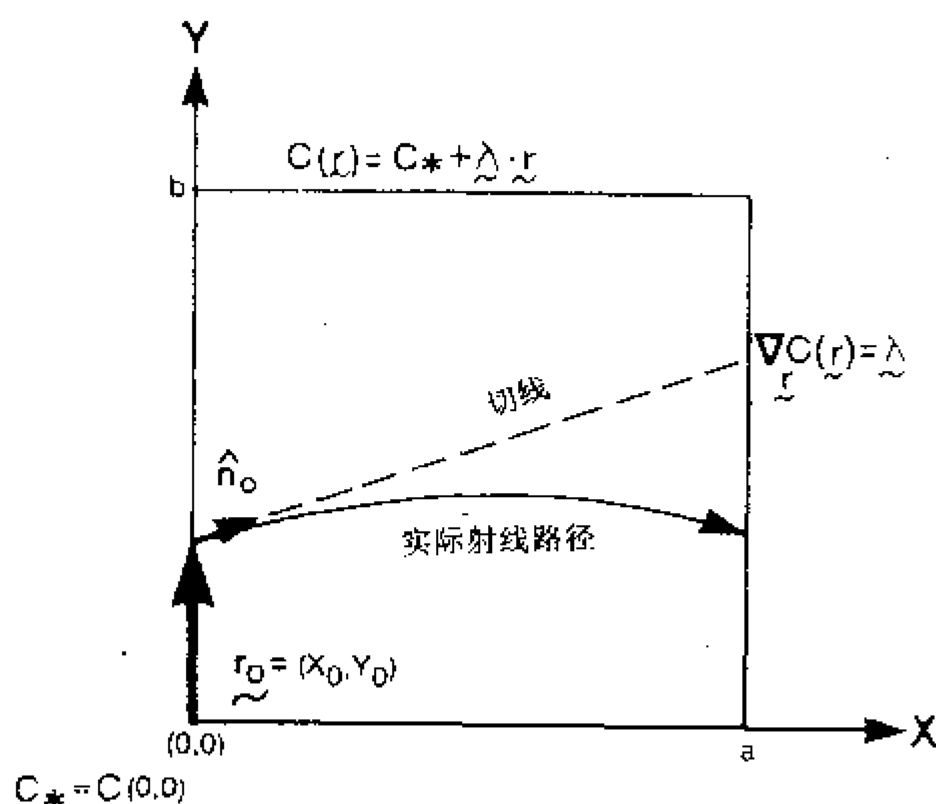


图 2.6.1 具有常速度梯度的射线穿过长方形单元的情形(Langan 等)

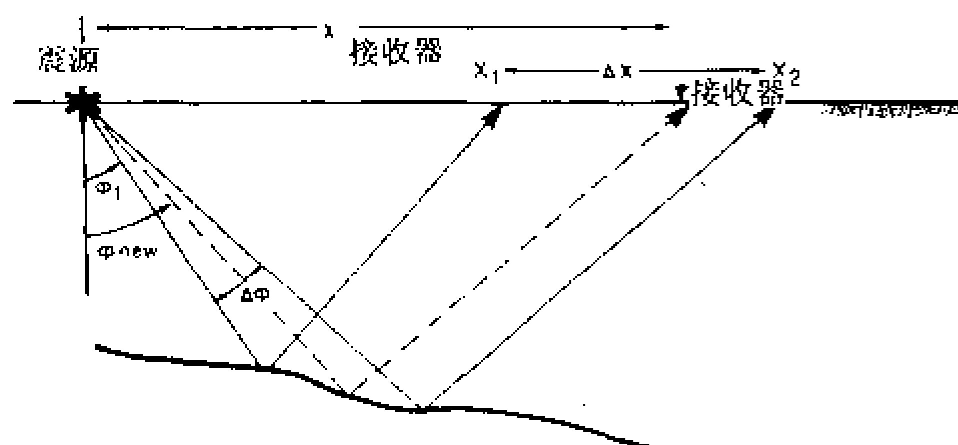


图 2.6.2 两点边值问题的插值方法

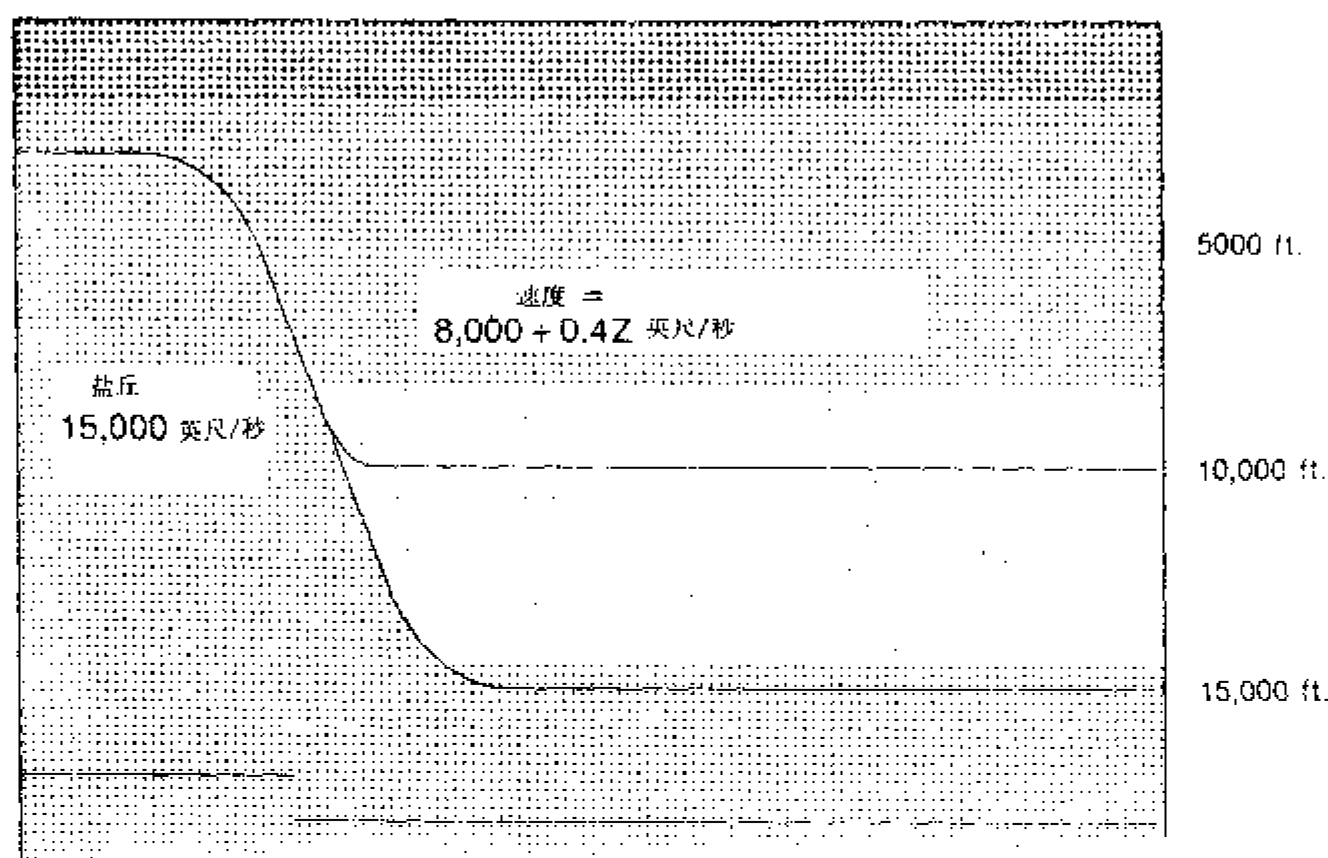


图 2.6.3　盐丘几何模型,速度已标出(Langan 等)

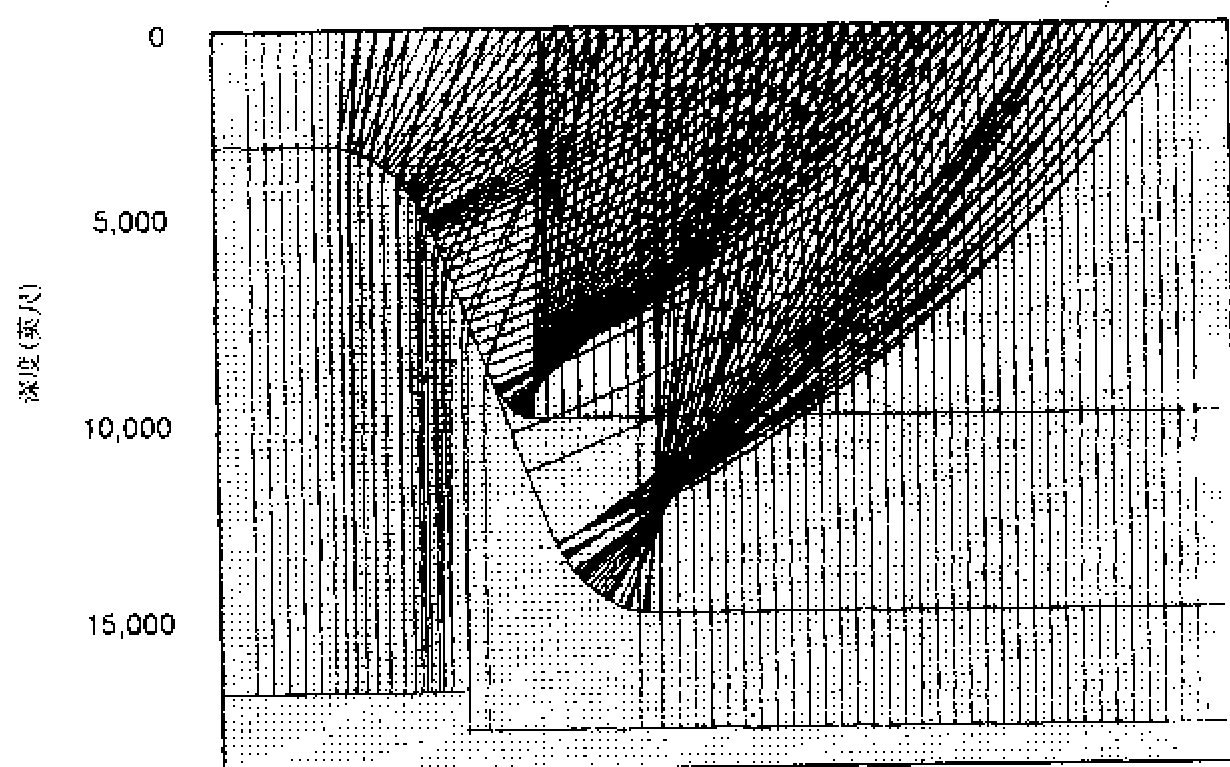
2.7　3维数值模拟

前面介绍的主要是2维的数值模拟,有的方法可以直接推广到3维中来,方法上没有本质的差别,只是运算量及存储量有大大的增加。在这一节里我们简要地介绍工业界和学术界对3维模型的重视和工作进展。

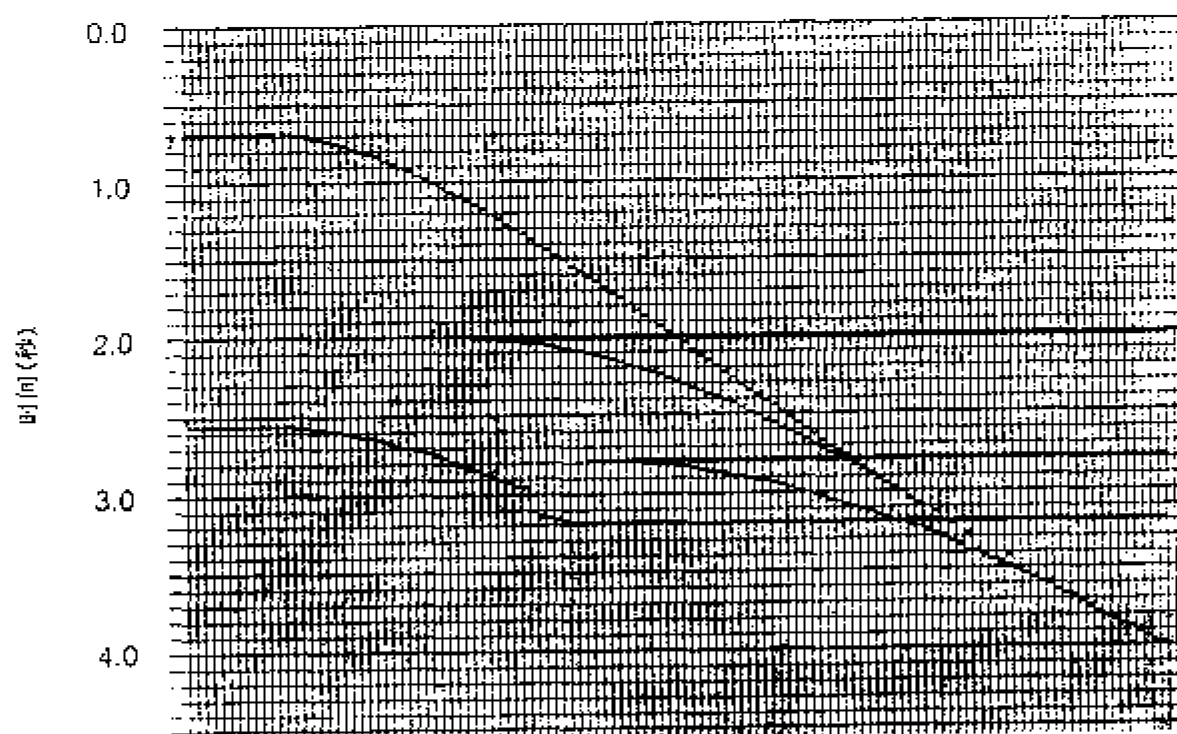
3维模型在地球物理数据的采集,处理、解释及各种研究中的重要作用是大家都清楚的,这里不再重复。国际两个最大的地球物理勘探协会美国的SEG和欧洲的EAEG为了推动3维模拟的发展,于1992年底专门联合成立了一个SEG/EAEG3维模型委员会,经过四年的努力,取得许多成果,由于许多图片都是彩色的,我们只能以文字作一概述,有兴趣的读者可参见SEG/EAEG3维模型委员会的四次报告(Leading Eadge Vol.13,No2,No1,Nol.13,No,2及Vol.15,No.2)。

在SEG/EAEG成立3维模型委员会之后先经过研讨会讨论了1)模型的构造/地层性质;2)模型的表示方法;3)采集参数;4)数值技术;5)模型类型(声学的,弹性的);6)计算机资源要求。从地质的观点来看确定了盐丘的声学模型及逆掩断层的声学模型。1993年SEG国际会年上又进一步地讨论,最后成立了三个工作组,一个是盐丘模型组,一个是逆掩断层模型组及一个数值计算及程序组。

盐丘模型进展情况:模型设计由来自23个组织(有石油公司,地球物理承包公司和学术单位)的27地学专家(有盐丘构造专家、地震模拟及成像专家)共同讨论决定的,他们一致同意以美国海湾沿岸的盐丘构造为基础,既考虑到地质上的合理性又照顾到能检验地震成像算法的机理。从构造上看含有盐丘、断层和透镜体;从地层上看,含有五层砂岩组,有的含气,有的有气油界面及油水界面。模型尺寸为90000ft×90000ft,深度为24000ft。几何模型做出后即入内联网,需要者可从Internet上获得,数据格式属GOCAD。图2.7.1是几何模型



(a)



(b)

图 2.6.4 射线追踪

(a) 为几何模型及零炮检距射线;(b) 射线的旅行时曲线(Langan 等)

AA′剖面,其中包括了许多复杂的构造,如陡倾角,盐丘侧翼等。图 2.7.2 是一些共炮点合成记录。图 2.7.3 则是从各个共炮点道集中抽出的零炮检距道集组成的零炮检距剖面。图 2.7.4 是由模型用爆炸反射面剖面,当然也是零炮检距剖面,这比图 2.7.3 中的同相轴连续性要好。图 2.7.5 则是用图 2.7.4 的数据由 Kirchhoff 偏移法获得的剖面,可以看到盐丘上部构造全都恢复,盐丘之下的断层都出来了,但是断层面有的不太清晰。总的来说效果还是很好的。为了获得更佳、更经济的参数,经试验确定用 20m 的格点,15Hz 的中心频率可以获得

较满意的结果。后来又制作了这种参数的模型，并以 CD-ROM 的形式出版。目前又有四种不同采集方案的 3 维数据完成。

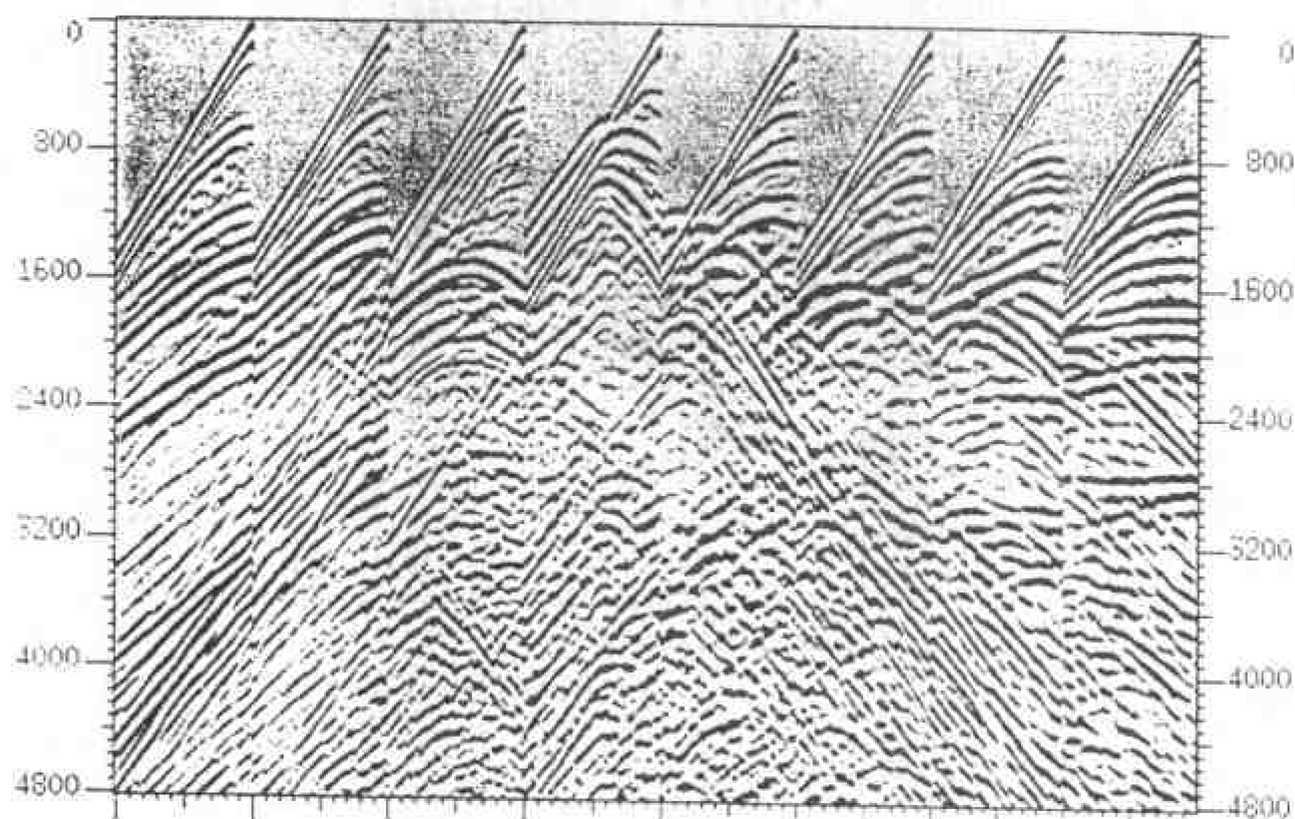


图 2.7.1　SEG. EAEG 盐丘三维模型中的 AA′剖面。此剖面上含有陡倾角，盐丘浅部侧翼，盐丘扩容及急剧的倾角变化。这些都是成像中的难题

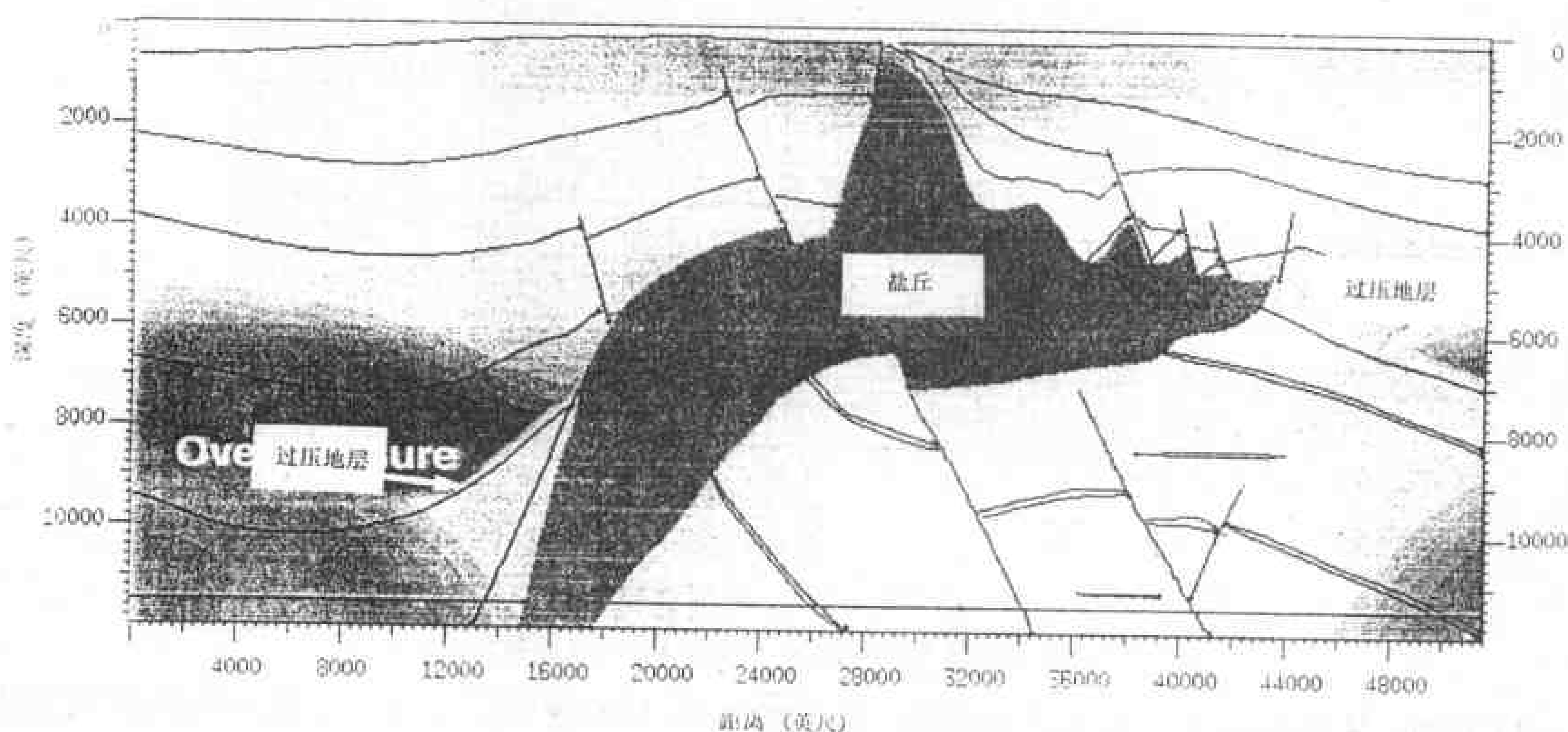


图 2.7.2　这是图 2.7.1 模型中 8 个共炮点合成记录

逆掩断层进展情况：目前对新油田的勘探正向复杂地带转移，我们会碰到许多由逆掩断层带来的困难，在这种构造中或之下的沉积层的成像就是地球物理学家的难题。逆掩断层的合成记录可能会帮助我们了解这些困难和提供解决的方法。逆掩断层工作组由 10 名国

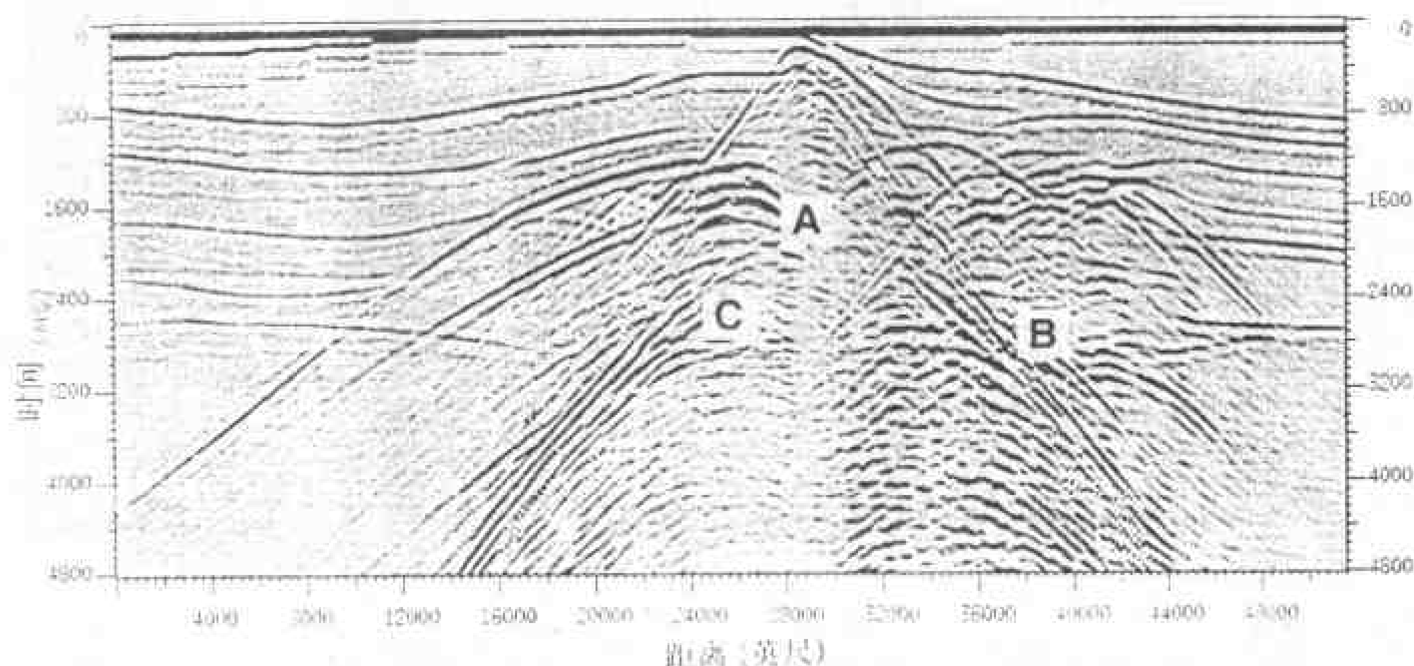


图 2.7.3　这是从所有共炮点道集中抽出的零炮检距道组成的零炮检距剖面

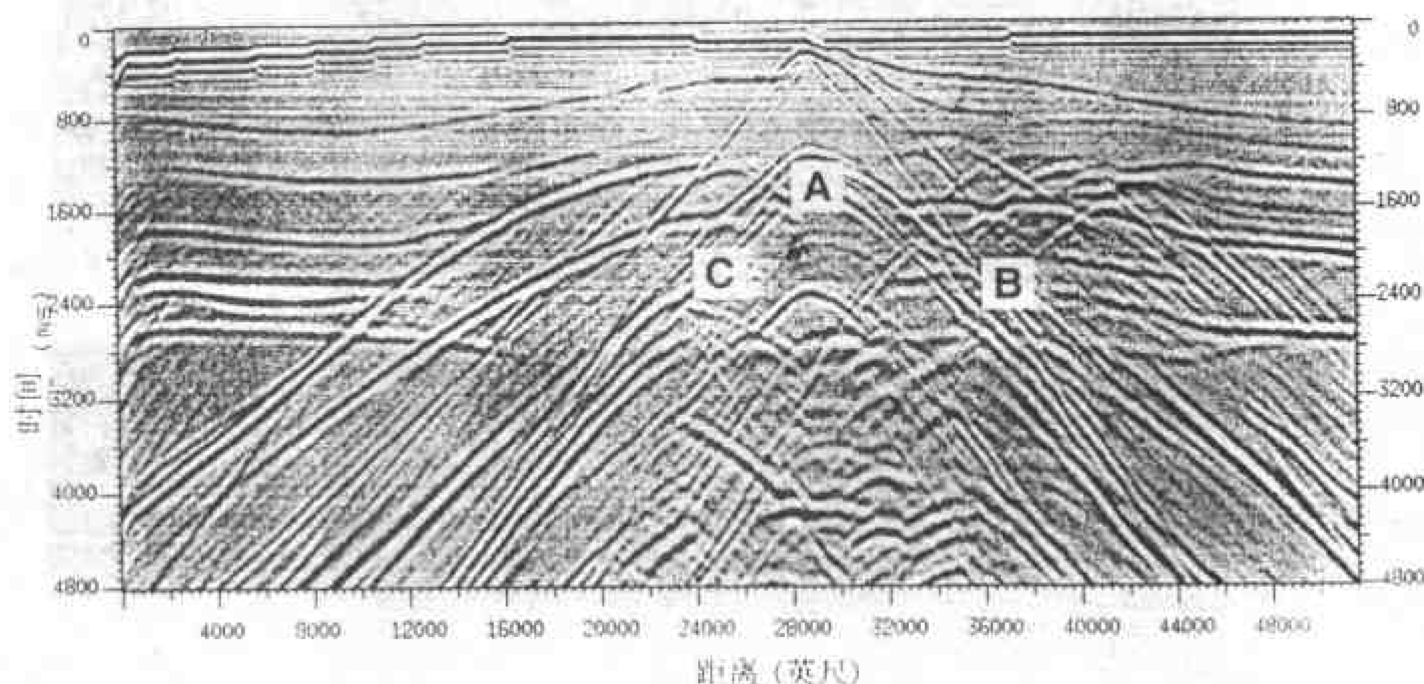


图 2.7.4　这是图 2.7.1 模型用爆炸反射面模似的零炮检距剖面

际知名的专家组成，他们担当起制作逆掩断层模型的任务。这个逆掩断层应当是陆上的构造，具有较大的地形起伏和复杂的风化层；模型包括更多的 3 维特征；速度分布应用已知的数据库来构成；模型还应包括像叠瓦状薄层、透镜体，尖灭等特征以检验地震采集及处理的分辨率。最后形成一个复杂的复合构造，中部是一个冲断层，断在一个背斜构造上，旁边是单斜或水平层，冲断层之上被侵蚀并覆盖上一层表层，共有 17 个地层在一些地层中有河道和裂缝。模型尺寸为 20km × 20km × 4km，几何模型用 GOCAD 软件作出。图 2.7.6 是在速度分布体上沿 $x = 7500$m 及 $y = 113000$m 的纵向切片的速度分布图。目前此模型已有两种方式的采集记录。图 2.7.7 是 3 维记录的一种显示，图中有两个相互垂直的测线及一个等时面。

数值计算及程序组：1993 年该组专家经讨论后认为当前解决 3 维的构造问题高于地层问题，3 维模型的完全弹性波的传播的计算问题仍然超出目前的技术能力，因此地震勘探仍限于声波模型的计算。模型的参数主要是模型大小，采集区大小，源信号主频，炮点数、模型

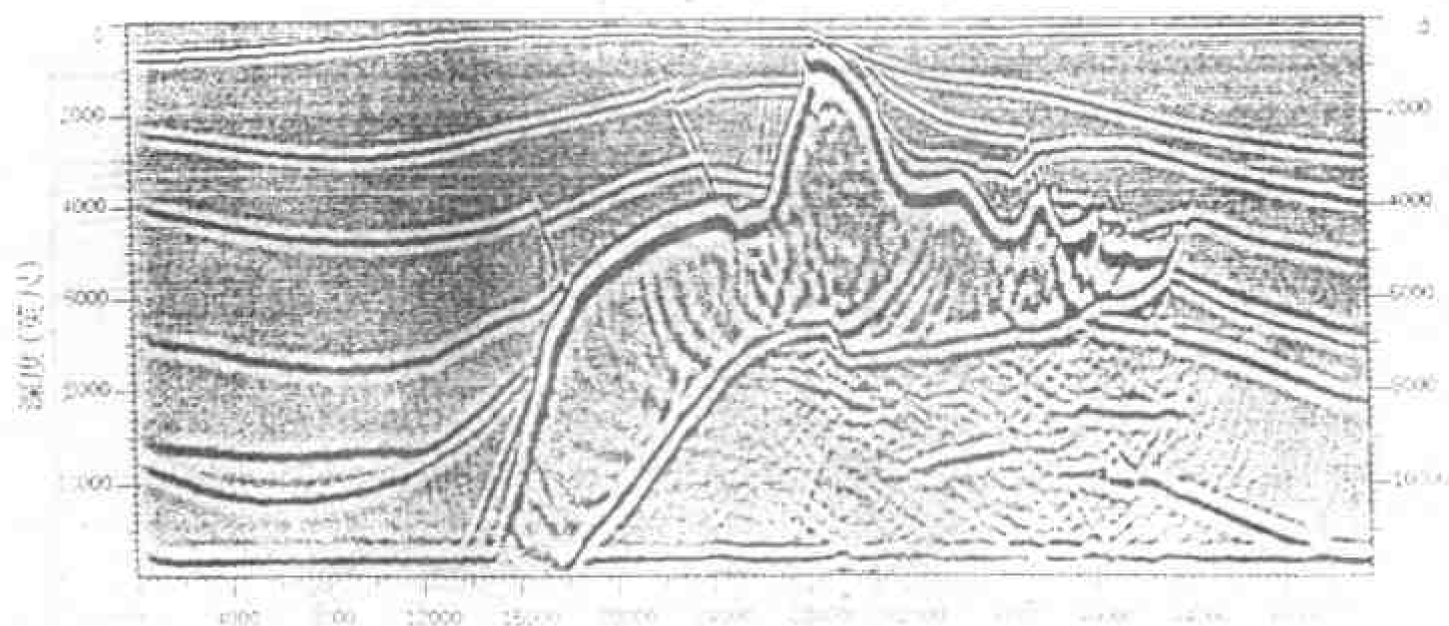


图 2.7.5　这是对图 2.7.4 剖面用 Kirchhoff 偏移得到的剖面，和图 2.7.1 相比，盐丘之上的构造全部恢复，盐丘之下有的断面不清

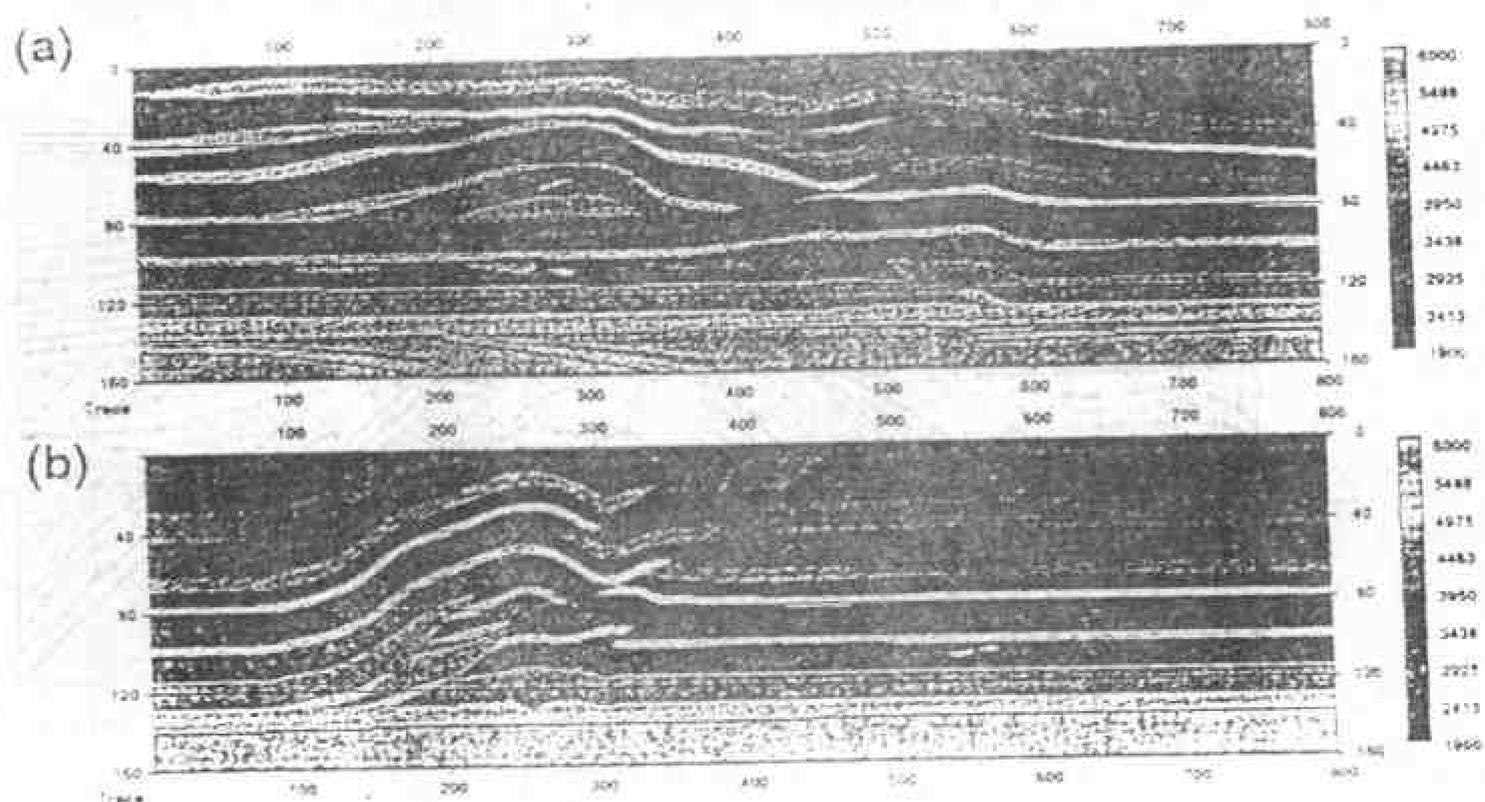


图 2.7.6　(a) 这逆掩断层模型在 $x = 7500\text{m}$ 时的地层速度剖面
(b) 这是逆掩断层模型在 $y = 11300\text{m}$ 处的地层速度剖面

速度等。另外稳定的差分方法会对参数的选择作出严格的限制，利用最新的对波散及吸收边界条件研究的最新成果。一旦给出参数，就要进行各种试算以估计全部采集的计算量。许多机构提供了一些差分程序，程序组对它们作出估价选取合用的程序。美国能源部同意承担 3 维地震合成记录的计算作为能源部油气国家信息基础(GONII)项目的一个部分。一些国家实验室参与部分计算工作。图 2.7.8 是他们计算的合成记录的对比，(a)是法国石油研究院做的，(b)是美国 SANDIA 实验室算的，两者相差极小，(c) 是两者之差图，实际上值极小，放大了 500 倍才显示出来。这些误差随时间增加而减小，而且误差大小与该点的记录大小有关，其相对误差为 0.0001(也可能是不同的计算平台引起的)。

自模型数据对外开放以来，许多组织及个人都开始使用 SEG/EAEG 的 3 维模型。工业界及学术界联合提出的 ACTI 课题得到美国能源部的基金支持。这里仅举一个生成伪 VSP 的例子。Delft 大学 Alai 等人提出一个生成为 VSP 的想法，现通过逆掩断层模型的一个炮道

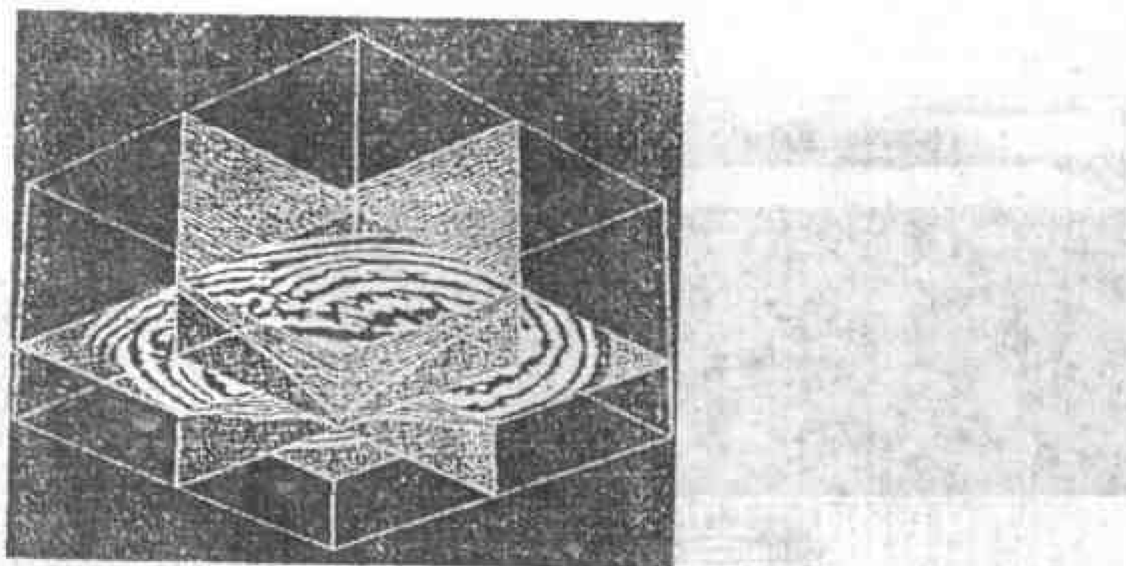


图 2.7.7 逆掩断层模型三维数据体的三个剖面

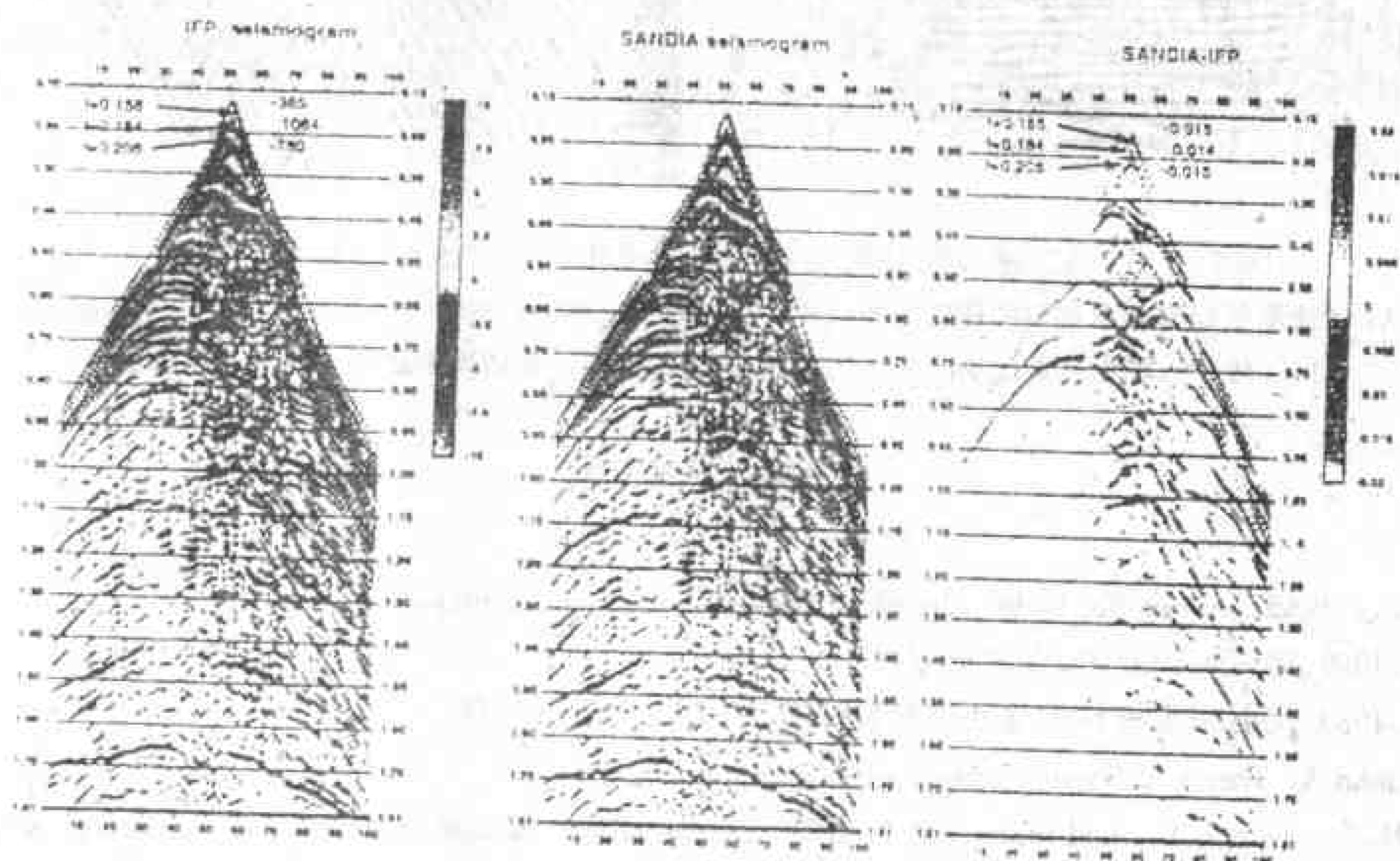


图 2.7.8 法国 IFP 和美国 SANDIA 计算的地震记录对比,右图是两者之差,相对误差小于 10^{-4}

集试验成功了,这种方法可使我们辨别同相轴的性质(是多次波还是一次反射)及同相轴的始点。图 2.7.9(a)是速度体在倾向测线上的剖面,上面的每条竖线表示道的位置;(b)是 3 维炮集偏移数据体在该测线上的切片,在速度模型上的砂体河道在这里成像非常清晰;(c)是井中的速度剖面;(d) 是一炮记录的切片;用(c)和(d)就可生成为 VSP 记录(e),这个剖面可以帮助我们了解原始道集及偏移剖面之间的关系。

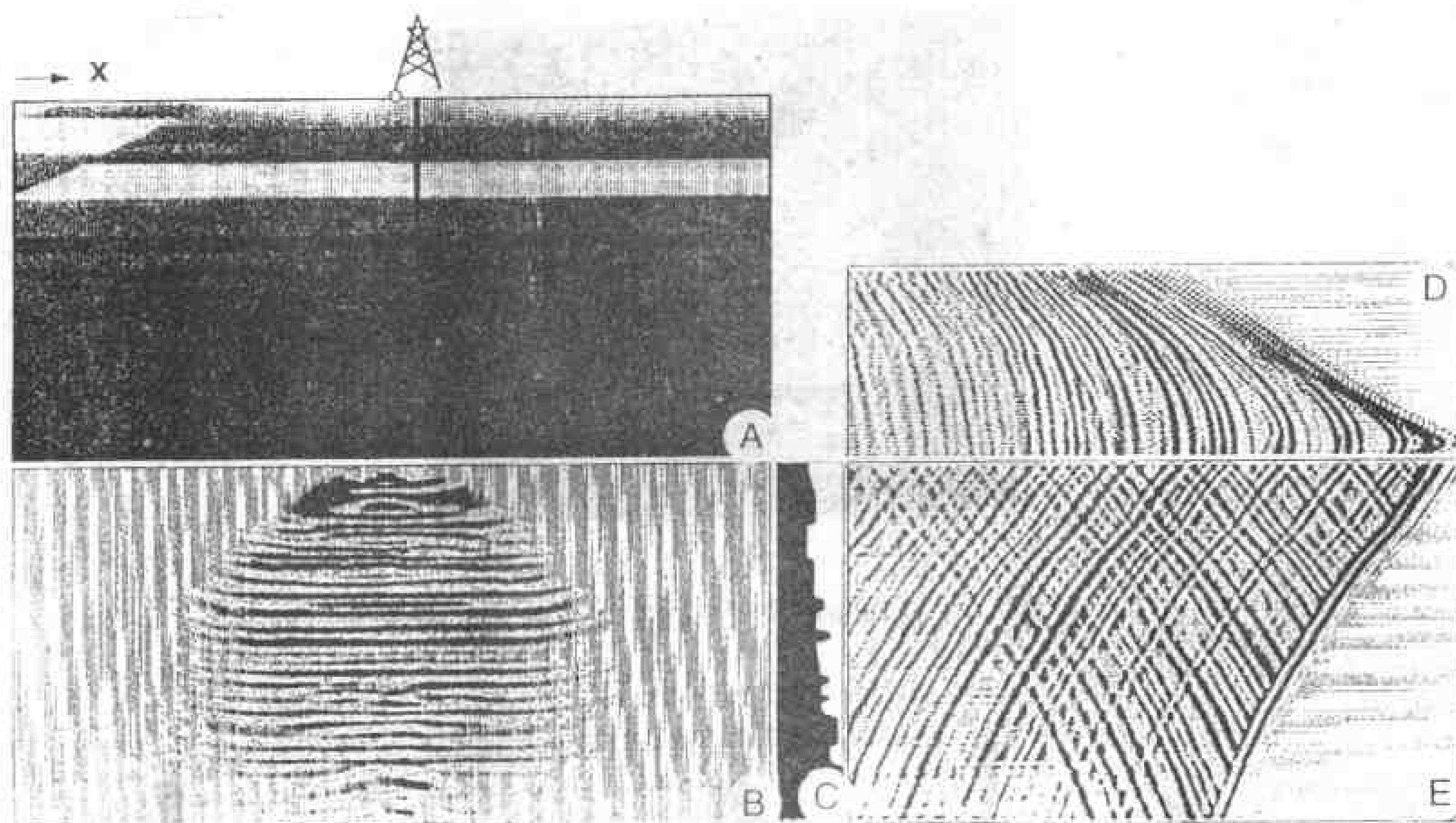


图 2.7.9 用三维波场外推实现三维炮道集到伪三维 VSP 数据的转换

(A) 逆掩断层模型倾向剖面的速度分布;(B) 三维炮道集偏移数据的一个切片;(C) 井中速度剖面;

(D) 过井三维炮道集记录的一个切片;(E) 由三维炮道集转换生成的三维伪 VSP 数据

第 2 章 参考文献

1. Claerbout, J. 1985, Imaging the Earth's Interlor, Blackwell Scientific Publication
2. 马在田, 1989, 地震成像技术, 石油出版社
3. 贺振华, 1989, 反射地震资料偏移处理及反演方法, 重庆大学出版社
4. Scales, John A. Theory of Seismic Imaging Samizdat Press
5. Langan R.T., Lerche, I., and Cutler, R.T., 1985 Tracing of Ray through Heterogeneows media: An Accurate and Efficient Procedure, Groph. Vol.50, No.9
6. Progress Reprot from the Seg/EAE 3-D Medeling Committee, 1994, TLE Vol.13, No.9
7. Aminzadeh, F., Burkhard, N., Nicoletis, L., Rocca, F., and Wyatt, K., 1994, SEG/EAEG 3-D Modeling Project: 2nd update, TLE, Bol.13, NO.9
8. Aminzadeh, F., Burkhard, N., Kung, T., and Duclos, P., 1996, Three Dimensional SEG/EAEG Models-An update, TLE Vol.15, NO.2
9. Aminzadeh, F., Burkhard, N., Kunz, T., Nicoletis, L., and Rocca, F., 1995, 3-D Modeling Project: 3rd reprot, TLE, Vol, 14, No.2
10. Aminzadeh, F., Burkhard, N., Kunz, T., Nicoletices, L., and Rocca, F., 1995, 3-D medeling Project: 3rd repoft, TLE, Vol.14, No.2
11. Kelly, K., Alford, R. and Whitmore, N. 1982, Medeling-The forward method, in 〈Concepts and Techniques in Oil and Gas Exploration〉 Edited by Jain, K. and de Figueiredo, R. S.E.G.
12. Hanyga, A. and Helle, H., 1995, Synthetic Seismograms from generalized ray tracing, Geophysical Prospecting, Nol.43, No.1
13. Moor, D., 1972, Finite Difference Method for Seismic Wave ropagation in Heerogeneous Materials, in 〈Method in

Computation physics)

14. Virieux, J. 1986, P-SV wave Propagation in heterogeneous media: Vecocity-Stress finitedifference method, Geophysics, Vol.51, NO.4
15. Tsingas, C., Vafidis, A., and Kanasewich, E., 1990, Elastic wave propagation in Transverely Isotropic Media using Finite Differencao, Geophsical Prospecting Vol.38, P.933-949
16. Kosloff, D and Baysal, E. 1982, Forward Modeling by a Fourrier Method. Geoph. Vol.47, No.10
17. Renolds, A., 1978, Boudary Conditions for the Numerical Solution of wave Propagation Problews, Geoph. Vol.43, No.6
18. Clayton, R. and Engquist, B., 1980, Absorbing boundary Conditions for wave-equation migration, Geoph Vol.45, No.5
19. Clayton, R. and Engquist, B., 1977, Absorbing boundary Conditions for acoustic and elastic wave equations, SSA Bull. V.67, P.1529-1540
20. Stacey, R., 1988, Improved Transparent Boundary Formulations for the Elastic-wave Equation, SSA Bull., Vol.78, Bo.6
21. HIgdon, R., 1991, Absorbing boundary Conditions for elastic waves, Geoph. Vol.56, No.2
22. Kosloff, D., Reshef, M., and Loewenthal, D., 1984, Elastic wave Calculations by the Fourier Method, SSA. Bull. Vol.74, No.3
23. Hanyga, A. 1989, Boundary effects in Asymptotic Diffraction Theory, Ⅰ-Ⅲ, Seimo-series 35-37 University of Bergen
24. Hanyga, A., 1991, Ray tracing in the case of multiple-Valued travel-times. blst SEC meeting, Houston. Expanded Abstracts, 1517-1521.
25. Versteeg, R., 1994, The Marmousi experience: Velocity model determination on a Synthetic Complex data set. TLE Vol.13, No.9

第3章 位场与电磁场的正反演

在地球物理场的计算中，在场源外区域满足拉普拉斯方程的物理场均称为位场，本章中主要讨论的位场是重力场和磁力场，交变电磁场因其满足麦克斯韦方程，且具有波场性质故另作一节单独讨论。

在位场与电磁场的正演问题中，都可以用求解积分方程和解偏微分方程的两种基本方程的方法求解，但具体解答因方法、原理的不同而异。

位场与电磁场的反演问题严格来讲都是个非线性方程求解问题(除了某些特定条件)，但具体求解时，许多问题可以在某些条件下简化为线性问题，但在多数情况下仍是非线性问题，因此应用数学中线性问题与非线性问题的解法均可适用于它们。限于篇幅、本章中只介绍几种常用的方法，关于线性问题和非线性反演中迭代反演解法集中在重磁反演中，非线性反演中的最优化反演放在大地电磁反演中介绍。

3.1 重磁正演问题

给定地下地质体中密度不均匀体和磁性体的几何参数(位置、形状、产状等几何要素)和物性参数(密度差和磁化强度矢量)，求它在外部空间任意点的重磁场，称为重磁场的正演问题。反之，由重磁场来推测地下密度不均匀体和磁性体的几何参数和物性参数，则称为重磁场反演问题。

需要强调指出，目前重磁场正演问题的发展已具有以下特点：

(1) 从单一的空间域正演发展到空间域和波数域两个域的正演，在内容和途径上有了重大发展。

(2) 从以规则的、二度的、单个的形体正演为主发展到不规则的、$2\frac{1}{2}$度和三度的、叠加的形体正演为主，更加逼近了真实的地质体和重磁场，适应了各种地质任务的要求。

(3) 从均匀物性正演发展到了物性不均匀(即指密度和磁性不均匀)的正演，在正演方法的精度和实用性方面有了很大进步。

3.1.1 空间域正演途径

1. 从基本场源出发导出各种规则形体的重磁场

(1) 重力场

在重力勘探中，最基本最简单的场源是点质量，由万有引力定律容易导出其重力场，与之等效的是密度均匀的球体。

基本位场的叠加定理，由点质量的重力场出发，沿着任意方向线积分可获得物质线的重力场，与之等效的是圆柱体。对物质线重力场沿横向积分则可获得物质面的场，与之等效的是台阶或断层。这是重力勘探正演问题一种经典作法。许多规则形体，如球体、水平圆柱

体、台阶、薄板、垂直柱体等的重力场都可用类似方法获得。

(2) 磁力场

在磁力勘探中最基本场是磁偶极子场和单磁极场(虽然关于磁单极存在的问题还处在深索之中,但在静磁场讨论中可以应用)。与偶极子场等效的是磁化均匀的球体磁场,将偶极子场沿某一方向线积分可得到磁偶极线磁场,与之等效的是圆柱体的磁场。将磁偶极线沿横方向积分即可得偶极面的场,与之等效的是薄板的场。而薄板的积分则可得到厚板状体的场。

而单极场沿水平方向线积分就可导出水平单极线的场,与之等效的是顺层磁化无限延深薄板状体的磁场。将单极线场沿水平方向积分则可得到磁荷面磁场,可等效于顺层磁化无限延深厚板状体磁场。由四个磁荷面的磁场的叠加,即可得到斜磁化有限延深二度厚板状体磁场。多个磁荷面的磁场累加求和还可得到多面体的磁场。

用上述方法可同样获得许多简单规则几何形状磁性体的磁场。

2. *从重磁位出发计算重磁场*

(1) 重力场的正问题

由场论可知,物体 Q 在其外部某一点 P 的引力位为

$$W = G\int_Q \frac{\sigma}{R}\mathrm{d}v \tag{3.1.1}$$

式中　G 为引力常数(6.67×10^{-8});

σ 是物体 Q 的剩余密度;

$\mathrm{d}v$ 是物体 Q 内的体积元;

R 是小体积元 $\mathrm{d}v$ 到 P 点的距离。积分是对地质体 Q 进行。

物体 Q 在 P 点引起的重力异常 Δg,就是它的引力位 W 沿铅垂方向的一次微商在该点之值,即

$$\Delta g = \frac{\partial W}{\partial z_p} = G\int_Q \frac{z_Q - z_P}{R^3}\sigma\mathrm{d}v \tag{3.1.2}$$

对于密度均匀的地质体,σ 为常量,提到积分号外,于是就有

$$\Delta g = G\sigma\iiint_Q \frac{z_Q - z_P}{R^3}\mathrm{d}x_Q\mathrm{d}y_Q\mathrm{d}z_Q \tag{3.1.3}$$

式中　$R = [(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q) + (z_P - z_Q)^2]^{\frac{1}{2}}$。

(2) 磁场的正问题

任何磁性体均可看成由许多体积很小的元磁体所组成(图 3.1.1),每个元磁体相当于磁距为 $\vec{J}\cdot\mathrm{d}v$ 的磁偶极小,元磁体在空间 P 点引起的磁位为 $\mathrm{d}U$,按场论有

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{R^3}(\vec{R}\cdot\vec{J}\mathrm{d}v)$$

整个物体 Q 在空间 P 点引起的磁位为

$$U = \iiint_Q \frac{\vec{R}\cdot\vec{J}\mathrm{d}v}{R^3} = -\iiint_Q \left(J\cdot\mathrm{grad}P\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}v$$

对于均匀磁化的地质体,$\vec{J}$ 为常量,则积分是对地质体进行的,梯度运算是对 P 点而言

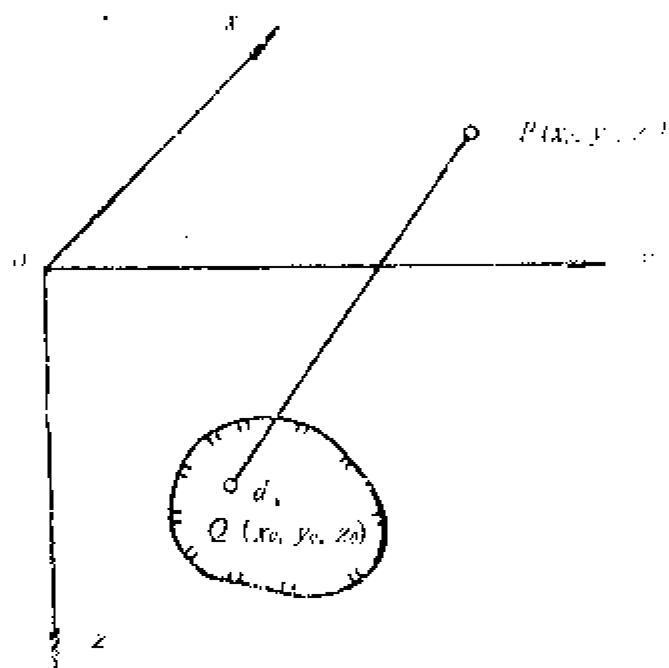


图 3.1.1　磁场正问题坐标系

的，因而可以调换积分与求梯度的顺序

$$U = -\vec{J}\cdot \mathrm{grad}P\iiint\frac{1}{R}\,\mathrm{d}v \qquad (3.1.4)$$

对比式(3.1.1)式的形式，若令

$$V = \iiint_Q \frac{1}{R}\mathrm{d}v$$

则有

$$W = G\sigma V$$

若把 V 看成是 $G\sigma = 1$ 时的“重力位”，则(3.1.4)式可写成：

$$U = \vec{J}\cdot \mathrm{grad}PV \qquad (3.1.5)$$

上式即为泊松公式。

由上式可知，物体 Q 在 P 点引起的磁场在 x，y，z 三个方向上的分量为

$$X_a = \frac{-\partial U}{\partial x_P} = \frac{\partial}{\partial x_P}(\vec{J}\cdot \mathrm{grad}_P V) = J_x\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + J_y\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + J_z\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}$$

$$Y_a = -\frac{\partial U}{\partial y_P} = J_x\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + J_y\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + J_z\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}$$

$$Z_a = -\frac{\partial U}{\partial Z_P} = J_x\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} + J_y\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} + J_z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (3.1.6)$$

式中　J_x, J_y, J_z 为磁化强度在 x, y, z 三个方向的分量。

令

$$V_0 = \frac{\partial V}{\partial z} = \iiint_Q \frac{z_Q - z_P}{R^3}\mathrm{d}x_Q\mathrm{d}y_Q\mathrm{d}z_Q$$

$$V_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \iiint_Q \frac{3(x_Q - x_P)^2 - R^2}{R^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \iiint_Q \frac{3(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}{R^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_3 = \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} = \iiint_Q \frac{3(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}{R^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_4 = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \iiint_Q \frac{3(y_Q - y_P)^2 - R^2}{R^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_5 = \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} = \iiint_Q \frac{3(y_Q - y_P)(z_Q - z_P)}{R^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_6 = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \iiint_Q \frac{3(z_Q - z_P)^2 - R^2}{R^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (3.1.7)$$

上式各式中的积分是对整个物体 Q 进行的，式中

$$R = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

在航空磁测中，测定的是一定高度的地磁场 T 在数量上的变化 ΔT，如果用磁异常 $\vec{T}_a$ 的三个分量 x_a、y_a、z_a 来表示，则有

$$\Delta T = x_a \cos I \cos D + y_a \cos I \sin D + z_a \sin I$$

式中　I 为磁倾角，D 是 H_0（T_0 的水平分量）与 x 轴的夹角。

综上所述，重磁场的正演公式可归结为：

$$\begin{aligned}
\Delta g &= G\sigma V_0 \\
x_a &= JxV_1 + J_yV_2 + J_zV_3 \\
y_a &= JxV_2 + J_yV_4 + J_zV_5 \\
z_a &= JxV_3 + J_yV_5 + J_zV_6 \\
\Delta T &= x_a \cos I \cos D + y_q \cos I \sin D + Z_a \sin I
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

（3）用数值方法求解正演问题

从前面正演计算的基本公式可以看出，重磁场计算，实际上可归结为计算一系列的三重积分，对于一些规则的简单形体，这些三重积分可用解析方法求出其准确值，但对于实际问题中的非规则形体，要用解析方法求出这些积分是困难的，因而我们只能采用数值解法求其近似值。根据数值近似方法的不同，目前用于计算任意形体的重磁场的方法大致可以分为以下几类：

① 面元法

用一组相互平行的平面把任意形体分割成很多截面，每一截面用一个规则形体（如多边形，矩形）近似而求出多边形域的二重积分值，然后在垂直于截面的方向上，用数值积分法求出第三重积分，这样即可求出三重积分的近似值。其近似程度取决于各多边形吻合该形体的各截面形状的程度，及采用的数值积分方法。该方法信息选择简单，是常用方法之一。

② 线元法

用两组相互垂直的平行面把任意形体分割成许多棱柱体，每一个棱柱体的作用以位于其中心的线元作用值代替，我们可以用解析方法积出沿线元方向的一重积分，即求出各“线元”的作用值。然后在垂直于棱的截面上做二重数值积分，即得到整个形体的三重积分近似值。其近似程度除了取决于全部棱柱体与该形体的吻合程度以外，还取决于所采用的数值方法。该方法也是重磁正演的常用方法之一。

③ 点元法

将一个任意形体按适当的方法分割成很多小的规则形体（如长方形、立方体等），这些小单元体的作用，均视作“点元”，先用解析方法求出各个点元的三重积分值，然后叠加求和即得整个形体的三重积分的近似值，近似程度亦取决于全部点元与该形体吻合的程度。

④ 表面积分法

应用奥一高定理把三重积分转换成异常体的表面积分（二重积分），采用一系列多边形小平面的组合来近似全表面，用解析方法分别计算出每个多边形小平面的积分值，然后累加求和，即得到整个异常体表面积分的近似值。

3. 由解积分方程出发导出非均匀磁化磁性体的磁场

计算强磁性磁性体的磁场必须考虑退磁作用而引起的非均匀磁化，此外还有磁化率与剩磁的不均匀情况。对于均质不规则强磁性体，在只考虑退磁作用引起的非均匀磁化而导磁

率均匀时，可基于电磁场原理导出下列积分方程。

$$\frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial U_0}{\partial n'} + \frac{K}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

式中，$\frac{\partial U}{\partial n'}$ 为任意点 P' 沿 n' 方向的磁场，即磁位沿该方向的导数。r 是该点至面元 dS 的距离，$\frac{\partial U_0}{\partial n'}$ 是正常磁场沿 n' 方向的分量，为已知项，$\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)$是积分方程的核，$K = \frac{u_0 - u}{u_0 + u}$，而 u_0与 u 则分别为磁性体和周围空间磁介质的导磁率，求出$\frac{\partial}{\partial n'}$，即可获得异常磁场 $\left(\frac{\partial U}{\partial n'} - \frac{\partial U_0}{\partial n'}\right)$。

该方程属于第二类弗列德霍姆积分方程，可用数值方法求解。

4. 用有限元和边界元等方法求微分方程边值解导出复杂条件下磁场

由于重磁位场求取可归结为偏微分方程的边值问题的解，因而也可以通过用有限元和边界元方法求取泛函的极值解，也即偏微分方程的数值解。由于方法比较复杂，计算量大，主要用于二度，故使用还不普遍。

3.1.2 复杂形体重磁场的计算

对于复杂不规则形体重磁异常的计算常用的方法是图解法(量板法)及数值法，由于计算机的日益普及，所以五六十年代常用的图解法使用日趋减少，数值法成了最常用的方法。下面分两度、$2\frac{1}{2}$ 度和三度体三种情况来讨论复杂形体重磁场的计算方法。

1. 二度体

(1) 多边形截面二度体重力公式

由于截面为多边形的二度体能最佳逼近截面为不规则形状的二度体，它不仅在研究界面，而且在正演局部构造、火成岩及特殊地质体方面都能发挥作用，故应用十分广泛。

比较早的线积分公式是哈伯特(Hubbert,1948) 提出的，它由线积分公式 $\Delta g = 2G\sigma \times [\oint\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\mathrm{d}z]_{周界}$ 出发，导出一个计算点在原点的多边形截面二度体重力异常的通式

$$\Delta g(0) = 2G\sigma\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{bk}{1 + ak^2}\left[\frac{1}{2}\log\frac{x_{k+1}^2 + z_{k+1}^2}{x_k^2 + z_k^2} - \log\frac{z_{k+1}}{z_k} + a_k\left(\operatorname{arctg}\frac{x_{k+1}}{z_{k+1}} - \operatorname{arctg}\frac{x_k}{z_k}\right)\right] + z_{k+1}\operatorname{arctg}\frac{x_{k+1}}{z_{k+1}} - z_k\operatorname{arctg}\frac{x_k}{z_k}\right\} \tag{3.1.9}$$

其中

$$a_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{z_{k+1} - z_k}$$

$$b_k = x_k - z_k \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{z_{k+1} - z_k}$$

式中 x_k, z_k—— 多边形第 k 个角点坐标；

x_{k+1}, z_{k+1}—— 多边形第 $k+1$ 个角点坐标；

θ—— 观测点至角点的极角。

塔尔沃尼(Talwani)等也从线积分公式 $\Delta g = 2G\sigma[\oint z\mathrm{d}\theta]_{周界}$ 导出下列这个目前常用的公式

$$\Delta g(0) = 2G\sigma\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i z_{i+1} - z_i x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}\right]\left[(x_{i+1} - x_i)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\mathrm{arctg}\frac{z_i}{x_i} - \mathrm{arctg}\frac{z_{i+1}}{x_{i+1}}\right) + \frac{1}{2}(z_{i+1} - z_i)\ln\frac{x_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}{x_i^2 + z_i^2}\right] \tag{3.1.10}$$

式中 (x_i, z_i)、(x_{i+1}, z_{i+1})—— 第 i 个角点和第 $i+1$ 个角点的坐标；

n—— 多边形总边数。

这个式子由于计算简便，应用十分普遍。计算时需注意，计算到 $x_i = x_n$ 时，$x_{n+1} = x_1$，$z_{n+1} = z_1$，因为多边形是闭合的。

2. $2\frac{1}{2}$ 度体

重磁资料解释中，往往将异常源看成是沿走向无退延伸，即当作二度体看待，以简化问题，减少计算量。这样做，在走向不很长的情况下，会造成很大的误差，甚至得到错误的结果。

所谓 $2\frac{1}{2}$ 度体，是指沿走向截面位置，形状和物性参数不变的有限延伸物体，R. RaSmussen 等对这类物体命名为 $2\frac{1}{2}$ 度体。我们依据文献所给出的正演公式，重新进行了推导，并对正演公式进行了简化。

坐标系的建立如上图 3.1.3，y_1，y_2 为物体走向方向上两个端面的 y 坐标，过 x，z 轴的物体截面的顶点坐标 (x_i, z_i)，$i = 1,2,\cdots,N$，(u_i, w_i) 为坐标轴以 y 为中心，旋转 ψ_i 之后，顶点 (x_i, z_i) 之坐标，ψ_i 为 x 轴正方向与第 i 条边的正方向（即由第 i 个顶点至第 $i+1$ 个顶点的连线）的夹角。

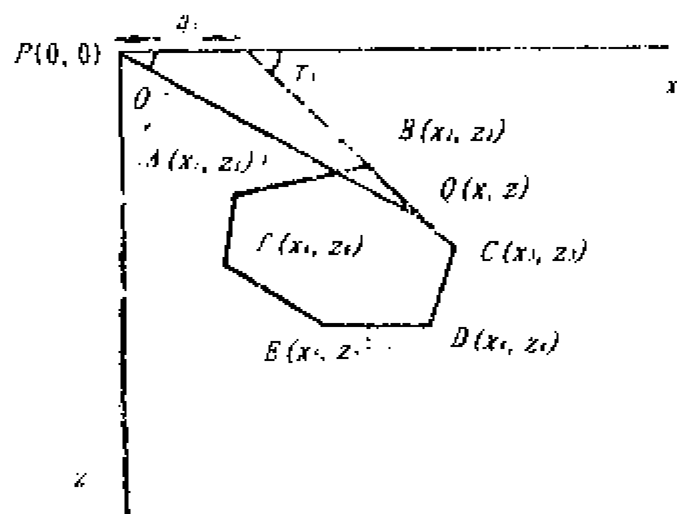


图 3.1.2 多边形截面二度体

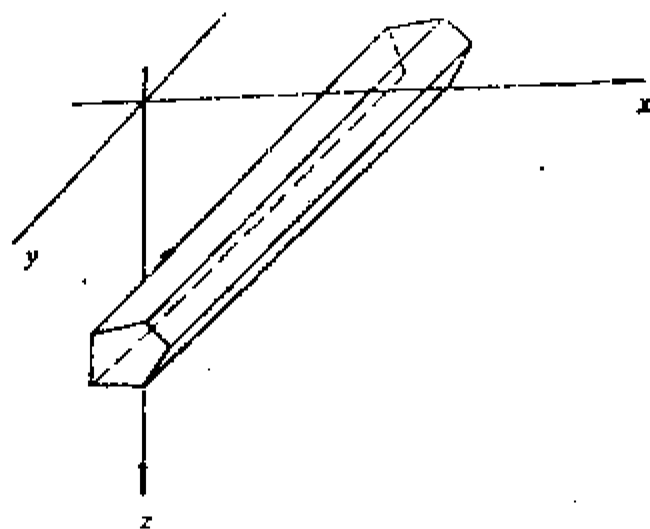


图 3.1.3 $2\frac{1}{2}$ 度体坐标系

故有：

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi_i & \sin\psi_i \\ -\sin\psi_i & \cos\psi_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tg}\phi_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$$

以下四个基本公式在推导正演计算公式中要用到：

$$F_1(y,i) = y \cdot \ln\frac{u_{i+1} + R_{i+1}}{u_i + R_i} - w_i\left[\mathrm{arctg}\frac{u_{i+1} \cdot y}{w_i R_{i+1}} - \mathrm{arctg}\frac{u_i y}{w_i R_i}\right]$$

$$+ u_{i+1} \cdot \ln\frac{y + R_{i+1}}{r_{i+1}} - u_i \ln\frac{y + R_i}{r_i}$$

$$F_2(y,i) = -\cos\phi_i \ln\frac{r_i(y + R_{i+1})}{r_{i+1}(y + R_i)} - \sin\phi_i\left[\mathrm{arctg}\frac{u_{i+1}y}{w_i R_{i+1}} - \mathrm{arctg}\frac{u_i y}{w_i R_i}\right]$$

$$F_3(y,i) = -\sin\phi_i \ln\frac{r_i(y + R_{i+1})}{r_{i+1}(y + R_i)} + \cos\phi_i\left[\mathrm{arctg}\frac{u_{i+1}y}{w_i R_{i+1}} - \mathrm{arctg}\frac{u_i y}{w_i R_i}\right]$$

$$F_4(y,i) = \ln\frac{(u_i + R_i)(u_{i+1} + r_{i+1})}{(u_{i+1} + R_{i+1})(u_i + r_i)}$$

$F_4(y,i)$ 的计算公式是由原文中简化得到的。

式中　$r_i^2 = u_i^2 + w_i^2$　　$r_{i+1}^2 = u_{i+1}^2 + w_{i+1}^2$

$R_i^2 = u_i^2 + w_i^2 + y^2$　　$R_{i+1}^2 = u_{i+1}^2 + w_{i+1}^2 + y^4$

重力正演计算公式为：

$$\Delta g(x,y,z) = G \cdot \sigma \cdot \Sigma\cos\varphi_i[F_1(y_2 - y,i) + F_1(y_1 - y,i)] \qquad (3.1.11)$$

(x,y,z) 为观测点在固定坐标系中的坐标。计算中场源角点坐标在固定坐标系中的坐标为 (x_i,z_i)，要注意此时公式中 x_i 相当于 $x_i - x$，z_i 相当于 $z_i - z$。

磁力 ΔT 正演公式为：

$$\Delta T(x,y,z) = X\cos A\cos I + Y\sin A\cos I + Z\sin I$$

$$X = -J \cdot \sum_i \sin\varphi_i\{\cos A_1\cos I_1[F_2(y_2 - y,i) - F_2(-y_1 + y,i)]$$
$$+ \sin I_1[F_3(y_2 - y,i) - F_3(-y_1 + y,i)]$$
$$+ \sin A_1\cos I_1[F_4(y_2 - y,i) - F_4(-y_1 + y,i)]\}$$

$$Z = -J \cdot \sum_i(-\cos\varphi_i - \sin I_1\cos\psi_i)\{\cos A_1\cos I_1[F_2(y_2 - y,i) - F_2(-y_1 + y,i)]$$
$$- \sin I_1[F_3(y_2 - y,i) - F_3(-y_1 + y,i)]$$
$$+ \sin A_1\cos I_1[F_4(y_2 - y,i) - F_4(-y_1 + y,i)]\}$$

$$Y = -J \cdot \sum_i\{[\cos A_1\cos I_1\sin\psi_i] \cdot [F_4(y_2 - y,i) - F_4(-y_1 + y,i)]$$
$$+ \sin A_1\cos I_1 \cdot \sin\varphi_i[F_2(y_2 - y,i) - F_2(-y_1 + y,i)]$$
$$+ \sin A_1\cos I_1\cos\varphi_i[F_3(y_2 - y,i) - F_3(-y_1 + y,i)]\} \qquad (3.1.12)$$

式中　A, I——分别为测线磁方位角和磁倾角（相对于地磁场方向）；

A_1, I_1——分别为测线相对于磁化强度的方位角和倾角。

本方法的特点是适用范围广，可用于 $2\frac{1}{2}$ 度体，二度体和三度体的重磁正反演计算，还可进行磁力各分量的正反演计算。

图3.1.4为理论模型重力正演试验结果，从图中可知理论长方体公式计算结果与 $2\frac{1}{2}$ 度体公式计算结果十分一致，其计算精度是高的。

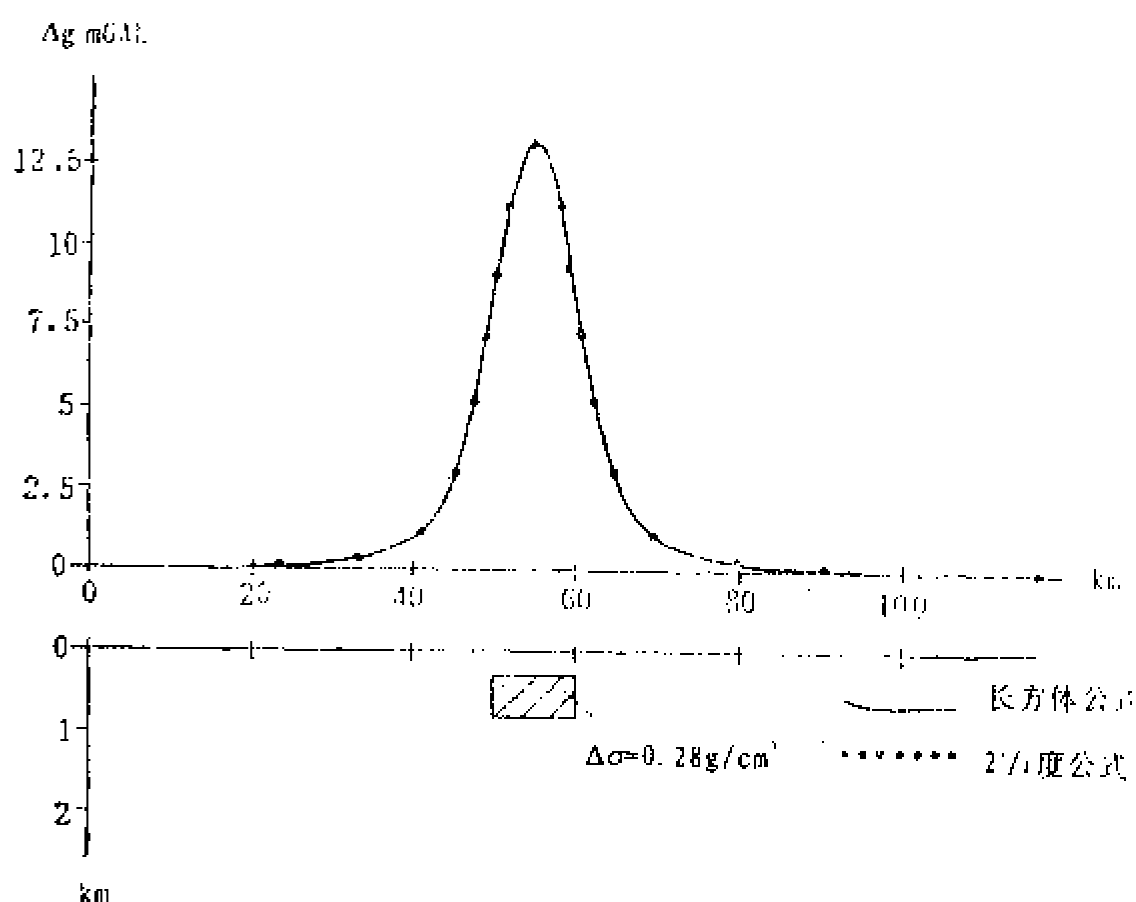


图 3.1.4 $2\frac{1}{2}$ 度体模型重力异常正演结果对比

3. 三度体

正如前面所讲的,从重磁位出发计算重磁场的公式可归为求一系列三重积分,对于复杂不规则三度体可使用不同的分割方法综合使用解析积分和数值积分计算这三重积分,获得重磁异常。常用的方法有线元法、面元法、体元法及表面积分法。表 3.1.1 列出了这些方法要点,下面仅以面元法、体元法为例。

表 3.1.1

方法 / 特点	线元法	面元法	点元法	表面积分法
解析积分（划分最小单元）	质量线	多边形截面	长方体元	多边形面
数值积分	两个方向	一个方向	叠加求和	求　和

(1) 面元法

Talwani 利用水平面元导出了任意形体的重力异常。由于水平元的重力效应随原点的距离变化比较慢,即使原点在水平面元的平面上,重力效应也是有限的。这样当沿 z 轴的数值积分一般都可以作出。而且在利用分段抛物线公式数值积分时,对所划分的段的密度差也可取作变化的,其变化规律可参照有关资料得到(当然每一段密度差还是常数)。

水平薄层(或水平面元)中最常用的还是任意多边形。对于图 3.1.5 中厚度为 Δz 的阴影狭长条的引力垂直分量用重力异常柱坐标可得到(该水平薄层内密度差可取为常数)

$$\Delta g = G\sigma\Delta z\int_0^r \frac{z_j \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{(z_j^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= G\sigma\Delta z\left\{1 - \frac{z_j}{(z_j^2 + r^2)^{1/2}}\right\}\mathrm{d}\phi$$

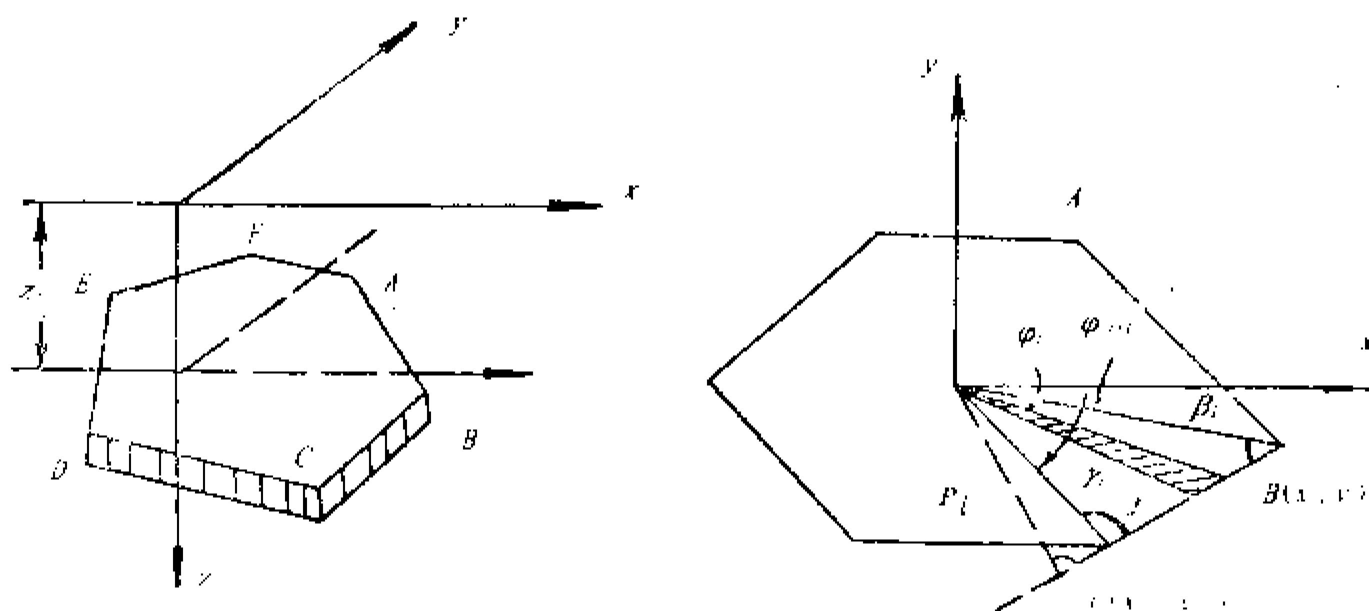


图3.1.5　多边形水平面元法

以原点、顶点 B 和 C 构成的三角形薄层的重力异常

$$\Delta g_j = G\sigma\Delta z\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}}\left[1 - \frac{z_j}{(z_j^2 + r^2)^{1/2}}\right]\mathrm{d}\phi$$

如果 P_i 是原点到 BC 的垂直距离，则有

$$r = \frac{P_i}{\sin(\pi - \gamma_i - \phi_{i+1} + \phi)}$$

代入上式，由这个积分容易求出三角形薄层的重力异常。然后对多边形所有边求和，得到多边形薄层 $ABCD\cdots A$ 的重力效应

$$\Delta g = G\sigma\Delta z\sum_i\left\{\Phi_{i+1} - \Phi_i - \arcsin\frac{z_j\cos\beta_i}{(\rho_i^2 + z_j^2)^{\frac{1}{2}}} - \arcsin\frac{z_j\cos\gamma_i}{(p_i + z_i)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

为适合于使用计算机，把 $\Phi_{i+1}, \Phi_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i$ 都用 x_i, y_i 和 x_{i+1}, y_{i+1} 表示。可将上式改写为

$$\Delta g_j = G\sigma\Delta z\sum_{i=1}^{N_j}\left\{W\arccos\left[\frac{x_i}{R_i}\left(\frac{x_{i+1}}{R_{i+1}}\right) + \left(\frac{y_i}{R_i}\right)\left(\frac{y_{i+1}}{R_{i+1}}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \arcsin\frac{z_j q_i S}{(p_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}}} + \arcsin\frac{z_j f_i S}{(p_i + z_j)^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad (3.1.13)$$

式中　如果 p_i 为正，$S = +1$；若 p_i 为负，$S = -1$；如果 m_i 为正，$W = +1$；若 m_i 为负，$W = -1$；

$$p_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{R_{i,i+1}}x_i - \frac{x_i - x_{i+1}}{R_{i,i+1}}y_i$$

$$q_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{R_{i,i+1}}\cdot\frac{x_i}{R_i} + \frac{y_i - y_{i+1}}{R_{i,i+1}}\cdot\frac{y_i}{R_i}$$

$$f_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{R_{i,i+1}}\cdot\frac{x_i}{R_{i+1}} + \frac{y_i - y_{i+1}}{R_{i,i+1}}\cdot\frac{y_{i+1}}{R_{i+1}}$$

$$m_i = \left(\frac{y_i}{R_i}\right)\left(\frac{x_{i+1}}{R_{i+1}}\right) - \left(\frac{y_{i+1}}{R_{i+1}}\right)\left(\frac{x_i}{R_i}\right)$$

$$R_i = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_{i+1} = (x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_{i,i+1} = [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

(3.1.13)式括号内第一项等于$\sum\limits_i(\phi_{i+1} - \phi_i)$,当原点(应该说是计算点的投影)在多边形内时,它等于2π;原点在多边形外时,它等于零;原点在多边形边上时,这项等于靠近原点的邻近边对原点的张角。

(3.1.13)式仅仅是计算第j个水平面元的重力公式,利用沿z方向数值积分可以求得整个地质体的重力效应。

(2) 体元法(点元法)

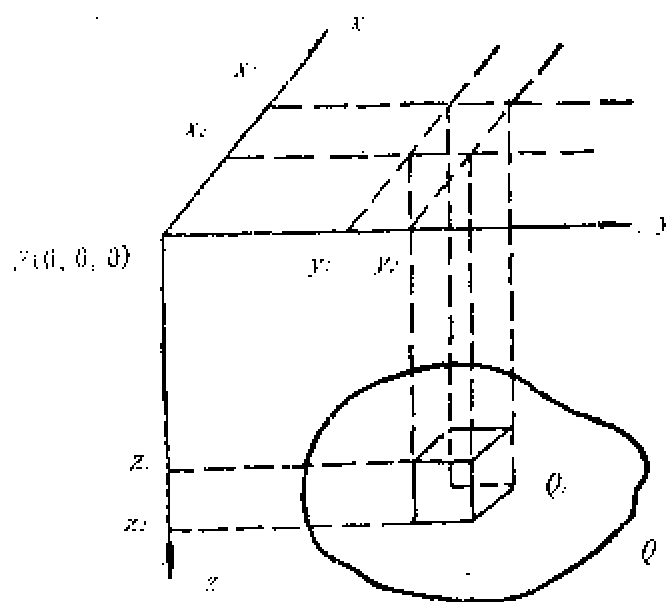


图3.1.6 体(点)元法

对于任何形状的三度体Q,我们总可以表示成很多不同体积和密度(或磁性)的长方体Q_i的近似组合。用解析方法计算出所有这些长方体Q_i在计算点P的重磁异常并累加求和,就得到整个异常体Q在计算点P引起的重磁场值。

所取体元的体积可以相同,也可以不同。各个体元的物性参数可相同,也可不相同。通常,我们将勘探剖面之间的地质体用适当的长方体或立方体来近似,确定出各个体元的角点坐标,即可算出该点元的三重积分值。

一个体元实际就是一个长方体(或立方体),我们可把(3.1.7)式中的三重积分分别积出,并代入积分限,并令$x_p = y_p = z_p = 0$,即得到它在P点的重磁场公式,积出的作用值为下式。

式中

$$V_0 = -|||\left[x\ln(y + R) + y\ln(x + R) + z\text{arctg}\frac{zR}{xy}\right.\left|\begin{matrix}x_2\\x_1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}y_2\\y_1\end{matrix}\right|\begin{matrix}z_2\\z_1\end{matrix}$$

$$V_t = -|||\left(\text{arctg}\frac{yz}{xR}\right)\left|\begin{matrix}x_2\\x_1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}y_2\\y_1\end{matrix}\right|\begin{matrix}z_2\\z_1\end{matrix}$$

$$V_2 = -\left|\left|\left| \ln(z+R) \right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2}$$

$$V_3 = -\left|\left|\left| \ln(y+R) \right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2}$$

$$V_4 = -\left|\left|\left| \operatorname{arctg}\frac{xz}{yR} \right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2}$$

$$V_5 = -\left|\left|\left| \ln(x+R) \right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2}$$

$$V_6 = -\left|\left|\left| \operatorname{arctg}\frac{xy}{zR} \right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \tag{3.1.14}$$

上式中 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ 分别为体元在 x, y, z 轴方向的积分上、下限。

给定了每个体元的位置及物性参数后，代入上式即求出每个体元的三重积分值，代入(3.1.8)式，求出每个体元重磁异常，累加求和，即得到整个异常体 Q 在计算点 P(位于坐标原点)引起的异常值。

最后需要指出的是，当所选的坐标轴与物探测网互不平行时，通常用坐标轴旋转变换来实现。

3.1.3 频率域正演途径

由于在地震勘探中成功地引入了傅里叶变换，从时间域导入到频率域，并在频率域里进行了各种滤波处理，提高了信噪比，并进而扩大到解释中。因此六七十年代以来在重磁勘探中也引入了波数域(即空间频率域)，它区别于从时间域转入到频率域中的地震波场。当然重磁场也有随时间变化的场，也可导出相应的频率域。然而在许多文章中，许多人还是混用这一名词，把由空间域转换而来的波数域称为频率域，应承认还不是十分严格的，严格地讲应是空间频率域或称波数域。

重磁异常在空间域内坐标通常是 x、y 和 z，相应的波数域内坐标是圆波数 u、v 和 ν。但最常用的一维谱和二维谱，若用傅里叶变换表示则有

$$S_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$S_g(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.14}$$

式中　ω—— 一维谱情况下圆波数；

u, v—— 二维谱情况下圆波数；

$g(x), g(x,y)$—— 分别为空间域中重力场；

$S_g(\omega), S_g(u,v)$—— 分别为波数域中重力场的一维谱和二维谱。

和其他波谱一样，一般情况下重磁异常波谱是复谱 $S(u,v)$，它有其振幅谱 $A(u,v)$、相位谱 $\phi(u,v)$ 及其功率谱 $S_\omega(u,v)$。

$$S(u,v) = \mathrm{Re}S(u,v) + i\mathrm{Im}S(u,v)$$

$$A(u,v) = |S(u,v)| = \{[\mathrm{Re}S(u,v)]^2 + [\mathrm{Im}S(u,v)]^2\}^{1/2}$$

$$\phi(u,v) = \mathrm{arctg}\left[\frac{\mathrm{Im}S(u,v)}{\mathrm{Re}S(u,v)}\right]$$

$$S_{\omega}(u,v) = |S(u,v)|^2 = [\mathrm{Re}S(u,v)]^2 + [\mathrm{Im}S(u,v)]^2 \tag{3.1.15}$$

式中　$\mathrm{Re}S(u,v)$ 和 $\mathrm{Im}S(u,v)$ 分别为复谱 $S(u,v)$ 的实部和虚部

求取重磁场波谱的主要途径为：

(1) 直接通过求空间域场傅氏变换获取重磁场波谱

由于重磁勘探直接观察到的是空间域的场，利用傅氏变换导出其波数域(也称频率域)的波谱(频谱)，重磁场波谱是一个复谱，它包括有振幅谱和相位谱两个内容，在正反演中都有其独特的作用。

(2) 各种形体重磁场理论波谱的计算

① 对各种形体理论的空间域重磁场表达式进行傅氏正变换

由于傅氏正变换中截断效应和边界效应，这种方法会影响理论波谱的完整性和真实性。

② 导出各种形体的重磁场理论波谱公式

由于波数域内特有的性质，可以容易地从一些基本形体的重磁场理论波谱导出其他形体的重磁波谱，其中还包括可以得到比空间域表达式简单得多的物性不均匀时任意形体的重磁场波谱。

(3) 利用波数域谱求出空间域重磁场

当地质体形状较复杂、个数多和物性不均匀时，利用空间域计算重磁场往往计算量大或比较困难。此时一个实用的方法是先计算其波谱，然后进行反傅氏变换，求得其空间域的场。这种途径在计算界面重磁场时常常使用。

3.1.4　任意形体重磁异常波谱的计算

对于二度体的重磁异常波谱，文献中等较好地解决了。对于三度体，可以利用长方体组合等形式，1978 年 Pederson 提出以三角形组合面为表面的多面体重磁异常谱的表达式，但计算量较大。地矿所吴宣志同志推导了任意指向的均质直线段、多边形面和多面体的重磁异常谱的表达式，利用它可以较快地进行各种不规则三度体重磁异常谱的正演计算。现分别介绍上述有关文献中基本思想及做法。

1. 规则形体重磁异常波谱特点

总结规则形体的重磁异常波谱可写出以下通式

$$S(u,v) = C \cdot B(u,v)D(u,v)H(u,v)E(u,v)F(u,v) \tag{3.1.16}$$

式中　C—— 常数项，它与场参数、形状、物性等有关；

$B(u,v)$—— 水平尺寸因子，与物体水平长度有关；

$D(u,v)$—— 方向因子，对重力场仅与物体倾斜方向、测量方向有关；对磁场来讲，除这些外还与磁化方向有关；

$H(u,v)$—— 深度因子，它与物体顶、底面埋深或者中心埋深有关；

$E(u,v)$—— 位移因子，它与坐标原点有关，当坐标原点位于物体中心正上方时，计算点又正位于坐标原点，位移因子为 1，否则为 $e^{i(ux_0+vy_0)}$，这 x_0 和 y_0 分别为计算点与物体中心的 x，y 方向上距离。

$F(u,v)$—— 波数因子,它与所测场参量、形状有关。

从上式可看出重磁异常波谱数的几个特点:

(1) 表达式简单,便于正演计算。

(2) 各参数和深度、位移、方向等都以独立形式出现,在对数域中都是线性函数,便于反演。

(3) 层次分明,便于进行场的转换。

(4) 基本形态由以角指数形式出现的深度因子所决定,水平尺寸因子、波数因子等,仅仅是对指数函数基本特征加以改造。

(5) 从深度因子分析,它以 $e^{-\omega h}$ 或 e^{-sh} 出现,与波数密切相关,有可能利用它设计滤波器分离浅层异常体。

(6) 振幅谱曲线的图形,按其特征大致可分为连续型、周期脉动型和过渡型。不同形状重磁异常波谱曲线特征不同,所以据此也可判断磁性体的形状。上述各类振幅谱图形举例如下(见表 3.9):

(7) 相位谱曲线图形,按其特征可分为直线型和脉动型两种。据此可判别形体、倾斜方向、磁化方向及位移情况。

(8) 无论是二度体还是三度体,其振幅谱具有"参数分离,因子相乘"形式,它与方向完全无关,而相位谱则具"参数分离,因子相乘"形式,仅与位置、投影、方向有关。

有任意指向的均质直线段、多面形面和多面体重磁异常的谱解析表达式,可解决不规则三度体重磁谱的计算问题。有时为了尽可能用一个或几个规则形体逼近场源,任意指向的斜平行六面体也是比较理想的模型,计算它的谱也是有实际意义的。这些表达式结构简单,便于计算,无论场的正、反演,计算都是比较方便的。

先作以下几点规定:

(1) 以下讨论都假设观测面就是 $x—y$ 坐标面(有时也简称地面),而 Z 轴指向下,场源在下半空间,讨论的波谱就是地面异常 $U(x,y)$ 对变量 x,y 的傅里叶变换式 $\widetilde{U}(u,v)$,并且采用以下傅里叶变换定义

$$\widetilde{U}(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int U(x,y)e^{-i(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.17}$$

$$U(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \widetilde{U}(u,v)e^{i(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}y$$

(2) 由于我们只讨论均匀物性的情形,故仅需讨论重力异常 Δg 的谱 $\Delta\tilde{g}$。至于沿着某方向 j 磁化的源体的磁场,其磁场强度 e 方向分量 T_e 的谱 $\tilde{T}_e$ 可由泊松公式给出

$$\tilde{T}_e = \frac{J}{G\sigma}\frac{K^T e K^T j}{K^T Z}\tilde{\Delta} g \tag{3.1.18}$$

式中 G—— 万有引力常数;

$K^T = (i,u,i,v,\sqrt{u^2+v^2})$ 表示一个行向量;

e,j—— 分别为相应方向上单位向量(列向量);

Z——z 方向的单位向量。

(3) 在论及某一确定方向时,我们常用某些小写字母来表示,例如 α,它在 x-y-z 坐标系中可以用它的三个方向余弦 $\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$ 来定义,记作 $\alpha=(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$。在不致造成混淆的情形

下，同一个符号有时也用来记相应的列向量，即

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

如(3.51)式中，

$$K_j^T = (i,u,i,v,\sqrt{u^2+v^2}) \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$$= i(uj_x + vj_y) + \sqrt{u^2+v^2}\, j_z$$

$$K^T Z = (i,u,i,v,\sqrt{u^2+v^2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{u^2+v^2}$$

2. 任意指向的斜平行六面体的重力谱

选取平行六面体 Ω 顶面某一角点，记着 $Z_1 = (x_1, y_1, z_1)$。通过 z_1 的三条棱边长为 $2L$，$2M$ 和 $2N$。与这三条棱边平行有三个单位向量 α, β, γ。

包含 z_1 和 α, β 的侧面上角点编号为 Z_1、Z_2、Z_3 和 Z_4，其中 Z_1Z_2 指向 α，Z_1Z_3 指向 β，其相对应侧面上角点编号为 Z_5、Z_6、Z_7 和 Z_8，六面体中心记作 $Z_c = (x_c, y_c, z_c)$。在 Ω 内均匀散布密度为 σ 的质量。

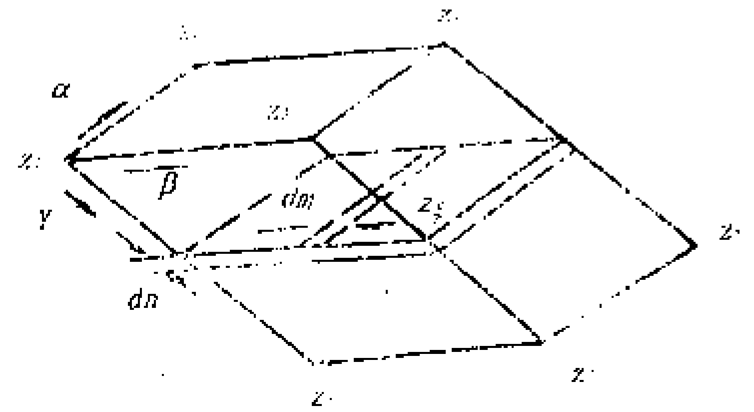


图 3.1.7　斜平行六面体

重力谱的解析表达式

$$\tilde{\Delta}g(u,v) = \frac{2\pi G\sigma(\alpha\beta\gamma)}{K^T\alpha K^T\beta K^T\gamma} \exp(-K^T Z_c)\,[\exp(K^T\alpha L) - \exp(-K^T\alpha L)]$$
$$[\exp(K^T\beta M) - \exp(-K^T\beta M)][\exp(K^T\gamma N) - \exp(-K^T\gamma N)] \qquad (3.1.19)$$

上式是一个相当简洁和易于计算的表达式。它的结构简单，除了一个与物性参数等常数有关的公共因子及质心位置 z_c 的指数函数项以外，α, β, γ 方向及其延伸长度分别构成三个形为指数函数差的项，且相互独立。这就为正演，特别是反演工作创造了有利条件。

将三个方括号展开并乘以 $\exp(-K^T Z_c)$ 项，得到斜平行六面体重力谱另一种形式的解析表达式：

$$\tilde{\Delta}g(u,v) = \frac{2\pi G\sigma(\alpha\beta\gamma)}{K^T\alpha K^T\beta K^T\gamma}\,[\exp(-K_{z_1}^T) - \exp(-K_{z_2}^T) -$$
$$- \exp(-K^T Z_3) + \exp(-K_4^T Z) - \exp(-K^T Z_5) +$$
$$+ \mathrm{epx}(-K^T Z_6) + \exp(-K^T Z_7) - \exp(-K^T Z_8)] \qquad (3.1.20)$$

特例：当 $\alpha = (1,0,0)$，$\beta = (0,1,0)$，$\gamma(0,0,1)$，即为直立长方体的情形。

$$K^T\alpha = iu, \qquad K^T\beta = iv$$

$$K^T\gamma = \sqrt{u^2+v^2}, (\alpha\beta\gamma) = 1$$

$$\tilde{\Delta}g(u,v) = \frac{2\pi G\sigma}{\sqrt{u^2+v^2}} \exp(-K^T Z_c) \cdot$$
$$\frac{e^{iuL} - e^{-iuL}}{iu} \cdot \frac{e^{ivM} - e^{-ivM}}{iv} \times (e^{\sqrt{u^2+v^2}N} - e^{-\sqrt{u^2+v^2}N})$$
$$= \frac{2\pi G\sigma 4LM}{u^2+v^2} \cdot \frac{\sin(uL)}{uL} \cdot \frac{\sin(vM)}{vM} \cdot (e^{-\sqrt{u^2+v^2}h_1} - e^{-\sqrt{u^2+v^2}h_2}) \tag{3.1.21}$$

式中

$$h_1 = Z_c - N, \quad h_2 = Z_c + N$$

此即 Bhattacharyya 的结果。

而 Ω 内密度分布服从指数分布

$$\sigma = \sigma_c \exp[-\mu(\zeta - \zeta_c)]$$

重力谱表达式如下：

$$\tilde{\Delta}g(u,v) = \frac{2\pi G(\alpha\beta\gamma)}{(K^T\alpha + \mu\alpha_z)(K^T\beta + \mu\beta_z)(K^T\gamma + \mu\gamma_z)}$$
$$\times \{\sigma_1\exp(-K^T z_1) - \sigma_2\exp(-K^T z_2) - \sigma_3\exp(-K^T z_3) +$$
$$\sigma_4\exp(-K^T z_4) - \sigma_5\exp(-K^T z_5) - \sigma_6\exp(-K^T z_6) +$$
$$\sigma_7\exp(-K^T z_7) - \sigma_8\exp(-K^T z_8)\} \tag{3.1.22}$$

以上 $\sigma_i = \sigma_c\exp[-\mu(\zeta_i - \zeta_c)]$ 为 Z_i 处密度值。

3. 磁异常波谱的解析表达式

(3.1.20) 式代人(3.1.18) 式得均匀磁化平行六面体的磁异常谱分别为

$$\tilde{\Delta}T_e(u,v) = \frac{2\pi JK^T eK^T j(\alpha\beta\gamma)}{\sqrt{u^2+v^2}} \exp(-K^T Z_c)$$
$$\times \frac{\exp(K^T\alpha L) - \exp(-K^T\alpha L)}{K^T\alpha} \times \frac{\exp(K^T\beta M) - \exp(-K^T\beta M)}{K^T\beta}$$
$$\times \frac{\exp(K^T\gamma N) - \exp(-K^T\gamma N)}{K^T\gamma} \tag{3.1.23}$$

3.2 重磁异常的反演

重磁异常反演方法众多，本节仅讨论界面迭代反演、界面直接反演和正则化非线性反演，有关最优化反演将在下节中介绍。

3.2.1 界面迭代反演

起伏的密度(或磁性) 界面可视为无限延深直立棱柱体的组合，每个棱柱体以观测点为中心投影，各顶面具有不同埋深，横向水平尺寸分别等于点、线距。由于顶面埋深随 x，y 变化而变化，构成了一个任意起伏的密度(或磁性) 界面。以下以重力的密度界面为主说明方法。

1. 重力界面类型和波数域正演

在重力勘探中一般采用矩形网格(测线距 Δy，测点距 Δx)，因此用边长为 $\Delta x \times \Delta y$ 的矩形直立柱体组合来模拟重力的密度界面是适宜的(见图 3.2.1)。我们选择一个参考界面 z_0

作为柱体的公共底面，顶面即为该坐标位置的平均界面高程 z_{ij}，这种模型尺寸对于反演来说也是很好的，因为其结果即是每一个测点得到一个界面深度(高程)数据。

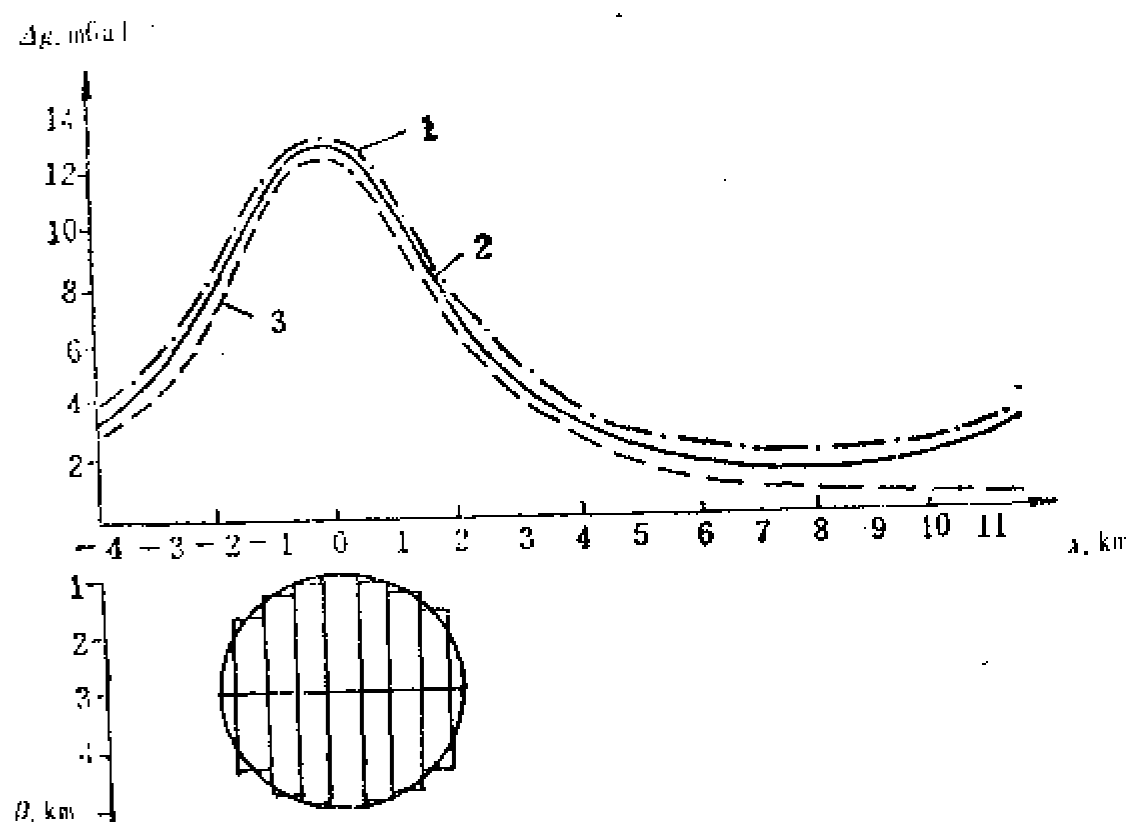


图 3.2.1 球体重力异常计算对比

1— 理论球谱计算；2— 组合体谱计算；3— 理论球体异常

关于矩形直立柱体的波谱表达式在上节中讨论过，我们定义重力异常 $\Delta g(x,y,z)$ 的一维、二维富氏变换为 F^1, F^2，对应于 x, y 的波数域坐标变量为 u, v(圆波数)。对于直立长方柱体

$$F^2(u,v,0) = -2\pi G\sigma \frac{1}{uvs}(e^{-ju\xi_1} - e^{-ju\xi_2} \cdot (e^{-jv\eta_1} - e^{-iv\eta_2}) \cdot (e^{-S\zeta_1} - e^{-S\zeta_2}) \quad (3.2.1)$$

式中 G—— 引力常数；

σ—— 密度差；

$S = \sqrt{u^2 + v^2}$。

如将坐标原点置于直立长方体中心正上方，则有

$$F^2(u,v,0) = 8\pi G\sigma \frac{1}{uvs} \sin u\xi \sin v\eta (e^{-S\zeta_1} - e^{-S\zeta_2}) \quad (3.2.2)$$

我们研究的是界面模型，由一系列直立柱体组合而成，应用线性叠加原理，其波谱为

$$F^2(u,v,0) = 2\pi G\sigma\Delta x\Delta y \cdot \frac{\sin\left(\frac{u\Delta x}{2}\right)}{\frac{u\Delta x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{v\Delta y}{2}\right)}{\frac{v\Delta y}{2}}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{e^{-zij\sqrt{u^2+v^2}} - e^{-z_0\sqrt{u^2+r^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot e^{-j(udx+vdy)} \quad (3.2.3)$$

dx, dy—— 每个柱体中心的平面坐标。

j—— 虚数单位

这个公式适用于离散傅里叶变换。这里

$$
\left.\begin{array}{l}
dx = j_1 \times \Delta x; \quad dy = i_1 \times \Delta x \begin{pmatrix} i_1 = 0,1,\cdots,M-1 \\ j_1 = 0,1,\cdots,N-1 \end{pmatrix} \\
u = j \times \Delta u; \quad v = i \times \Delta v: \begin{pmatrix} i = 0,1,\cdots,M-1 \\ j = 0,1,\cdots,N-1 \end{pmatrix}
\end{array}\right\} \tag{3.2.4}
$$

$$
\Delta x \cdot \Delta u = \frac{1}{N}; \quad \Delta y \cdot \Delta v = \frac{1}{M}
$$

图3.2.1是一个球体模型，半径 $r = 2\text{km}$，球心埋深 $z_0 = 3\text{km}$，密度差 $\sigma = 0.5\text{g/cm}^3$，计算表明由组合柱体波谱反傅氏变换得到的重力场与理论场符合较好。

2. 重力界面迭代反演

重力界面迭代反演的基本方法是首先选定一种计算模型结构，并根据重力资料确定一个初值界面，然后正演计算出重力值。利用计算值与观测值的差值(剩余值)修正界面，然后再正演计算重力值，根据比较结果再作修正。这样一次一次地迭代，直到计算值与观测值的差值(或均方误差)达到预定指标，得出最终界面结果。这里关键的问题是如何修正，因为它直接影响迭代收敛速度和结果的正确性。此外，正演计算方法的精度也影响成果。修正方式一般采用经验公式，而且迭代次数需要较多，占用计算机的时间更长。采用波数域正演方法可以简化计算过程，缩短计算时间。如果进一步改进修正方式，将会使迭代次数减少很多。

这里选用了 Gerard 的方法。先选一个参考平面 z_0，界面相对参考面的偏离值 ZD 与重力场的关系用下述公式表示

$$
ZD = (\mathrm{d}g + vzz \times Z_0)/k\sigma \tag{3.2.5}
$$

这里 $k\sigma = -2\pi G_{\sigma 0}$ 上式中加进了垂直梯度一项，比起直接用近似公式 $ZD = \mathrm{d}g/-2\pi k\sigma$ 要合理得多。如果我们在上式中采用观测值 $\mathrm{d}g_0$ 和与其相应的 V_{ZZ0}，就可以得到初值界面(见图3.2.2)。

$$
dZ_{ij} = Z_0 + ZD_{ij} \tag{3.2.6}
$$

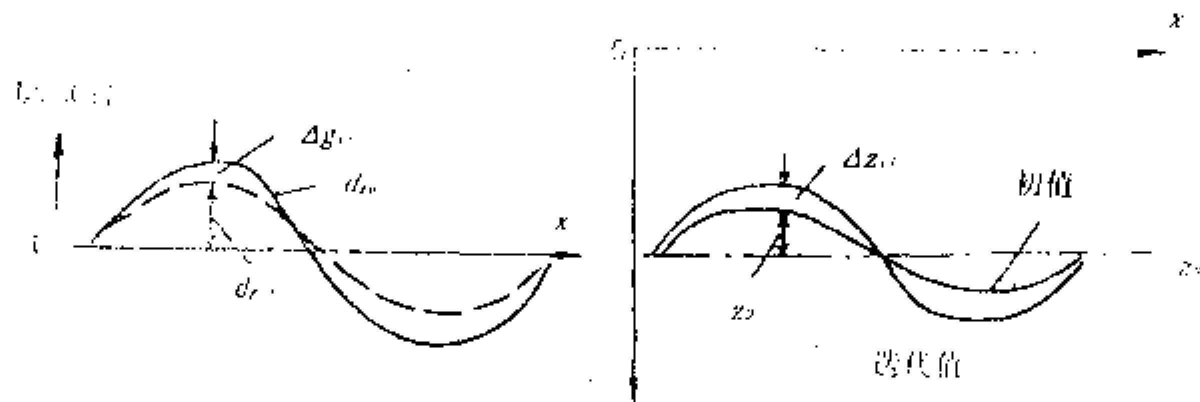


图3.2.2 界面迭代情况

这里，ZD 向上为负，向下为正。因此当密度差 σ 为正时上面 k_σ 取负值。利用剩余值进行修正仍用式(3.2.5)式原理，有

$$
\Delta Z_{ij} = (\Delta g_{ij} + \Delta V_{zij} \times \mathrm{d}z_{ij})(-k\sigma) \tag{3.2.7}
$$

这里，$\Delta g_{ij} = \mathrm{d}g_{ij} - \mathrm{d}g_{0ij}$，因此 $k\sigma$ 要改符号。

这种迭代在波数域容易实现，如果从地质资料或地震勘探资料可以精确知道基准点的埋藏深度。参考平面 Z_0 的初值就根据基准点来选定。用迭代公式：

$$Z_0' = DZ_{基} - (dg_{0基} + Z_0 V_{z0基})/k\sigma \qquad (3.2.8)$$

迭代几次就可以求出符合要求的 Z_0，整个算法的计算步骤如下：

(1) 对原始观测记录 dg_{00} 求平均值，然后相对平均值求出差值 dg_0（即归零化后异常）；

(2) 用 RFT（实数序列的傅里叶变换）求得原始重力异常的波谱(A_0, B_0)；

(3) 经波数域处理和逆 RFT 求得 V_{ZZ0}；

(4) 根据基准点深度值 dZ_{ij} 和密度差值 σ 确定参考平面 Z_0；

(5) 由 d_{g0}, V_{ZZ0} 和 Z_0 求出初值界面，并根据初值界面求得重力异常谱 A, B；

(6) 将剩余波谱值 $\Delta A = A - A_0, \Delta B = B - B_0$ 作为修正依据，并逐次修正这个剩余值；

(7) 在每次迭代中，由 $\Delta A, \Delta B$ 经逆 RFT 变换求得 Δg，同时求得 ΔV_{ZZ}；

(8) 统计 $RQ_G = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta g}{MN}}$ 和 $RQT = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta V_{ZZ}}{MN}}$（$MN$ – 总点数）并用 $RQZ = (RQG + RQT \times Z_0)/k\sigma$ 作为高程误差估计；

(9) 根据 Δg 和 ΔV_{ZZ} 用(3.2.7)式修正界面，并且同时根据界面深度修正值正演修正 ΔA、ΔB；然后回到第(7)步，如果 RQG 已达到预定要求，则迭代结束。其界面深度为

$$dZ_{ij} = Z_0 + \sum_1^l (ZD_{ij})_l \qquad (l\text{—— 迭代次数})$$

(10) 在上述迭代过程中，如果基点的迭代值与基准值的差超出要求，则要改动参考平面 Z_0。

$$Z_0' = Z_0 + dZ_{基迭} - dZ_{基}$$

然后用 Z_0' 和当次的 dz_{ij} 迭代结果作为新的初值进行正演计算求得 A, B，再回到第(6)步重新求剩余值，进行新的迭代修正过程。

为了检验算法，曾设计了一个理论界面模型(3.2.3a) σ 取 0.2g/cm^3，反演时取一基准点(7.7)，$dZ_{基}$ = 1.0km，Z_0 初值取 4km，迭代反演结果见图 3.2.3b 与理论界面符合很好，说明

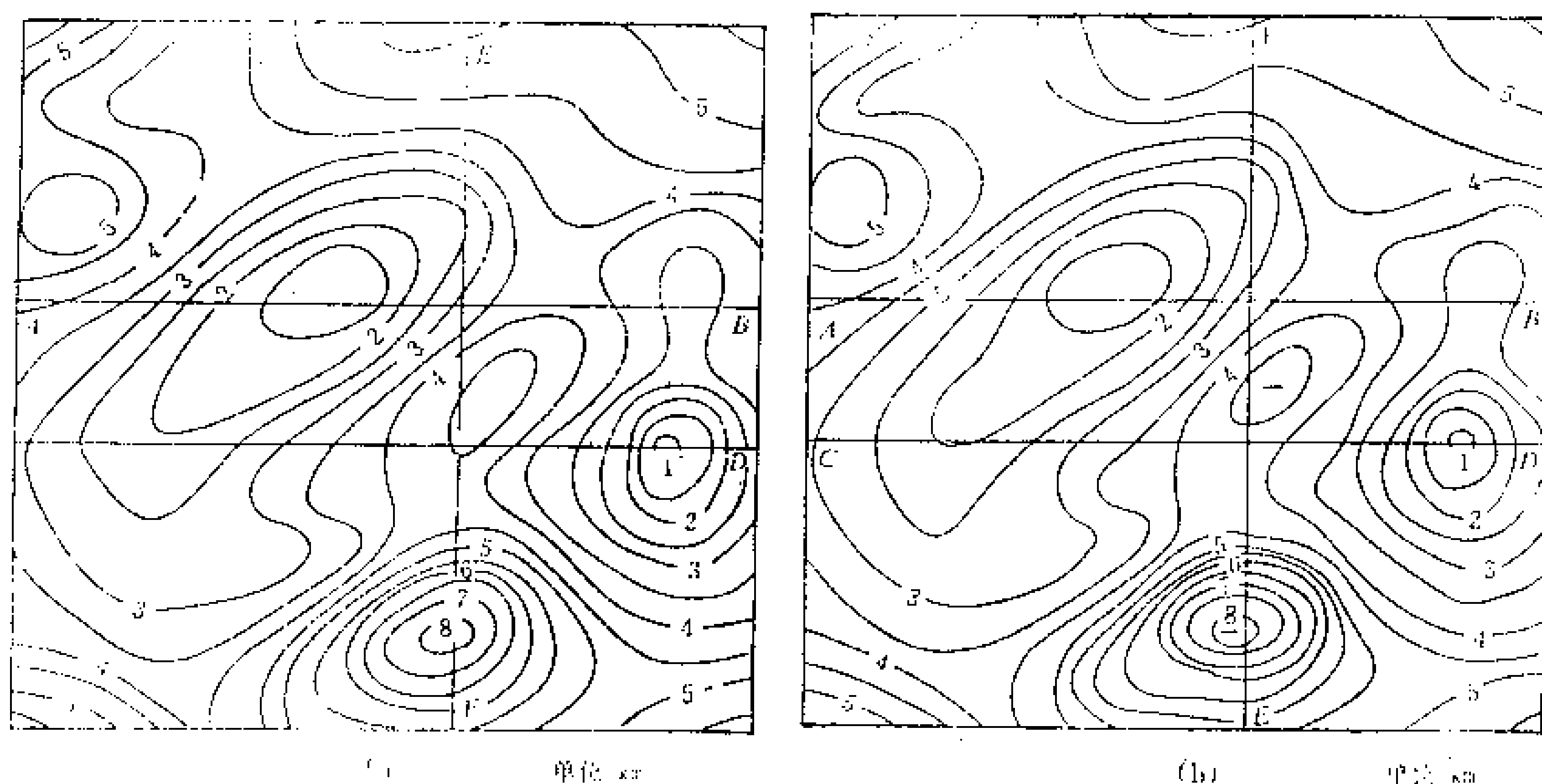


图 3.2.3　波数域迭代反演模型试验

a— 理论界面；b— 迭代结果

了在理论条件下，精度是高的。

在文献中也讨论了磁性界面，但使用的方案是先把磁场转换成磁位，然后应用上述适合于重力场的迭代法对磁位反演，求出相应的磁性界面。

3.2.2 界面直接反演法

1. 矩阵法

它属于线性反演方法之一。

我们知道，一般的重力场可表示成

$$\Delta g(x,y,z) = G\iint_v\int \sigma(\xi,\eta,\zeta)\frac{(z-\zeta)}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

其中
$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

若将场源划分为许多小体积元，如图 3.2.4 所示，每个体元剩余密度视为均匀，此时上式可表示成

$$\Delta g(x,y,z) = \sum_k \sigma_k \int_v\iint_k f\frac{(z-\zeta)}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{3.2.8}$$

$$\Delta g_j = \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\cdot H_{jk}\quad (j=0,1,\cdots,M-1) \tag{3.2.9}$$

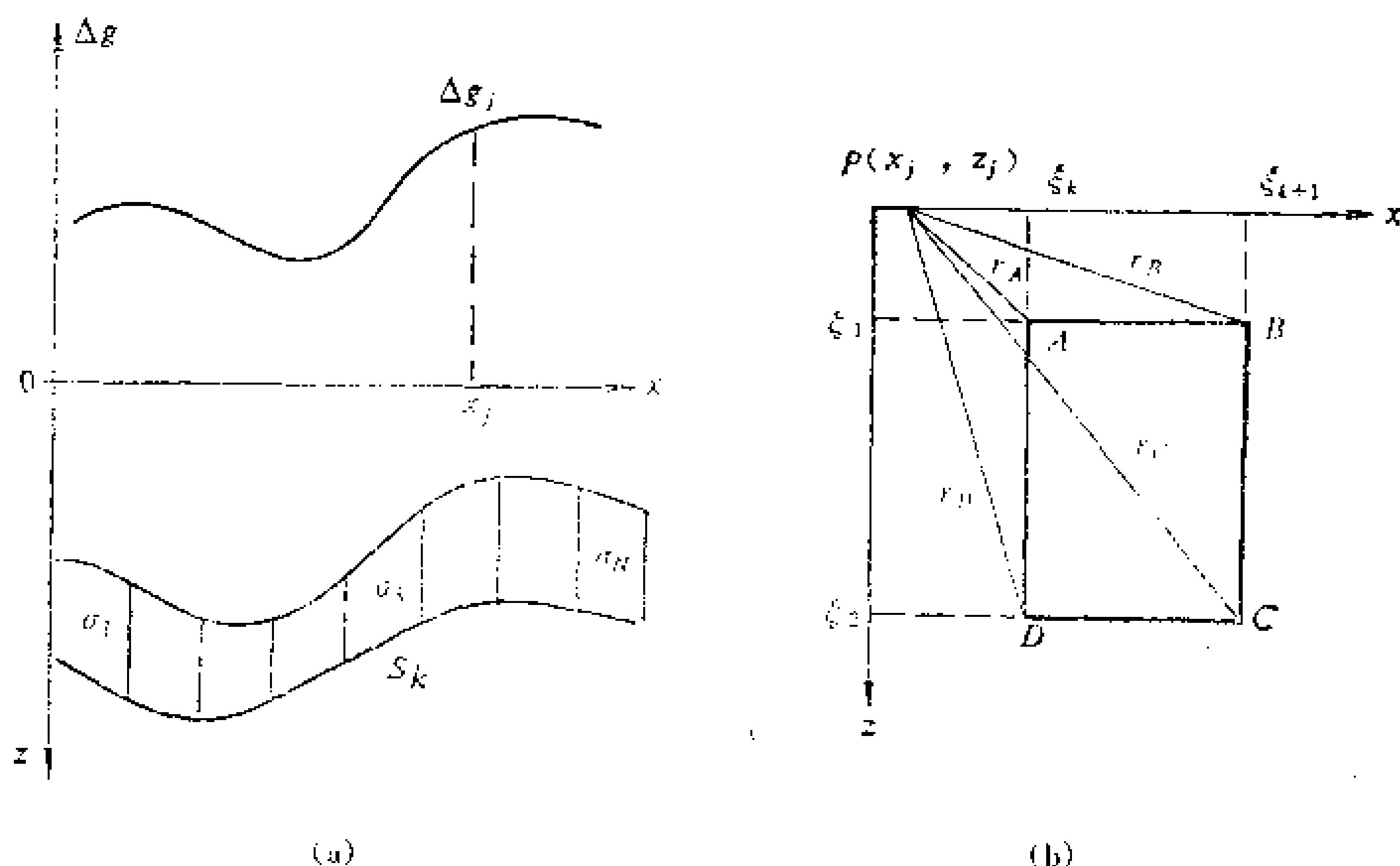


图 3.2.4 矩阵法模型

a— 界面模型；b— 二度矩形水平柱体元

其中，$H_{jk} = G\int_v\iint_k \frac{(z-\zeta)}{r^8}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$ 称为核函数，它表示了第 k 个体元对第 j 点积分值；g_j 为第 j 点重力值。

将式(3.2.9)写成矩阵形式

$$\boldsymbol{HP} = \boldsymbol{G}' \tag{3.2.10}$$

式中 $\boldsymbol{G}'$—— 为重力值向量；

P—— 为密度向量；

H—— 为核系数矩阵。

我们目的是解出密度，因此当 $M = N$ 时

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}' \tag{3.2.11}$$

当 $M > N$ 时有，用最小二乘法

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G} \tag{3.2.12}$$

利用图 3.2.4 所示理论模型，核函数形式为

$$H_{jk} = 2G\left[(\xi_{k+1} - x_j)\ln\frac{r_C}{r_B} - (\xi_k - x_j)\ln\frac{r_D}{r_A} + (\zeta_2 - z_j)\varphi_{CD} - (\zeta_1 - z_j)\varphi_{BA}\right]$$

由此说明，核函数是坐标点 $P(x,z)$ 和理论模型几何形状的函数。

应用这种方法，在用其他资料求得密度层的深度和厚度之后，计算出核函数 H_{jk}，在这种情况下，就可求得密度层中密度变化，作构造断面的分层对比。

在单一界面情况下，可以认为重力值由平均深度为 h，假想面密度为 μ 的界面所引起，在二度情况下，可以将界面分成宽为 $2b$ 的 N 个条带，每个条带引起重力值为

$$\begin{aligned}\Delta g &= 2G\mu_k\int_{-b}^{b}\frac{h\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2 + h^2}\\ &= 2G\mu_k\left[\operatorname{arctg}\frac{(x-\xi)+b}{h} - \operatorname{arctg}\frac{(x-\xi)-b}{h}\right]\end{aligned}$$

第 k 个条带在第 j 个点引起重力值为

$$\begin{aligned}\Delta g(x_j) &= 2G\mu_k\left[\operatorname{arctg}\frac{(x_j-\xi_k)+b}{h_k} - \operatorname{arctg}\frac{(x_j-\xi_k)-b}{h_k}\right]\\ &= \mu_k H_{jk} \qquad (j = 0,1,\cdots,M)\end{aligned}$$

其中

$$H_{jk} = 2G\left[\operatorname{arctg}\frac{(x_j-\xi_k)+b}{h_k} - \operatorname{arctg}\frac{(x_j-\xi_k)-b}{h_k}\right]$$

所有 N 条带在 j 点引起重力为

$$\Delta g(x_j) = \sum_{k=1}^{N}\mu_k H_{jk} \tag{3.2.13}$$

(3.2.13) 式可以用矩阵形式(3.2.10)表示，其中 **P** 为假想密度 μ 的向量矩阵。因此当 $M = N$ 时，可用式(3.2.11)求解 **P**，当 $M > N$ 时，用(3.2.13)求解 **P**。在获得 μ_k 之后，再由剩余密度求出界面的深度变化：

$$\Delta h_k = \frac{\mu_k}{\sigma}$$

这即是我国通常讲的压缩质面法。

3. 线性规划法

上面讨论到把观测场与场源物性参数构成线性函数，建立起线性方程组。国内外都有人利用线性规划法对重磁异常进行线性反演，获得场源的密度分布、磁化强度分布及其边界。

(1) 原理及特点

设 x, y 轴水平，z 轴垂直向下。将地下半空间划分为许多规则的小体积单元，体积大小以其内物质的物性可视为均匀为条件。设其编号为 $j(j = 1,2,\cdots,n)$，其内物性参数为 ε_j(代

表磁化强度 J_j 或密度σ_j)。地表观测点编号为 $i(i=1,2,\cdots,m)$。则第 j 个体积单元 V_j 在地表第 i 点产生的重力场 g_{ij} 及磁场 T_{ij} 分别为

$$g_{ij}=\sigma_j\int_{vj}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v=\sigma_j G_{ij}$$

$$T_{ij}=J_i\int_{vj}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v=J_j M_{ij}$$

式中　r_{ij} 为第 j 个体积单元内体积元 $\mathrm{d}v$ 至第 i 点的距离,S 及 t 为沿磁化强度 J 及当地正常地磁场 T_0 的方向(设各体积单元的磁化强度 J_j 有共同方向)。此处 T_{ij} 代表 ΔT 磁场。

$$G_{ij}=\int_{vj}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v$$

$$M_{ij}=\int_{vj}\frac{\partial}{\partial t\partial s}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v$$

当坐标选定,体积划分后,G,M 都是可以计算的系数。于是地下 n 个体积单元在地表 m 个测点上产生的重力场或磁场构成以 σ_j 或 J_j 为未知数的线性方程组:

$$g_i=\sum_{j=1}^{n}G_{ij}\sigma_j\qquad(j=1,2,\cdots,n)\tag{3.2.14}$$

或

$$T_i=\sum_{j=1}^{n}M_{ij}J_j\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

或统写为:$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j=b_i\qquad(i=1,2,\cdots,m)\quad(j=1,2,\cdots,n)$　　(3.2.15)

式中　a_{ij}—— 系数;

ε_j—— 未知量;

b_i—— 已知值(常量)。

根据地表场的测定值,解方程组(3.2.14)即可求得地下各体积单元中的 σ_j(或 J_j)值,从而求得场源的分布情况。按当前计算技术,解线性方程组是不难做到的。

线性反演有以下特点:

① 地下场源物体不必假设为形状规则及孤立单一或物性均匀,它可以为多个、不规则形状及不均匀物性的物体;

② 地表不必设为水平,即起伏地形亦可求线性反演。因方程(3.2.14)中系数 M 及 G 均可按起伏地形计算,并不增加任何不便。方程列出后可同样求解;

③ 当地下物质磁化方向不知或磁化方向有变化时,可将 J_i 分解为 J_{xj},J_{yj},J_{zj} 三个未知数,相应的系数为

$$M_{ijx}=\int\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v$$

$$M_{ijy}=\int\frac{\partial}{\partial y\partial t}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v$$

$$M_{ijz}=\int\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}v$$

它们都是可以计算的。方程组变为

$$T_i=\sum_{j=1}^{n}M_{ijx}J_{xj}+\sum_{j=1}^{n}M_{ijy}J_{yj}+\sum_{j=1}^{n}M_{ijz}J_{zj}\quad(j=1,2,\cdots,n)\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{3.2.16}$$

(2) 线性反演的类型

重磁异常线性反演可由(3.2.15) 式写成一般线性方程组或矩阵形式

$$a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + \cdots\cdots + a_{1n}\varepsilon_n = b_1$$
$$a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots\cdots + a_{2n}\varepsilon_n = b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}\varepsilon_1 + a_{n2}\varepsilon_2 + \cdots\cdots + a_{mn}\varepsilon_n = b_m$$

即
$$A\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{b} \tag{3.2.17}$$

式中 ε_j 为地下体积单元中的物性参数;

a_{ij} 是可计算的系数;

b_i 为第 i 点的观测场值;

$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 n 维列向量;

$\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量。

实际计算时有以下三种情形:

1) $m > n$

$m > n$ 时,未知数的个数少于方程的个数,方程为超定方程,根据系数 a_{ij} 的性质,常为矛盾方程组,可用最小二乘法求解。这表示测点数多于地下体积单元数,如图 3.2.5 所示。单元体积划分原则应按以下两个条件:① 体积元的水平宽度 S 应为中心埋深 h 的 1—1.5 倍。用于磁异常反演时,应有 $S = h$,用于重力异常反演时,应有 $S = 1.5h$。满足这条件时,可将体积单元视为均匀磁化(或密度均匀)。② 为使方程组有较好的求解特性,对三层划分(三度异常) 提出要使相邻两层的单元不要上下对齐,以减小方程的病态。

2) $m = n$

方程(3.2.17) 为适定方程,即选用观测点数 m 与地下体积单元数 n 相等。这时只要系数矩阵 A 非奇异,就存在唯一解。但若观测点位置或地下体积单元划分不当,A 很可能接近奇异而导致求解困难。根据用赛德尔迭代法解适定方程时的收敛判别准则来检查,可知若将地下物质划分为在同一水平层内并列的体积单元,当各单元的水平宽度 $2b$、上顶埋深 h、垂向延深 $2l$ 与观测点距 Δx 等,满足一定条件时,可得到确定解。

以上两种情况都要求按一定准则来划分地下空间,这在实际工作中是受到限制的。

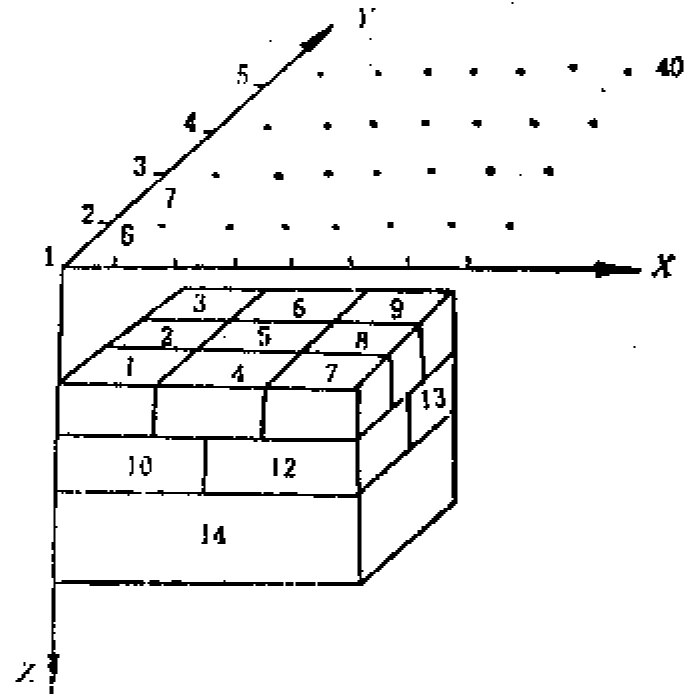


图 3.2.5 $m > n$ 的划分模型示意图 ($m = 40, n = 14$)

3) $m < n$

$m < n$ 时,未知数个数多于方程的个数,如图 3.2.6 所示。方程(3.2.17) 为亚定方程。亚定方程的解有无限个,亦即为无确定解。若采用线性规划法求满足方程又使某一物理量达到最优(极值) 条件下的解,还是确切的,有意义的。

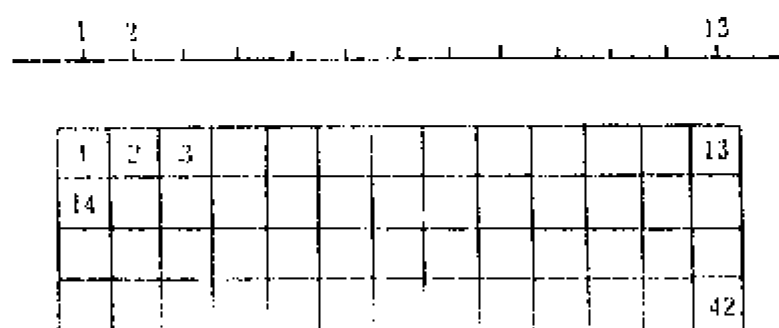


图 3.2.6 $m < n$ 的划分模型示意图
($m = 13, n = 42$)

地下体积单元划分得越密，就越有利于细致地了解地下物质的物性差异。因此求解亚定方程，在异常反演中显得更有意义。

(3) 线性规划法求异常反演

对重磁异常线性反演方程组 $m < n$ 的亚定方程组，要求得确切的解，可借助线性规划法。

方程组(3.2.15)相当于线性规划问题中的约束方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j = b_i \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{3.2.18}$$

$$m < n$$

加上约束方程 $\varepsilon_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n)$

$b_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$

即要求各子空间的物性参数 ε_j 为正值，这意味着对重力异常反演时，所取面积的下半空间，不能同时存在剩余物质和亏损物质。只要适当地选取异常范围，这是可以满足的。对磁异常反演时，只要地下物质的磁化方向大体一致，没有局部的反转磁化即可满足。约束方程(3.2.19)还要求 b_i 为正值。它是观测场值，当其为负值时，只须将(3.2.18)式中 b_i 为负值的等式两端同时改变符号，则自由项即为正号了。

关于目标函数 S，在重磁异常反演中可这样选取价格系数 c_j 来构组目标函数：

① 将 C_j 看作小体积单元，即子空间 j 内物性参数 ε_j 是否不为零的权系数。

$$S = \sum_{j=1}^{n} c_j\varepsilon_j,$$

在求 S 的极小值时，当 c_j 值越大时，相应的 ε_j 值越小。如果已由其他资料得知场源物质可能赋存的大致空间，则在相对应的子空间取较小的 c_j 值，其它子空间取大的 c_j 值。

② 无任何其它资料可参考时，可按以下步骤确定目标函数的价格系数：

a) 取 $c_j = 1$ 或 $c_j = -1, (j = 1,2,\cdots,n)$。

求 $S = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$ 或 $S' = \sum_{j=1}^{n} -\varepsilon_j$ 的极小值，也就是求地下物质的总质量或总磁矩在观测场值条件下的极小或极大量，即求场源物质总量的下限或上限。

b) 令价格系数分别为 $\pm x_j$; $\pm y_j$; $\pm z_j$ $(j = 1,2,\cdots,n)$。(x_j, y_j, z_j) 是第 j 个子空间中心的坐标。即

$$S_x = \sum_{j=1}^{n} x_j\varepsilon_j \qquad S_x' = -\sum_{j=1}^{n} x_j\varepsilon_j$$

$$S_y = \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j \qquad S_y' = -\sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j$$

$$S_z = \sum_{j=1}^{n} z_j\varepsilon_j \qquad S_z' = -\sum_{j=1}^{n} z_j\varepsilon_j$$

于是可求得场源物质分布的三个方向的一阶矩的上下限。再按下列公式求质心坐标的上限

$$\bar{x} = S_x / \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$$

$$\bar{y} = S_y / \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$$

$$\bar{z} = S_z / \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$$

可取其平均值作为场源物质中心坐标，即

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (\bar{x}_{max} + \bar{x}_{min})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{max} + \bar{y}_{min})$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} (\bar{z}_{max} + \bar{z}_{min})$$

c) 令价格系数 c_j 分别为 $\pm (x_j - \bar{x})^2$, $\pm (y_i - \bar{y})^2$, $\pm (z_j - \bar{z})^2$，求目标函数

$$S_{xx} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 \varepsilon_j$$

$$S_{yy} = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2 \varepsilon_j$$

$$S_{zz} = \sum_{j=1}^{n} (z_j - \bar{z})^2 \varepsilon_j$$

$$S'_{xx} = -\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 \varepsilon_j$$

$$S'_{yy} = -\sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2 \varepsilon_j$$

$$S_{zz} = -\sum_{j=1}^{n} (z_j - \bar{z})^2 \varepsilon_j$$

的极小值，可求得场源物质相对质心的二阶矩的上下限。可按下式求场源物质相对质心分的边界的上下限

$$\Delta\bar{x} = \overline{(x_i - \bar{x})} = (S_{xx} / \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta\bar{y} = \overline{(y_i - \bar{y})} = (S_{yy} / \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta\bar{z} = \overline{(z_i - \bar{z})} = (S_{zz} / \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j)^{\frac{1}{2}}$$

d) 由以上三个步骤求得场源物质分布边界(可选择上下限间的恰当位置)后，在此范围内重新划分子空间，再用线性规划法求场源物质分布。可令 $c_j = 1, (j = 1,2,\cdots,n)$ 或按子空间的垂向位置，将 c_j 值沿深度递减(因深部的场源物质必有较强的 ε_j 值才能与浅部者在地表产生同等的影响，故其对应的价格系数 c_j 应相应减小)。由于场源物质可能分布的范围已缩小，解出的结果精度较高。

根据上述可知，在用线性规划法解重磁异常反演问题时需要注意：

① 将所测异常面积覆盖的下部空间划分为众多的体积元时，一般取大小相同，其水平间隔与测点距相同，垂直方向的尺寸可稍大，以避免层数过多，使解的稳定性变差；

② 由公式(3.2.9)、(3.2.10)，计算系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，列出增广矩阵$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b})$。其中 b 为各点观测场值所组成的列矢量；

③ 按目标函数 $S_x, S_y, S_z, S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}$ 的极值来求场源物质分布的质心坐标及边界的上下限；

④ 求得边界范围后，按4) 所述的办法求目标函数 $S = \sum_{j=1}^{n} c_j \varepsilon_j$ 的极值解，以求在此范围内的场源物质的具体分布。

通过这些步骤可求得：场源物质总量的上下限；场源物质的质心位置；空间分布边界及其在边界内物性的具体分布。

线性规划法是求位场场源分布的一种反演方法。方法不要求地下物体单个、规则及均匀物性，但要求不同时存在亏损及剩余物质（对重力异常反演）或磁化方向无局部反转。求得结果仍为一种等效解。在求场源物质边界时，不仅可求水平边界，也同样可求垂向顶底边界，故在解决求场源物质边界问题上，将可发挥作用。

3.2.3 正则化非线性反演方法

B.И.таростенко 提出的、以垂直侧边梯形棱组的组合体为模型的正则化非线性反演法，是一个有前景的方法，理论模型证实了它的效果，但未见实例。我们研究了该方法的原理，编制了程序，通过理论模型试算，讨论了该方法的误差来源和影响因素，并通过适当处理，成功地应用于实际剖面的解释。

1. 方法原理

(1) 模型

一个二度的多层密度界面的地质模型可以近似表示为图 3.2.7a，是以多层的垂直侧边梯形为截面的二度水平棱柱组合体模型。其中，各个棱柱体的密度是不同的，便于反映密度的横向变化和纵向变化。

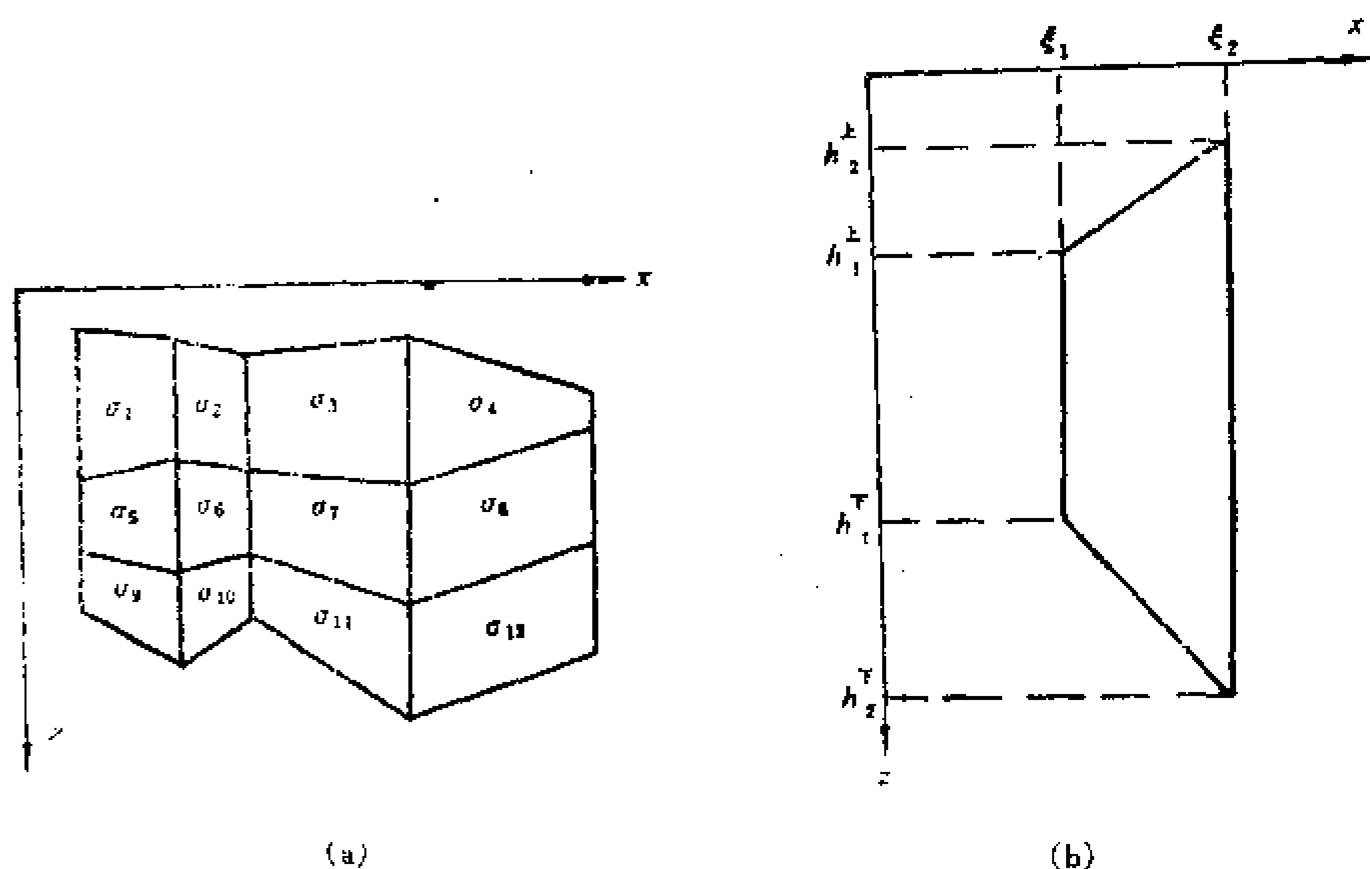


图 3.2.7 多层密度界面模型

对于其中任何一个棱柱体，它在 (x,z) 点产生的重力场可表示为

$$
\begin{aligned}
g(x,z) = G\sigma\Big\{\Big[& \xi'\ln|a_1\xi'^2 + b_1\xi' + c_1| \\
& - 2a_1\left(\frac{\xi'}{a_1} - \frac{b_1}{2a_1^2}\ln|a_1\xi'^2 + b_1\xi' + c_1| + B_1'A_1\right) \\
& - b_1\left(\frac{1}{2a_1}\ln|a_1\xi'^2 + b_1\xi' + c_1| - B_1''A\right)\Big]\Big|_{\xi'=\xi_1-x}^{\xi_2-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$- \left[\xi' \ln | a\xi'^2 + b\xi' + c | - 2a\left(\frac{\xi'}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln | a\xi'^2 + b\xi + c | + B'A\right) - b\left(\frac{1}{2a}\ln | a\xi'^2 + b\xi' + c | - B''A\right)\right] \Bigg|_{\xi' = \xi_1 - x}^{\xi_2 - x} \Bigg\} \tag{3.2.20}$$

式中　(x, z)—— 观测点坐标；

(ξ, ζ)—— 场源点坐标。

$$\xi' = \xi - x; \quad \zeta' = \zeta - z;$$
$$a = (1 + k^2), \quad b = 2kp, \quad c = p^2,$$
$$l = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad k = l(h_2^{上} - h_1^{上})$$
$$p = k(x - \xi_1) + h_1^{上} - z$$

类似有

$$a_1 = (1 + k_1^2), \quad b_1 = 2k_1p_1, \quad c_1 = p_1^2,$$
$$k_1 = l(h_2^{下} - h_1^{下})$$
$$p_1 = k_1(x - \xi') + h_1^{下} - z$$

如图3.2.7所示$(\xi_1, h_1^{上})$和$(\xi_2, h_2^{上})$为梯形上侧边顶点坐标，$(\xi_1, h_1^{下})$和$(\xi_2, h_2^{下})$为梯形下侧边顶点坐标。

此外

$$B_1'A_1 = \begin{cases} \dfrac{b_1^2 - 2a_1c_1}{2a_1^2}A_1 & 若\ p_1 \neq 0 \\ 0 & 若\ p_1 = 0 \end{cases}$$

$$B_1''A = \begin{cases} \dfrac{b_1}{2a_1}A_1 & 若\ p_1 \neq 0 \\ 0 & 若\ p_1 = 0 \end{cases}$$

$$B'A = \begin{cases} \dfrac{b^2 - 2ac}{2a^1} & 若\ p_1 \neq 0 \\ 0 & 若\ p_1 = 0 \end{cases}$$

$$B''A = \begin{cases} \dfrac{b}{2a}A & 若\ p \neq 0 \\ 0 & 若\ p = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{1}{|p_1|}\mathrm{arctg}\,\frac{2a_1\xi' + b_1}{2|p_1|}$$

$$A = \frac{1}{|p|}\mathrm{arctg}\,\frac{2a\xi' + b}{2|p|}$$

式中　G—— 引力常数；

σ—— 密度差；

g—— 重力效应。

则一点上的重力异常应为所有棱柱体对该点的重力效应之和。

(2) 基本方程

设有 k 层密度界面,每层中有 N 个棱柱体,则在第 i 点的重力效应应为

$$g_i = \sum_{v=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_v} g_{ijv} \tag{3.2.21}$$

式中 g_{ijv} 为第 v 层中第 j 个棱柱在 i 点的重力效应,如果考虑一个可以用多项式近似表示的背景场 p_{in},则可以有方程

$$f_i = \sum_{v=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_n} g_{ijv} + p_{in} = g_i \quad (i = 1,2,\cdots,M) \tag{3.2.22}$$

式中 M 为测点总数。在反演时,各个棱柱体的密度差和最上(或最下)一层界面的梯形顶点纵坐标是已知的,所有顶点的横坐标也是给定的。这样,在方程(3.2.23)中未知数总数 Q 应为

$$Q = (1 + N)\cdot k + (1 + n)$$

式中　$(1 + N)\cdot k$—— 为所求顶点的纵坐标个数;

$(1 + n)$—— 为背景场多项式系数个数。

由于所求的未知数在方程式中呈非线性形式出现,故其基本方程为非线性方程,一般取 $M > Q$。为便于计算及讨论,将方程(3.2.22)写成非线性运算方程。

$$F_x = b \qquad X \in H_2, b \in H_b \tag{3.2.24}$$

式中　b—— 观测值;

X—— 所求解;

H_2 和 H_b—— 均为希尔伯特空间;

F—— 由 H_b 正映射到 H_2 的非线性算子。

对于上述问题可以用一般解非线性方程的方法求解。

(3) 用正则化方法求解方程

在实际的重力异常中总是包含误差的,因此,用下列方程可以更恰当地表现实际的问题

$$\| F_x - b \|^2 \leqslant \delta^2$$

式中 δ 为 b 的误差,但是由于解的不稳定性,在这些解的元素中可以有与精确解差别为任意大的元素,这样就需要用正则化方法求解方程,其目的是从这一集合中选取符合一定要求的元素作为问题的解。可以从满足条件

$$\| F_x - b \|^2 = \delta^2$$

的解的集合中选取保证以下泛函极小化的元素

$$\Omega(x) = \| x - x_0 \|^2$$

式中 x_0 是解的某个初级近似。这一问题归为 A.H.Тихонов 平滑参数泛函极小化

$$\begin{aligned} f(x) &= M^{\alpha}(x,b) \\ &= \| F_x - b \| H_2^2 + \alpha \| x - x_0 \| H_B^2 \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

式中 $x_0 \in H_B$,为某个规定元素,$\alpha = \alpha(\delta) > 0$。为取决于原始场 b 的误差 δ 的二次度量的正则化参数,正则化因子 α 可以用有限级数法或牛顿切线法等求取。确定 α 后,可以用广义高斯牛顿法等极小化方法求解上述方程。对(3.2.25)式中的算子 F 在元素 x_n 邻域内展开为泰勒级数,并取前两项,求导得

$$[F'^*(x_n)F'(x_n) + \alpha_p D]x_{n+1} = F'^*(x_n)[b - F(x_n)] + F'^*(x_n)x_n + \alpha_p D x_0 \tag{3.2.26}$$

式中

$$F'(x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_m} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_M(x_n)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_M(x_n)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

F'^*——F' 的转置矩阵；

x_0——初始近似；

x_n——第 n 次近似；

x_{n+1}——第 $n+1$ 次近似。

当 $D = I$(单位矩阵)时,称为零阶正则化;如果矩阵 D 有以下结构

$$\begin{aligned} d_{i,i} &= 6.0 & i &= 1,\cdots,m \\ d_{i,i-1} &= d_{i-1,i} = -4.0 & i &= 2,\cdots,m \\ d_{i,i-2} &= d_{i-2,i} = 1.0 & i &= 3,\cdots,m \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

则称为二阶正则化。如取 $x_0 = x_n$,则得到广义高斯牛顿法。

方程(3.2.22)式的解法是对每一个 $\alpha_p(p = 1,2,\cdots)$,在(3.2.26)式中取 $n = 1,2,\cdots$ 进行迭代,满足下述条件时结束迭代

$$\max_j | x_{n+1}, \quad j - x_{n,j} | \leq \varepsilon \tag{3.2.28}$$

式中 ε 为某个预先给定的微小值。能实现(3.2.28)式的元素 $x_{n+1} = x_{\alpha p}$ 作为 $\alpha = \alpha_p$ 时泛函(3.2.25)式的解,而后转入 $\alpha = \alpha_{p+1}$ 时的求解。

(4) 正则化参数 α 的确定

A.H.Тихонов 在文献中曾讨论过求取正则化参数 α 的几个方法。这里仅使用以下两种方法。

① 有限级数法

适当选取初始值 $\alpha = \alpha_0$,然后按几何级数使

$$\alpha_{p+1} = u\alpha_p$$

式中 $0 < u < 1$,以形成一个趋于零的序列 $\{\alpha_p\}$,$p = 1,2,3,\cdots$。对每一个 α_p 求使泛函 $M_p^\alpha[x,F]$ 极小化的元素(函数)$x_{\alpha p}$,并计算误差

$$\rho H_2(Hx_{\alpha p}, b_\delta) = \| Fx_{\alpha p} - b_\delta \| \tag{3.2.29}$$

② 牛顿切线法

上述方程 $\varphi(\alpha) = \rho H_2(Fx_\alpha, b_\delta) = \delta$ 关于 α 的近似解,也可以用牛顿切线法求得。此时取 $\gamma = \frac{1}{\alpha}$,则 $\psi_1(\gamma) = \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ 为下降的和向下凸的,从而可以使它在任一初始值 $\gamma_0 = \frac{1}{\alpha_0} > 0$ 情况下收敛。牛顿切线法求根公式为

$$\gamma_{p+1} = \gamma_p - \frac{\varphi_1(\gamma_p)}{\varphi_1'(\gamma_p)} \tag{3.2.30}$$

其中 $\varphi_1'(\gamma)$ 为 $\varphi_1(\gamma)$ 的导数,求出了 γ_{p+1},则由 $\alpha_{p+1} = 1/\gamma_{p+1}$ 就可以得到 α_{p+1} 了。在条件合

适时，用牛顿切线法可以提高收敛速度。

2. 模型试算结果及其分析

(1) 模型试验结果

在计算中取正则化参数初值 $\alpha_0 = 1000$，判别误差标准分别为 $\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 0.01, \varepsilon_3 = 0.001$，误差强度为

$$\theta = \frac{\delta}{g_{max}} \times 100\%$$

式中 δ—— 为均方差；

g_{max}—— 为场极大值。

计算中常取每一个界面的平均深度值作为该界面的初始值。计算了单层、两层、三层密度界面不同类型的模型，现以一个两层模型为例，简述其试验结果。

这个二层模型(图 3.2.8)，属中部凸起、两边凹陷的构造模型，已知各块地质体密度差和顶界面深度，取 $M = 60, x_0 = -15.0, \Delta x = 1.0$，反演结果列于表 3.2.1。

表 3.2.1

γ	理论值	$\theta = 0.92\%$					
		$T-\Gamma-0$	$\eta(\%)$	$T-\Gamma-2$	$\eta(\%)$	$T-H-2$	$\eta(\%)$
2	3.0	2.856	4.80	2.848	5.07	2.715	9.50
	2.5	2.600	4.00	2.959	3.80	2.646	5.84
	2.0	2.016	0.80	2.015	0.75	2.034	1.70
	4.0	3.720	7.00	3.685	7.88	3.716	7.10
	2.5	2.741	9.64	2.768	10.72	2.693	7.72
3	4.5	4.386	2.53	4.381	2.64	4.246	5.64
	3.5	3.544	1.26	3.538	1.09	3.583	2.37
	4.0	3.941	1.48	3.953	1.18	3.896	2.60
	5.0	5.054	1.08	5.036	0.72	5.094	1.88
	4.0	3.937	1.58	3.954	1.15	4.100	2.50
$\eta(\%)$			3.42		3.5		4.69
α		0.4302		0.6360		0.9702	

从上表看出，在误差不大时，解的精度都较高，且与正则化阶次关系不大。从界面上角点位置来看，以相对误差衡量，中间比边部精度要高，下部比上部角点位置精度要高。

(2) 几点认识

① 通过模型试验初步证明，正则化非线性反演方法在研究多层密度界面时是一个行之有效的方法，在已知密度分布及已知最上或最下界面位置的限制下，可以达到较高的精度。这在缺乏直接求解多层密度界面方法的今天，更是值得推广的。

② 解的精度受着多种因素影响，其中包括已知密度分布及已知最上或最下界面位置的精度、模型与实际地质界面的差异、干扰误差的大小及其分布，区域背景场与假设多项式近似程度，求取正则化参数的方法和解方程的算法等。模型试验已经表明，干扰误差大，则解的精度随之降低，反之则提高。且误差小时，精度与正则化阶次关系不大，而误差大时，则精度与正则化阶次就有关。一般来说，阶次选大些为好，具体选多大阶次可以结合工作地区的地

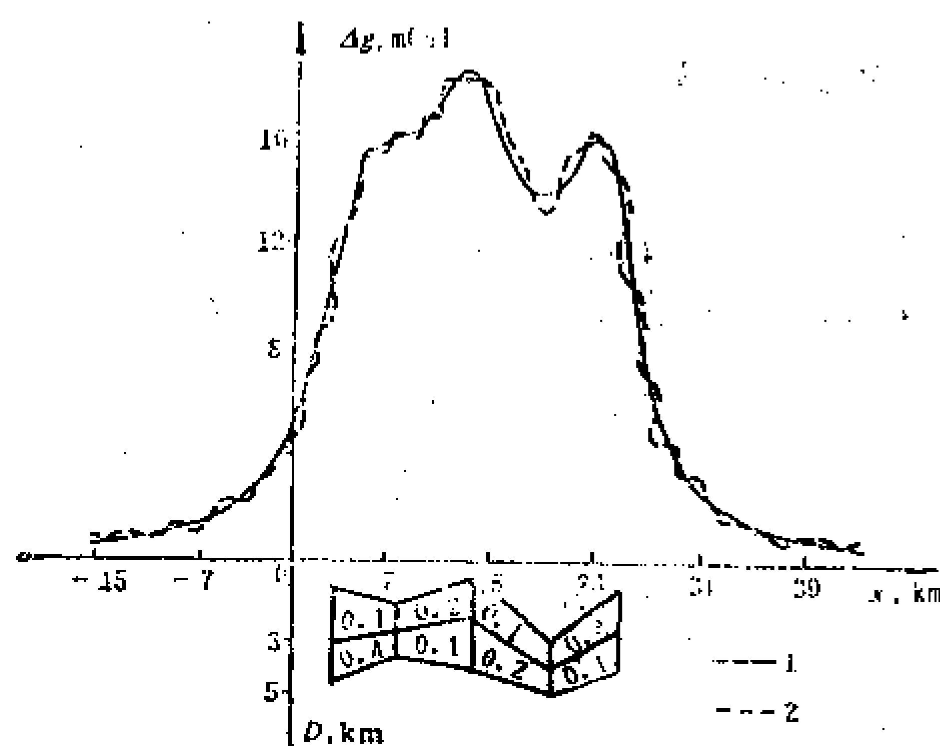


图 3.2.8 两层界面模型正则化非线性反演
1— 理论重力值；2— 含误差值

质和地球物理特点来试验确定。

③ 解的精度还与角点位置有关，不同位置的角点反演精度不一。从上述试验看出，边部比中部精度低，初步分析可能与参加拟合点的选取有关。所以如何根据所求角点深度和分布。选好取样间隔和拟合点的分布，对于保证精度是重要的。

④ 解的收敛速度与密度分布、角点的位置、正则化阶次、初始近似值的选取、误差大小和求正则化参数的方法有关。对密度和角点来说，对场贡献大的那个梯形的四个角点收敛较快；正则化阶次与收敛速度关系还与误差有关；初始近似值的选取接近于真值，收敛就快；误差小，收敛快；求正则化参数方法选择合适，收敛也快些。从我们的试算看，牛顿切线法求 α 较有限级数法好些，但牛顿切线法使用也有条件。

3.3 电磁场的正反演

电法勘探是基于岩石、矿石的电性差异，通过观测和研究天然和人工的电磁场空间和时间的分布规律，达到勘查地下地质构造和有用矿产的目的。从原理上讲，是一门应用电学和电磁学理论研究地质和地球物理的应用学科。

电法勘探方法许多，为了研究的方便，可以有不同的分类方法，例如按勘探对象，也可按场源性质，还可按时间域和频率域等等，若从理论基础，则结合异常的原因分比较好，可分为：

(1) 传导类电磁，它观测和利用的是地球中由于传导作用而产生的异常，如电阻率法、自然电场法、充电法和激发极化法等，它们与重力场与磁力场类似，满足位场理论。

(2) 感应类电法。它们观测和利用的是由电磁感应作用产生的异常如瞬变场法、大地电磁测深法、频率测深法、无线电波法等，它们满足电磁场基本方程——麦克斯韦方程，且又是一种波场，与地震波场在某些方法有相通之处。

鉴于本章着重讨论位场及电磁场的正反演问题，故本节仅以大地电磁测深法为例、介绍有关正反演的方法思路。

3.3.1 大地电磁测深法的正演计算

1. 数学物理模型

除了空间和时间上的分布、波形和能谱上的规律以外，大地电磁波在介质中的传播也是有规律的。这就是必须遵从麦克斯威方程。在实用单位制中，麦克斯威方程组如下：

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times H &= j + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot D &= q \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.3.1}$$

式中 E—— 电场强度；

H—— 磁场强度；

D—— 电感应强度；

B—— 磁感应强度；

j—— 电流密度；

q—— 自由电荷；

∇—— 哈密顿算符。

(3.3.1) 式是大地电磁场所遵循的基本微分方程式，由于大地电磁法应用的频率都很低，一般 $f < 10\text{Hz}$，这时在导电介质中的位移电流$\frac{\partial D}{\partial t}$与传导电流$j$相比可以忽略不计($\omega\varepsilon \ll \sigma$)，在谐变场 $e^{-i\omega t}$ 的情况下，假定介质无磁性($\mu = \mu_0$)，上式变为

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= i\omega\mu_0 H \\ \nabla \times H &= \sigma E \\ \nabla \cdot H &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

这里 σ 是介质的导电率，ε 和 μ 分别为介质的介电率和导磁率。

选取右旋直角坐标系的原点在地面上，z 轴指向量垂直向下，x 轴的方向平行于走向方向，即介质的电、磁性参数 σ、μ，仅是 y，z 两个坐标的函数，再加上假设场源是垂直入射的平面电磁波，这就使电磁场的各分量沿 x 方向都没有变化，即它们相对 x 的偏导数皆为零。在这些条件下，如将上式写分量形式的话，它们可分离成互相无关的两组方程式，电磁场各分量随之解耦成彼此独立的两个组，一组仅包含 H_x、E_y 和 E_z 分量，称为磁场平行($H_{/\!/}$)极化方式，另一组包含 E_x、H_y、H_z 分量，称为电场平行($E_{/\!/}$)极化方式。这两组公式分列如下：

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_y$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\sigma E_y \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{i}\omega\mu H_x$$

将每一组中的后二个公式代入第一个公式中得到：

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)}{\partial z} = \mathrm{i}\omega\mu H_x$$

$$\frac{\partial\left(-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)}{\partial z} = \sigma E_x \tag{3.3.3}$$

对于导电率 σ 和导磁率 μ 是均匀的区域来说，上面二式可简化为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

即为亥姆霍兹方程式，其中 $k^2 = \mathrm{i}\omega\mu\sigma$。

我们要借助所谓的“传输面相似对比”的方法将 $H_{/\!/}$ 和 $E_{/\!/}$ 两种极化方式的公式统一到一种形式中以便于以后的计算。同时，这样作也有助于使我们加深对电磁场物理意义的理解。

我们从人们都熟悉的电工学中的传输线方程式：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V = -\eta I \\ \nabla \cdot I = -\nu V \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

出发，式中 V 和 I 分别是沿线分布的电压和电流强度；η 和 ν 是单位长度上的分布阻抗和分布导纳参数。传输线对应的是一维问题。我们可以把这种概念推广到与二维问题相对应的情况，形成传输面的概念。

对于传输面来说，方程式(3.3.5) 可以展成如下的分量形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = -\nu V \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\eta I \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\eta I_y \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

式中 I_v 和 I_z 分别表示相应的电流密度分量。

经过推导，两种极化方式时的麦克斯韦方程组可以写成如下的统一形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z} = \nu V \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\eta I_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\eta I_y \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

上式中的各种量在两种极化方式情况下的对应含义如下表所列：

$$
\begin{array}{lll}
 & H_{/\!/}\text{ 极化方式} & E_{/\!/}\text{ 极化方式} \\
V & H_x & E_x \\
I_z & -E_y & H_y \\
I_y & E_z & -H_z \\
\eta & \sigma & -i\omega\mu \\
\nu & -i\omega\mu & \sigma \\
\dfrac{I_z}{V} & z=-\dfrac{E_y}{H_x} & \\
\dfrac{V}{I_z} & & z=\dfrac{E_x}{H_y}
\end{array}
\tag{3.3.8}
$$

从上面的讨论已可看出，大地电磁二维正演问题实质上是解偏微分方程。而要得到偏微分方程的定解，一定要给出所涉及问题的边界条件。

在求大地电磁二维正演问题的数值解时，外边界一般取为矩形，如图 3.3.1 所示。

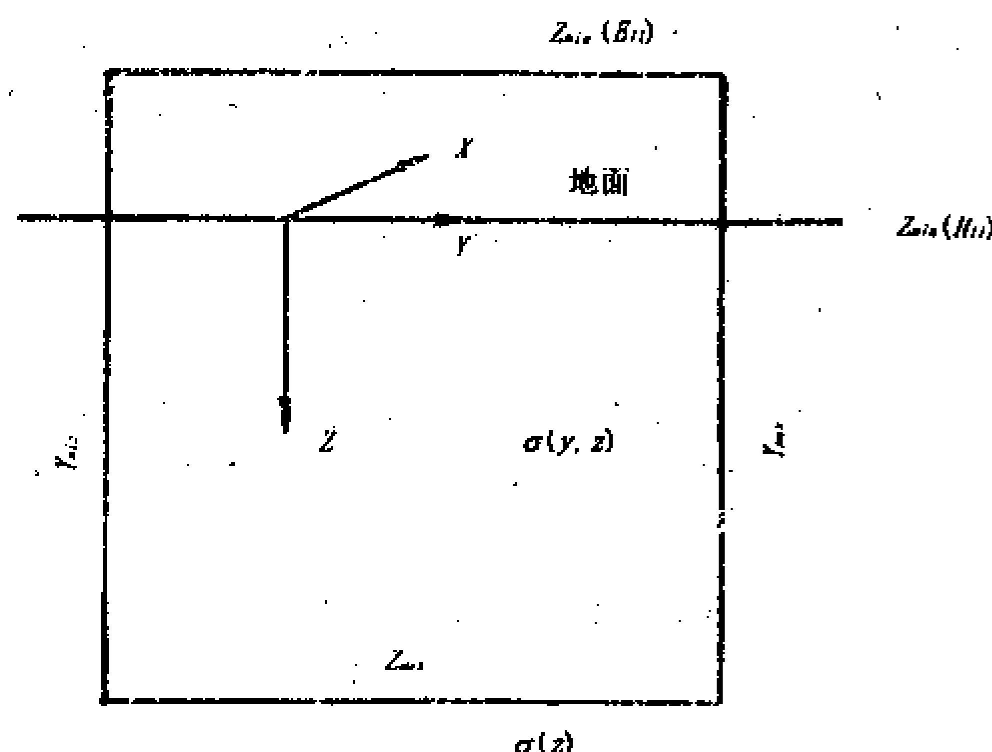


图 3.3.1　坐标系及域的边界示意图

上边界 $z = z_{min}$ 上的场分量模拟自上向下垂直入射到地球内下半空间介质中的平面电磁波场源，它沿 x, y 方向没有变化。

在 $H_{/\!/}$ 极化方式情况下，模拟传输面上的阻抗是电阻性的。而在空气中，导电率 $\sigma \to 0$，所以等效阻抗为零，也就是说在空气中，包括地面上，V 为一常数，或是说 H_x 为常数。所以可以取地球 - 空气分界面即地面作为网格的上边界，在其上 H_x 为常数。鉴于大地电磁方法中，我们所关心的是电场与磁场分量之比，而不是它们本身的大小，所以可以取为任意的常数，例如可取为 $H_x\big|_{z=z_{min}} = 1$。

在 $E_{/\!/}$ 极化方式时，情况就不同了。这时，模拟传输面上的阻抗是电感性的，因此，地下的由横向不均匀性引起的二次电磁场可以耦合到空气中，影响电磁场在空气中的分布，导致地面上的 E_x 和 H_v 分量都不是常数，而仍受到地下横向不均匀异常体的影响。由于这个原

因，上边界的取法与 $H_{//}$ 极化方式时不同，不能再取在地面上，而是要离开地面相当距离，使得地下横向不均匀异常体的影响在这个高度上已可忽略不计，因而 E_x 和 H_y 在其上都可以看成是常数，例如也可以取为1。在按后面给出的条件确定两侧的边界 y_{min} 和 y_{max} 时，一般可以选择

$$|z_{min}| \geq y_{max} - y_{min}$$

在二种极化方式情况下，下边界都应当取在其下部介质已属一维的或半无限均匀空间的地方。从方法原理已经知道，地下某一深度处的表面阻抗只与这一深度以下的介质分布情况有关，而与其上的介质性无关。由于在我们选择的下边界的下面介质已是一维的或是均匀半空间，所以下边界上的表面阻抗很容易计算出。由式(3.3.7)中看出，表面阻抗实际上是要计算的场分量 V 与其法向偏导数 $\frac{\partial V}{\partial z}$ 之比或其倒数(取决于场的极化方式)。因此，就可以在下边界上确定了第三类边界条件。

两侧的边界应取在离横向不均匀异常体足够远的地方，使得在该处电磁场沿深度的分布已可看成是与地下为一维介质时的相同。根据这种分析，可以以两种方式给出侧边界上的边界条件。一种是采用齐次的第二类边界条件，因为，在该处二次场已为零，所以显然在两个侧边界上，场分量 V 的法向导数 $\frac{\partial V}{\partial y}$ 等于零。另一种是采用强加边界条件的方式。通过计算出水平层状介质中的电磁场分布来给出边界上的值。做这种一维问题的正演计算时，边界条件由二维问题中上边界和下边界上的边界条件来给定。

由式(3.3.4)可推论，在一维介质情况下，对 $H_{//}$ 极化方式而言，在每一层均匀介质中场分量 H_x 都满足下列的常微分方程式：

$$\frac{d^2 H_x}{dz^2} + k^2 H_x = 0$$

它的一般解的形式为：

$$H_x = A\exp(ikz) + B\exp(-ikz) \quad k \neq 0 \tag{3.3.8}$$

或

$$H_x = A + B_z \qquad k = 0 \tag{3.3.9}$$

当侧边界上为均匀半空间时，由于当 $z \to \infty$ 时 H_x 应是有限的，所以要求 $B = 0$，即这时一般解应具有如下形式：

$$H_x = A\exp(ikz) = H_0\exp(ikz) \tag{3.3.10}$$

式中 H_0 是磁场分量 H_x 在地面处的值，它可由上边界上的边界条件给出。知道了 H_0 后，就可根据式(3.3.10)计算出侧边界上边界值的分布。

当侧边界上为水平层状介质时，可以采用自上而下或自下而上的方式逐层求出电磁场的分布。在采取自上而下的方式时，要先求出地面上的阻抗值。利用它可由上边界上场分量的值例如 $H_x\big|_{z=0}$ 求出该处的偏导数值 $\frac{\partial H_x}{\partial z}\Big|_{z=0}$。将这两个已知值代入式(3.3.8)，并令 $z = 0$，即可联立解出式中的两个系数 A_1 和 B_1。于是就可求出场分量在第一层中的分布。利用电磁场切线分量 H_x 及 E_y 在水平界面上的连续性，可由第一层底面处的 H_x 及 $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ 值确定出第二

层顶面处的相应值。再将它们代入式(3.3.8),又可求出对应第二层的系数 A_2 及 B_2,从而计算出电磁场分量在第二层中的分布,如此继续下去直至下边界处为止。应注意的是,在均匀下半空间中,应选用公式(3.3.10)。在采用自下而上的方式时,要利用下边界上电磁场分量的值求出式(3.3.10)中的系数 A,然后根据该公式计算出下半空间中电磁场分量的分布,直至其顶面,并计算出偏导数 $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ 在该处的值。利用 H_x 及 E_y 在水平界面上连续的条件,可以计算出上一层($n-1$)底面处 H_x 及 $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ 的值。代入式(3.3.8)后可求出对应该层的系数 A_{n-1} 及 B_{n-1}。如此继续下去,直至求出上边界处电磁场分量的值为止。

在 $E_{/\!/}$ 极化方式情况下,还要计算出空气中场的分布。空气中电场分量分布的公式应取如下形式:

$$E_x = E_0 \exp(-ikz)$$

考虑到 $k \to 0$,上式可近似成:$E_x = E_0(1-ikz)$
在空气层中可用这个公式计算场的分布。

综合上述,可以在每个边界上都写成第三类边界条件的形式。在侧边界上要求 $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0$,在上边界上要求 V 为常数,在下边界上应有:

$$\frac{I_z}{V} = \frac{-\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z}}{V} = Z_n \text{ 或 } Z_n^{-1}(\text{视极化方式而定})$$

其中 Z_n 为下边界上的表面阻抗。根据这些要求可以将四个边界条件写成如下的统一形式,即第三类边界条件的形式:

$$\begin{aligned}
z &= z_{\max}\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_1 V = \beta_1 \\
z &= z_{\min}\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_2 V = \beta_2 \\
y &= y_{\max}\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_3 V = \beta_3 \\
y &= y_{\min}\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_4 V = \beta_4
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

其中的常数分别为:

$H_{/\!/}$ 极化方式		$E_{/\!/}$ 极化方式
α_1	Z_n	Z_n^{-1}
β_1	0	0
α_2	L(是一个很大的数)	0
β_2	L	-1
$\alpha_3,\beta_3,\alpha_4,\beta_4$	0	0

在采用有限差分法时,除了外边界上的边界条件外,在网格区域内部不同介质的分界面上,电磁场分量还应满足一定的连续性条件,即通过不同介质间的垂直接触面时,H_x,μH_y,H_z,E_x,σE_y 和 E_z 这些量应当是连续的,而在通过水平接触面时,H_x,H_y,μH_z,E_x,E_y 和 σE_z 应

是连续的。当应用模拟传输面的概念时,上列连续性条件可概括成:

通过垂直接触面时,V,I_y 和 ηI_z 连续。

通过水平接触面时,V,I_z 和 ηI_y 连续。

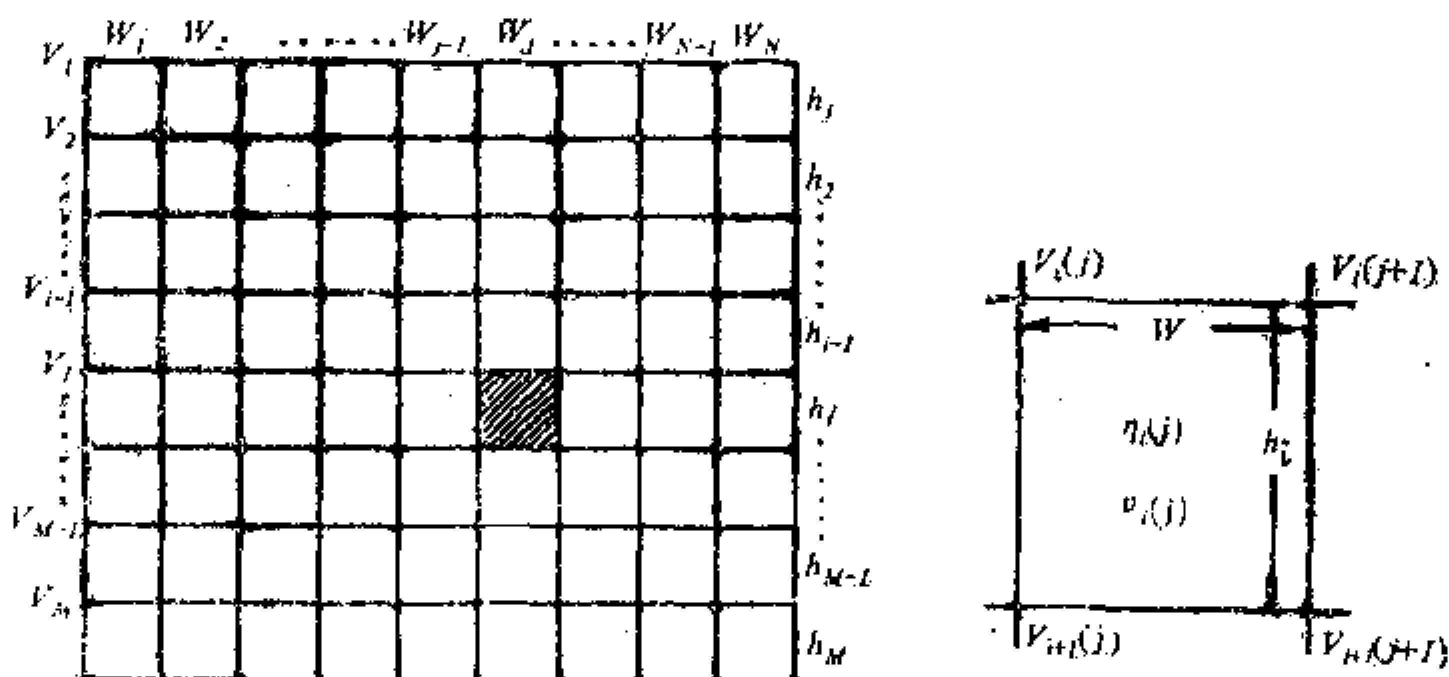


图 3.3.2　二维模型剖分示意图

2. 基于传输面相似对比的有限差分法

我们已建立起了二维模型条件下电磁场分布与模拟传输面之间的对应关系,如式(3.3.7)中所示。这种对应关系启示我们,可以利用它通过简单直观的直流电路方程式建立起网格结点处电磁场分量值之间的差分方程式。

图 3.3.2 中已剖分成网格的二维模型断面图可以根据式(3.3.7)中的对应关系转换成模拟的传输面。然后从剖分过的传输面构成近似的等价的集总元件迴路。集总电路元件的参数可利用已知的传输面上单位长度的分布阻抗和导纳值,根据如下的原则来确定:集总阻抗 η_d 正比于所沿方向上结点之间的距离,反比于该处的传输面宽度,其结果是,对非等距离划分的网格来说,垂直方向和水平方向的阻抗会是不同的,同方向相邻格子上的阻抗也可能是不等的。集总导纳 ν_d 正比于所论结点附近的表面面积。在网格的底部边界处,当其以下为无限延伸的半均匀空间时,可以用传输线理论中的特性阻抗作为分布阻抗,它由下式给出:

$$\eta_t = \sqrt{\frac{\eta}{\nu}}$$

这种边界条件与上一段中论证过的下边界上的边界条件是一致的。已知 $H_{//}$ 极化方式时,下边界上的边界条件为:

$$Z = \frac{-E_y}{H_x} = \sqrt{-\mathrm{i}\omega\mu/\sigma}$$

由(3.3.7)有如下对应关系:

$$Z = \frac{-E_y}{H_x} = \sqrt{-\mathrm{i}\omega\mu/\sigma} \Leftrightarrow \frac{I_z}{V} = \sqrt{\frac{\nu}{\eta}} \tag{3.3.12}$$

根据上述,模拟传输面底部的边界条件为:

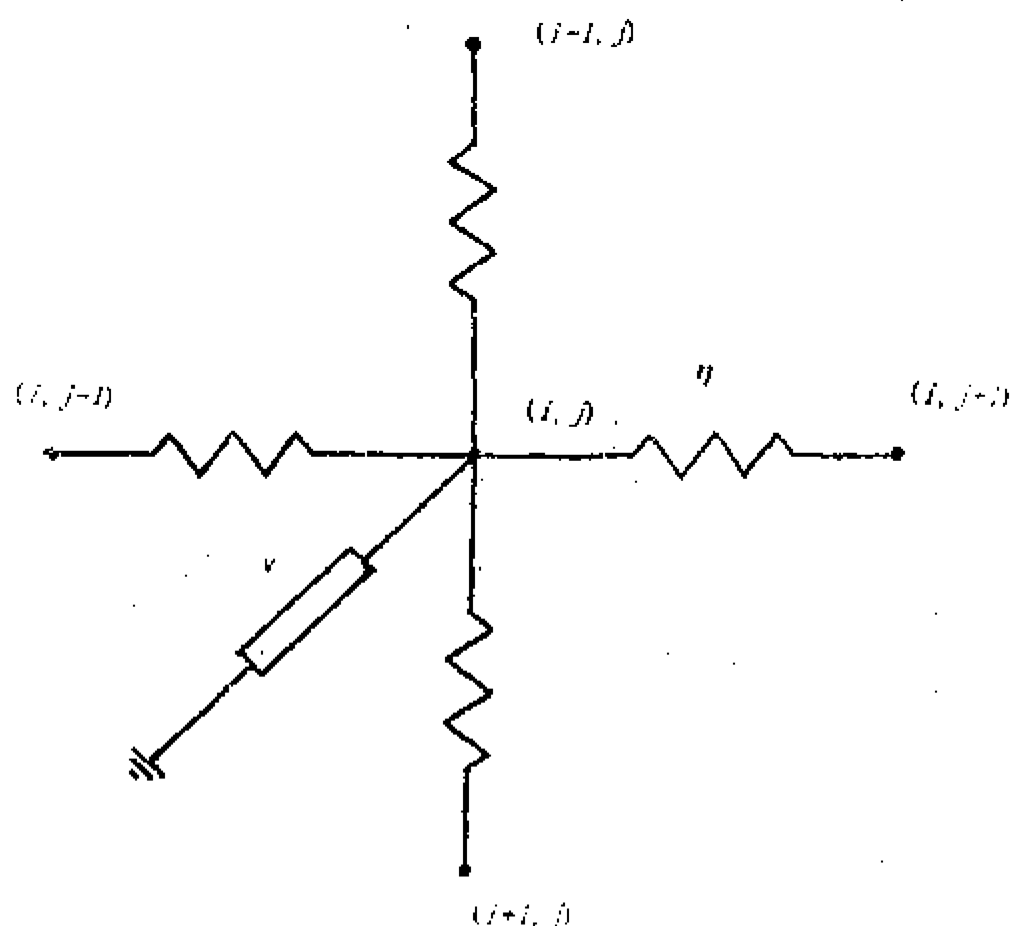


图 3.3.3　传输面集总元件回路图

$$\frac{I_z}{V} = \frac{1}{\eta_t} = \sqrt{\frac{\nu}{\eta}}$$

这与式(3.3.12)中所要求的是一致的。$E_{//}$ 极化方式情况下，下边界上的边界条件为：

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{V}{I_z} = \sqrt{-\mathrm{i}\omega\mu/\sigma} \Leftrightarrow \frac{V}{I_z} = \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} = \eta_t$$

这也与终端阻抗的概念是一致的。

在构成等价的集总元件迴路之后，就可对每一个结点写出电流连续性方程式如下：

$$\Sigma \frac{V_{相邻} - V_{ij}}{\eta_d} + \nu_d V_{i,j} = S_{i,j} \tag{3.3.13}$$

其中：$i = 1,2,\cdots,M+1 \quad j = 1,2,\cdots,N+1$

η_d：相邻结点间的集总阻抗；

γ_d：为所论结点对地的集总导纳；

$S_{i,j}$ 为外加线电流源，仅在 $E_{//}$ 极化方式时在网格顶部存在(对应于 H_y = 常数这种边界条件)。除此以外，所有涉及边界条件的形式为，$\frac{V_{相邻}}{\eta_d}$ 的已知项均可移至右端，比拟作为电流源项。

结点的序号按如下方式编排，即每一行按自左至右顺序编号，在每一行的末尾，下一行的左端接着上一行的右端排列。按照这种顺序排列各结点上的电磁场分量，可将式(3.3.13)中的方程式组写成如下形式的矩阵方程式：

$$
[C]V = \begin{bmatrix} A_1 & B_{1,2} & & & & \\ B_{1,2} & A_2 & B_{2,3} & & & 0 \\ & B_{2,3} & A_3 & B_{3,4} & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \ddots & & \ddots & & B_{M,M+1} \\ & & B_{M,M+1} & & & A_{M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.14}
$$

这是含有$(M+1)(N+1)$个未知量的由$(M+1)(N+1)$个方程式组成的线性方程式组。其中 V_i 表示第 i 行上各结点处的电磁场值顺序排列而组成的列向量。S_1 表示由外加线电流源项组成的列向量。$[C]$是$(M+1)(N+1)\times(M+1)(N+1)$阶的方阵。矩阵$[A]$,$[B]$都是$(N+1)\times(N+1)$阶的方阵,$[B]$是对角阵,$[A]$是三对角阵。所以说,系数矩阵$[C]$是一个非常稀疏的对称的块状三对角矩阵。解这种形式的联立方程式组可以采用格林菲尔德(Greenfield)算法。它只需求 $M+1$ 个$(N+1)\times(N+1)$阶分块矩阵的逆矩阵,而避免了求一个$(M+1)(N+1)\times(M+1)(N+1)$阶大规模矩阵的逆矩阵。这种算法的要点介绍如下。

可以通过直接验证证明,式(3.3.14)中的矩阵$[C]$可以分解成一个下三角分块矩阵$[E]$与一个上三角分块矩阵$[F]$的乘积,即

$$
[C] = [E][F] \tag{3.3.15}
$$

其中:

$$
E = \begin{bmatrix} I & & & & \\ E_{12} & I & & & 0 \\ & E_{23} & & I & \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & \ddots \\ & & & E_{M,M+1} & I \end{bmatrix}
$$

$$
F = \begin{bmatrix} F_1 & G_{12} & & & & \\ & F_2 & G_{23} & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & F_3 & & \ddots & \\ & & & \ddots & G_{M,M+1} & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & F_{M+1} \end{bmatrix}
$$

分解后将式(3.3.15)代入式(3.3.14)得到:

$$
[C]\boldsymbol{V} = [E][F]\boldsymbol{V} = [E]\cdot \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} \tag{3.3.16}
$$

其中有

$$
[F]\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Z} \tag{3.3.17}
$$

首先由式(3.3.16)中的关系式$[E]\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S}$解得$\boldsymbol{Z}$,然后再由式(3.3.17)即可解出 $\boldsymbol{V}$。

可见,首先的问题是先由$[C]$确定$[E]$和$[F]$。由式(3.3.15)可逐步确定出$[E]$和$[F]$中的各分块矩阵如下:

$$[F_1] = [A_1]$$

$$[B_{i,i+1}] = [E_{i,i+1}][F_i]$$

从而有

$$[E_{i,i+1}] = [B_{i,i+1}][F_i]^{-1}$$

($[F_i]^{-1}$ 应储存起来备以后使用)

$$[G_{i,i+1}] = [B_{i,i+1}]$$

$$[F_{i+1}] = [A_{i+1}] - [E_{i,i+1}][G_{i,i+1}] = [A_{i+1}] - [E_{i,i+1}][B_{i,i+1}]$$

确定了$[E]$和$[F]$之后,就可由式(3.3.16)按如下步骤解出 $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{S}_1$$

$$\boldsymbol{Z}_{i+1} = \boldsymbol{S}_{i+1} - [E_{i,i+1}]\boldsymbol{Z}_i$$

然后再由式(3.3.17)可求出 $\boldsymbol{V}$ 的各分段列矢量:

因
$$[F_{M+1}]\boldsymbol{V}_{M+1} = \boldsymbol{Z}_{M+1}$$

因此有:

$$\boldsymbol{V}_{M+1} = [F_{M+1}]^{-1}\boldsymbol{Z}_{M+1}$$

又因
$$[F_i]\boldsymbol{V}_i + [G_{i,i+1}]\boldsymbol{V}_{i+1} = \boldsymbol{Z}_i$$

从而有:
$$\boldsymbol{V}_i = [F_i]^{-1}(\boldsymbol{Z}_i - [G_{i,i+1}]\cdot \boldsymbol{V}_{i+1})$$

这就通过解 $M+1$ 个$(N+1)\times(N\times1)$阶矩阵$[F_i]$的逆矩阵代替了求解一个$(M+1)(N+1)\times(M+1)(N+1)$阶大型矩阵的逆矩阵。

也还有其他的适于解式(3.3.14)中那种类型的线性方程式组的算法。

3. 有限单元法

(1) 解偏微分方程问题与变分问题之间的对应关系及物理意义

我们都熟悉这样一个基本原理,即任何场在达到平衡状态时都要求满足能量最小的条件,这对电磁场来说也是正确的。这就是说,电磁场能量达到最小的条件和麦克斯韦方程组是等价的。是不同形式的控制电磁场状态及分布的基本定律。

在大地电磁测深情况下,可忽略位移电流,再考虑到可能存在场源,于是电磁场总能量公式

$$U = \int_v \left[\frac{-\mathrm{i}\omega\mu}{-2\mathrm{i}\omega}H^2 + \frac{1}{(-2\mathrm{i}\omega)}\frac{1}{\sigma}(\nabla\times H)^2\right]\mathrm{d}v + \int_v \mu\cdot M_s\cdot H\mathrm{d}v \qquad (3.3.18)$$

和

$$U = \int_v \frac{\sigma E^2}{(-2\mathrm{i}\omega)}\mathrm{d}v + \int_v \frac{(\nabla\times E)^2}{(-2\mathrm{i}\omega)(-\mathrm{i}\omega\mu)}\mathrm{d}v + \int_v P_s\cdot E\mathrm{d}v \qquad (3.3.19)$$

其中 P_s 和 M_s 分别为电极化强度和磁极化强度。

上述能量公式(3.3.18)、(3.3.19)也可以从另一角度导出,即从解偏微分方程式与变分问题之间的对应关系导出。

已知在二维模型条件下,大地电磁场的分布遵从亥姆霍兹方程:

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)}{\partial z} - \mathrm{i}\omega\mu H_x - f = 0$$

$$-\frac{\partial\left(-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)}{\partial z}+\sigma E_x-f=0 \tag{3.3.1'}$$

其中 f 表示场源项。从解偏微分方程的变分方法的原理可知，与解上述偏微分方程相应的变分问题是：在满足给定边界条件 H_x(或 E_x) $|_\Gamma=\phi(y,z)$ 及在域内的边界上($G+\Gamma$)连续可微的函数集合中寻求使泛函

$$I[H_x]=\iint_G\left\{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)^2-\mathrm{i}\omega\mu H_x^2-2f_H H_x\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.3.20}$$

$$I[E_x]=\iint_G\left\{\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)^2+\sigma E_x^2-2f_E E_x\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.3.21}$$

取极小值的函数 $H_x(y,z)$ 或 $E_x(y,z)$。为此需令上述泛函的变分为零，即：

$$\Delta I[H_x]=\Delta\left[\iint_G\left\{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)^2-\mathrm{i}\omega\mu H_x^2-2f_H H_x\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]=0 \tag{3.3.22}$$

及

$$\Delta I[E_x]=\Delta\left[\iint_G\left\{\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{-\mathrm{i}\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)^2+\sigma E_x^2-2f_E E_x\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]=0 \tag{3.3.23}$$

由式(3.3.20)、(3.3.21)可看出，它们与式(3.3.18)、(3.3.19)相同，只不过前者表示的是功率，而后者表示的是能量。式(3.3.22)及式(3.3.23)的含义是要求场分布的总功率为极小。(3.3.20)—(3.3.23)式中的 $-2f_H$ 及 $-2f_E$ 分别与式(3.3.18)、(3.3.19)中的 μM_s 及 P_s 相当，表示场源项。

利用式(3.3.7)中列出的对应关系，可将式(3.3.20)及式(3.3.21)写成如下的统一形式：

$$I[V]=\iint_G\left\{\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\nu V^2-2fv\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.3.24}$$

(2) 有限单元法

有限单元法是解变分问题的一种数值近似方法，它是将要研究的域剖分成由互不重叠的多边形基本单元组成的网格。在每一个基本单元内，由以结点处的场值表示出的插值函数描述场的分布，这样就将式(3.3.22)、(3.3.23)中求泛函极值的问题变成了求多元函数极值的问题，比较易于实现。我们可以三角形单元剖分的有限元法求解类似亥姆霍兹方程一类的椭圆型偏微分方程。

4. *积分方程法*

大地电磁数值模拟有两种基本主法。一种是微分方程方法。前面讨论过的有限差分方法和有限元法等都属于这种方法。另一种是积分方程方法，三维数值模拟多采用它。

微分方程的解从数字上易于建立，形成的是大规模带状矩阵。由于要在网格上模拟整个地球，所以微分方程方法适于模拟复杂的地质情况。与此相比，积分方程方法涉及较复杂的数学，但其优点是仅需在异常区求出未知场。正是由于这个原因，当要模拟一个或少数几个小异常体的响应时，采用积分方程方法比较经济。

要讨论的模型如图 3.3.4 所示。在导电率为 σ_1 的半空间中有一长方体，其导电率 $\sigma_2(r)$

是变化的，为 r 的函数，r 表示矢径。由于假设大地电磁场的源是来自高空的垂直入射到地面的平面电磁波，所以可从讨论如下的频域中无源的麦克斯韦方程式组出发。

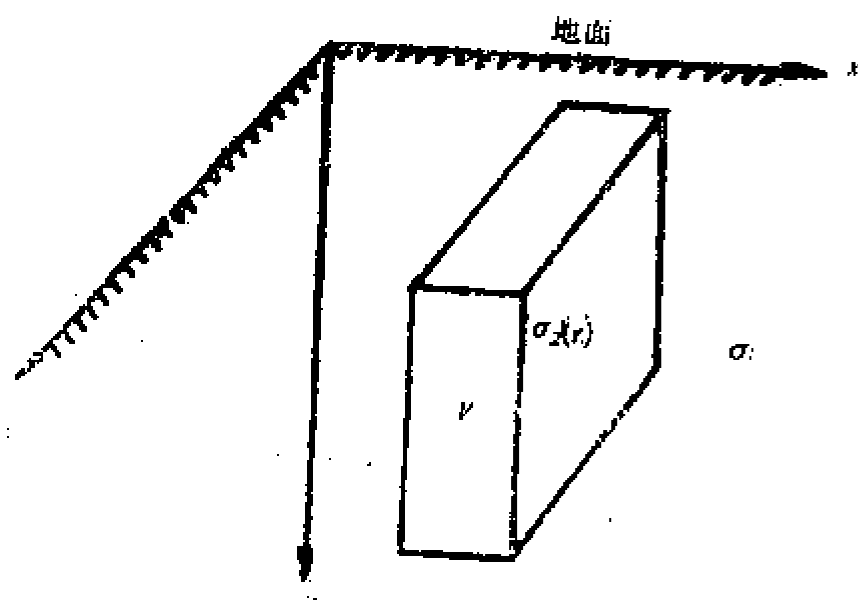


图 3.3.4　三维模型

$$\begin{aligned}\Delta \times E - \mathrm{i}\omega\mu_0 H &= 0 \\ \Delta \times H - \sigma E &= 0\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

我们定义均匀地球的场为一次场，以上角标 p 表示，一次场也满足无源的麦克斯韦方程组：

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E}^p - \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{H}^p &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H}^p - \sigma_1 \boldsymbol{E}^p &= 0\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

从式(3.3.25)中分别减去式(3.3.26)中相应的公式，得到：

$$\nabla \times (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^p) - \mathrm{i}\omega\mu_0(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^p) = 0 \tag{3.3.27}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^p) - \sigma \boldsymbol{E} + \sigma_1 \boldsymbol{E}^p = 0 \tag{3.3.28}$$

其中 σ 表示地下任一点处实际的导电率值，在异常体内为 σ_2，在其他处为 σ_1。

式(3.3.28)可改写成：

$$\nabla \times (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^p) - \sigma_1(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^p) + (\sigma_1 - \sigma)\boldsymbol{E} = 0 \tag{3.3.29}$$

如果把实测场与一次场之差看作是二次场，并用上角标 S 表示，则式(3.3.27)和(3.3.29)可简化成：

$$\nabla \times \boldsymbol{E}^s - \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{H}^s = 0 \tag{3.3.30}$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^s - \sigma_1 \boldsymbol{E}^s = \boldsymbol{J}^s \tag{3.3.31}$$

其中

$$\boldsymbol{J}^s = [\sigma_2(r) - \sigma_1]\boldsymbol{E} \tag{3.3.32}$$

是散射电流，仅在异常体中才存在。

对(3.3.30)式取旋度后代入式(3.3.31)，得到：

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}^s - \mathrm{i}\omega\mu_0(\boldsymbol{J}^s + \sigma_1 \boldsymbol{E}^s) = 0$$

移项后有：

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}^s + k^2 \boldsymbol{E}^s = -\mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{J}^s \tag{3.3.33}$$

其中：$$k^2 = -\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma_1$$

这样，电磁场被分成两部分，一部分是一次场，通过解式(3.3.26)可以很容易地求出。二次场可以认为是由异常体中的散射电流 $\boldsymbol{J}^s$ 引起的，如式(3.3.31)所示。这一部分场可以通过把 $\boldsymbol{J}^s$ 作为场源电流，并将式(3.3.30)和式(3.3.31)转换成积分方程，然后数值地求解。

二次电场可通过将散射电流源 $\boldsymbol{J}^s$ 乘以适当的并矢格林函数 $\boldsymbol{G}(r,r')$ 并对异常体所占的体积做积分而得到：

$$\boldsymbol{E}^s(r) = \int_v \boldsymbol{G}(r,r') \cdot \boldsymbol{J}^s(r')\mathrm{d}v' \tag{3.3.34}$$

式中的并矢格林函数是在存在空气 - 地球界面情况下将 r 处的二次电场与 r' 处的电流元 $\boldsymbol{J}^s(r')$ 连系起来，这时 r 处二次电场的方向与 r' 处源电流元的方向不再平行，所以必须用并矢格林函数。

如假设异常体内的电导率为常数 σ_2，则将点(3.3.32)代入式(3.3.34)后，可得到实测电场表达式为：

$$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{E}^p(r) + (\sigma_2 - \sigma_1)\int_v \boldsymbol{G}(r,r') \cdot \boldsymbol{E}(r')\,\mathrm{d}v' \tag{3.3.35}$$

上式是一非齐次的第二类矢量弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程式。

并矢格林函数由下式给出：

$$\boldsymbol{G}(r,r') = \frac{1}{\sigma_1}[k_1^2\boldsymbol{I} - \nabla\nabla']g(r,r') \tag{3.3.36}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位并矢，g 是对应全空间的标量格林函数，由下式给出：

$$g(r,r') = \frac{\mathrm{e}^{-ik_1|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \tag{3.3.37}$$

式(3.3.36)中的 ∇' 表示相对带“,”的坐标系求导数。

如图3.3.5所示，将异常体剖分成 N 个线性尺寸为 Δ 的立方体单元，并假设在每个单元内电场是常数。于是式(3.3.35)中的积分可用如下的求和式来逼近：

$$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{E}^p(r) + (\sigma_2 - \sigma_1)\sum_{n=1}^{N}\int_{vn} \boldsymbol{G}(r,r')\,\mathrm{d}v' \cdot \boldsymbol{E}_n$$

虽然在每个单元内可认为电场是常数，但格林函数变化很快，必须保留相对它的积分。应用关系式

$$\int_v \nabla \boldsymbol{G}\mathrm{d}v = \int_s \boldsymbol{G}\mathrm{d}s$$

可得到：

$$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{E}^p(r) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\Gamma}(r,r') \cdot \boldsymbol{E}_n \tag{3.3.38}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是相对有限单元体积电流的并矢格林函数，而 $\boldsymbol{G}$ 是相对无限小电流元的并矢格林函数。并矢格林函数 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可看成是两部分之和，分别对应电流源和电荷源：

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_A + \boldsymbol{\Gamma}_\phi$$

根据式(3.3.36)可知，其中：

$$\boldsymbol{\Gamma}_A = k_1^2\int_{vn} G_A(r,r')\,\mathrm{d}v' \tag{3.3.39}$$

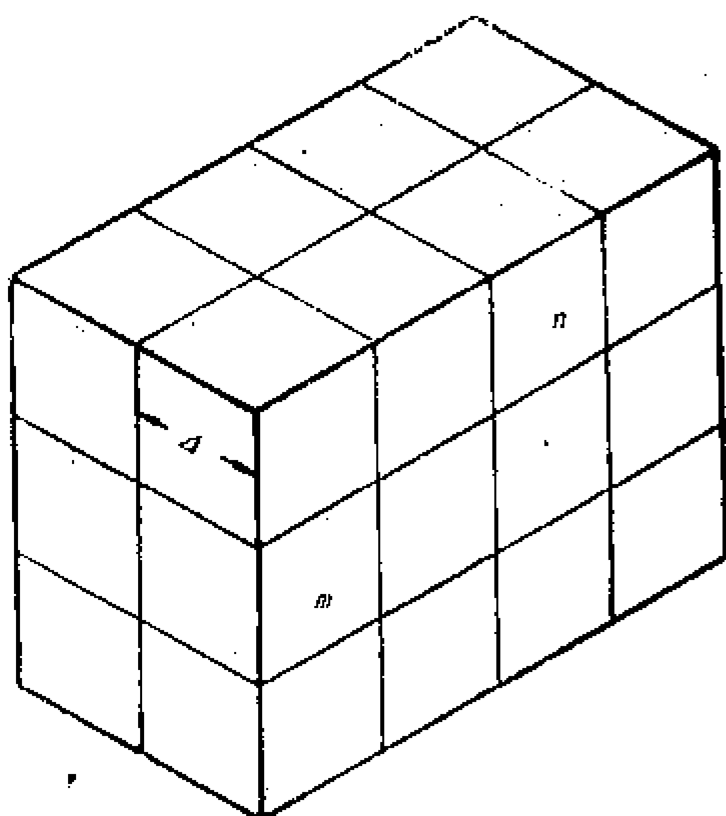


图 3.3.5　异常体剖分成立方体单元

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\phi} = \sum_{l=1}^{2}(-1)^{l}\int_{sn}\boldsymbol{G}_{\phi}(r,r')\,\mathrm{d}s' \tag{3.3.40}$$

而

$$\boldsymbol{G}_{A} = g(r,r')\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{G}_{\phi} = \sum_{i=1}^{3} -\nabla g(r,r')\cdot \boldsymbol{u} \tag{3.3.41}$$

上列各式中的下角标 A 和 ϕ 分别表示对应矢量位和标量位的作用。产生标量位部分的电荷源分布在单元之间的分界面上，因此式(3.3.40) 中的面积分包含对第 n 个单元 6 个面的积分，于是式(3.3.41) 中的 r' 应为：

$$r' = r_n + (-1)^{l}\cdot\frac{\Delta}{2}\cdot\boldsymbol{u}_i$$

$\boldsymbol{u}_i$ 是 x,y,z 方向上的单位矢量，第 m 个单元中心处的电场可根据式(3.3.38) 给出为：

$$\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{E}_m^{p} + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1}\sum_{n=1}\boldsymbol{\Gamma}_{mn}\cdot E_n$$

移项后可写成：

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1}\boldsymbol{\Gamma}_{mn}-\boldsymbol{\delta}_{mn}\right)\boldsymbol{E}_n = -\boldsymbol{E}_m^{p} \tag{3.3.42}$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases}\boldsymbol{I} & m = n\\ 0 & m \neq n\end{cases}$$

0 是零并矢。

对 N 个 m 值中的每一个都写出式(3.3.42)，可得到如下的分块矩阵方程式：

$$[M]\cdot[E] = -[E^{p}] \tag{3.3.43}$$

矩阵$[M]$中的每个元素本身就是一个 3×3 阶矩阵：

$$M_{mn} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \Gamma_{mn} - \delta_{mn}$$

由式(3.3.43)解出异常体内每个单元中心处的电场值之后,用这些结果及式(3.3.35)可求出异常体外任一点处的电场。为了计算任一点处的磁场,要对式(3.3.38)应用法拉第定律:

$$H = \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \nabla \times E$$

考虑到:

$$\nabla \times \nabla \doteq 0,$$

得到:

$$H(r) = H^p(r) + (\sigma_2 - \sigma_1)\sum_{n=1}^{N}\int_{vn} \nabla \times G_A(r, r')\,\mathrm{d}v' \cdot E_n$$

这里 $H^p(r)$ 是均匀地球时的一次磁场。

3.3.2 大地电磁测深法的反演

一般说来,地下介质的分布是任意的,暂不考虑水平非均匀和各向异性等复杂情况,仅就一维介质而言也需要用无限多维矢量才能精确地描述地球模型。然而实际上观测值却是有限的,在任意一段时间内只能得到有限个观测值。G.E.巴库斯、F.盖尔伯特证明当观测数据有限时,即使这些响应值是精确的,反问题的解也是非唯一的。如果数据中包含误差的话,解的非唯一性将更加严重。产生非唯一性的原因从根本上说就是由于观测值是有限的。显然,不可能根据有限的数据确定无限维的地球模型。

此外,考虑大地电磁响应函数是一个复杂的超越函数,大多数反演方法在求模型参数时需要将它线性化。这样简化也会给结果带来影响,而且这种简化多半只有当选择的初始参数接近真实地电模型参数时才有意义。

通过各种数学方法可以在一定意义下求取多种地球模型,但并不是说这些模型都有明确地地球物理和地质意义。解释人员可以根据已有的资料和认识舍弃那些不合理的模型。通常把那些在地质上、地球物理上合理的模型称为可接受的模型。因此,也可以说反演的任务就是在众多的可能解中寻找可接受的地电模型。

对于地球的电性分布规律在一维条件下可以设想为层状分布和连续分布两种形式。前者,地球模型可以通过各层的电阻率 ρ_i 和厚度 t_i 描述;后者,电阻率可描述为随深度变化的连续函数。相应地也有层状模型反演法和连续模型反演法两种。如前所述,无论哪一种方法的解都是非唯一的。都是近似解。既然如此,作为反演的任务不仅要求构制出地球模型,而且要对它进行评价。

所谓模型构制就是选择合适的反演方法和初始模型求得一个和观测数据拟合最好的地电模型。模型的评价就是讨论构制模型的合理性,进而指出哪些参数可信,可信程度如何,哪些参数存在疑义。

本节主要讨论一维大地电磁资料的反演问题,也简要地介绍二维反演的有关问题。

1. 一维大地电磁测深曲线反演的基本问题

随着计算机的广泛应用,在大地电磁测深资料的解释中,量板法已被自动反演淘汰。在

目前众多的反演方法中，大概可分为三类：间接反演法、直接反演法和近似反演法。

所谓间接反演法，就是从初始模型出发，将计算的理论曲线与实测曲线对比，并根据拟合结果对模型参数进行校正，在得到一个新的模型之后，再重复上述步骤，如此反复迭代，直到拟合为止。因此，凡在反演过程中需要迭代、校正的方法统称为间接反演法。这是目前大地电磁测深资料反演中应用最多也最成功的一类反演方法。

顾名思义，直接反演法是不需要迭代就可直接求解地电断面参数的反演方法之总称。

近似反演法，就是从某种近似原理出发，求出待求地电断面的近似模型，这种近似模型虽然不能很好拟合观测曲线，但却能反映地电断面的基本特征。因此，也受到许多解释人员的青睐，Bostick 法就是其中的一例。

除了上面这种分类方法外，也可根据目标函数的性质将反演问题分为线性反演法和非线性反演两大类。目标函数为线性的称线性反演法，否则称非线性反演法。一维大地电磁测深曲线的反演问题一般为非线性问题。

(1) 目标函数的选择和参数变换

如前所述，目前用于大地电磁测探曲线反演的方法中，大多数是基于最小方差原理的间接反演法。它的目标函数为实测曲线与理论曲线之相对误差的平方和，即

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\rho_{ai} - \rho_{Ti}(\lambda)}{\rho_{ai}}\right]^2 \tag{3.3.44}$$

式中　M—— 为视电阻率曲线的观测频点数；

ρ_{ai}—— 为第 i 个周期的观测值；

ρ_{Ti}—— 为初始模型第 i 个周期上之理论值；

$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N]^{\mathrm{T}}$ 为初始模型的参数矢量，在水平均与介质情况下，设有 n 层，则有 N 个参数，且 $N = 2n - 1$。

目标函数也可以写为

$$\Psi_2 = \sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\rho_{ai} - \rho_{Ti}(\lambda)}{\delta\rho_{ai}}\right]^2 \tag{3.3.45}$$

这里 $\delta\rho_{ai}$ 为 ρ_{ai} 的观测误差。

由于视电阻率的变化范围很大，几乎可以从零变到无限，所以在反演时，最好将以上二式改为

$$\Psi_3 = \sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\ln\rho_{ai} - \ln\rho_{Ti}(\lambda)}{\ln\rho_{ai}}\right]^2 \tag{3.3.46}$$

和

$$\Psi_4 = \sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\ln\rho_{ai} - \ln\rho_{Ti}(\lambda)}{\ln\delta\rho_{ai}}\right]^2 \tag{3.3.47}$$

如果用相位曲线进行反演，也可以写出与(3.3.44)式和(3.3.45)式相似的目标函数，不过由于相位值变化范围很小，没有必要对它取对数。

为了使以演更快收敛，避免在迭代过程中出现负的参数(电阻率和厚度)，也可作如下变换，令

$$x_i = \ln\lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

则理论视电阻率函数变为

$$\rho_{Ti} = \rho_{Ti}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

必须注意,参数变换后将导致反演公式也应作相应的变换。

(2) 线性方程组的建立

(3.3.44)式 ~ (3.3.47)式中的目标函数 Ψ 都是参数矢量λ,或参数 $\boldsymbol{\lambda}_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 的非线性函数,要在使 Ψ 为最小的条件下,求解地电断面的参数矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 是十分困难。为此,必须将它线性化。

设初始模型矢量为 $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N]^{\mathrm{T}}$,如果初始模型十分接近真实模型,则按台劳级数将它在初始模型附近展开并略去高阶项可得

$$\rho_{ai} \doteq \rho_{Ti}(\lambda^{(e)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \rho_{Ti}(\lambda^{(e)}}{\partial \lambda_j} \Delta\lambda_j \quad i = 1,2,\cdots,M \tag{3.3.48}$$

将上式写成矩阵可得

$$\boldsymbol{A}\Delta\lambda = \Delta\rho \tag{3.3.48}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{vmatrix} \tag{3.3.49}$$

以式(3.3.44)为例其中

$$a_{ij} = \frac{\partial \rho_{Ti}(\lambda^{(e)})}{\partial \lambda_j} \bigg/ \rho_{ai} \qquad i = 1,2,\cdots,M; j = 1,2,\cdots,N$$

$$\Delta\lambda = (\Delta\lambda_1\, \Delta\lambda_2 \cdots \Delta\lambda_N)^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta\rho = (\Delta\rho_1\, \Delta\rho_2 \cdots \Delta\rho_M)^{\mathrm{T}}$$

而

$$\Delta\rho_i = (\rho_{ai} - \rho_{Ti}(\lambda^{(0)}))/\rho_{ai}$$

一般 $M \neq N$,(3.3.49)是一个非适定方程,是线性化的结果,是一个线性方程组。

如果,将(3.3.48)式代入(3.3.44)式,则得

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{\rho_{ai} - \rho_{Ti}(\lambda^{(0)}) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \rho_{Ti}(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda_j} \Delta\lambda_j}{\rho_{ai}} \right]^2 \tag{3.3.50}$$

如前所述,当 Ψ_1 极小时,$\Delta\lambda_j(j = 1,2,\cdots N)$ 就是模型的改正量。根据多元函数的极值理论,Ψ 极小时应满足

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \Delta\lambda_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,N)$$

将(3.3.50)式相对 $\Delta\lambda_j(j = 1,2,\cdots,N)$ 微分,并令之为零,整理可得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\Delta\lambda = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\rho \tag{3.3.51}$$

式中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$—— 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵。

显然这仍是一组线性方程,又称为正态方程。$\Delta\lambda$ 的系数矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵。它的

解法可从一般线性代数中找到。

(3) 初始模型的选择

初始模型是间接反演法的出发点，反演过程就是对它进行反复修改的过程。初始模型是否恰当，直接关系到迭代收敛的速度，甚至反演解释的成败。如果断面是水平均匀层状介质，首先就要求初始模型的层数要与实测模型一致。为了做到这一点，通常应根据实测曲线的形态、特征，并结合测区的地质、地球物理资料来选择初始模型。至于各层的具体参数，可根据前述的 Bostick 法的结果来选择，也可由有经验的解释人员给定。

(4) 质量控制指标

在反演任何一条大地电磁测深曲线之前，解释人员必须根据实测曲线的优劣程度，给定一个质量控制或迭代收敛标准，以评定解释成果的好坏。方差函数和反演方法不同，质量控制指标也可以不一样，如设 $\nabla \boldsymbol{\Psi}^{(k)} = \boldsymbol{\Psi}^{(k+1)} - \boldsymbol{\Psi}^{(k)}$，

$$\| \nabla \boldsymbol{\Psi} \| \leqslant \delta_1;$$

$$\frac{|\Delta\lambda_i|}{\lambda_i} \leqslant \delta_2 \qquad (i = 1,2,\cdots,N)$$

或

$$\sum_{i=1}^{N}(\Delta\lambda_i)^2 \leqslant \delta_s$$

这里 δ 是大于零的数，必须选择适当。δ 过小会使反演过程中迭代数增加，成本变高，甚至无法收敛；而 δ 过大，又会影响解释的质量。

(5) 视电阻率对断面参数偏导数的计算方法

在(3.3.49)式和(3.3.51)式的系数矩阵中均含有视电阻率对断面参数的一阶偏导数。我们知道

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu_0}|Z|^2$$

其一阶偏导数是

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{\omega\mu_0}\left(Z^* \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j} + Z\frac{\partial Z^*}{\partial \lambda_j}\right) \quad j = 1,2,\cdots,N$$

考虑到一维层状介质第 m 层顶面的阻抗存在递推公式

$$Z_m = Z_{0m}\,{}^{\coth}_{\mathrm{th}}\left(k_m h_m + {}^{\coth^{-1}}_{\mathrm{th}^{-1}}\frac{Z_{m+1}}{Z_{0m}}\right)$$

并可由此求得在地面的表面阻抗。为了简化偏导数的计算程序，提高计算速度，求视电阻率对断面中任何一层参数 ρ_j 和 h_j 的偏导数，可以利用如下关系

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \rho_j} = \frac{\partial Z_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial \rho_j}$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial \rho_j} = \frac{\partial Z_2}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial \rho_j}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial Z_{j-1}}{\partial \rho_j} = \frac{\partial Z_{j-1}}{\partial Z_j}\frac{\partial Z_j}{\partial \rho_j}$$

以及

$$\frac{\partial Z_1}{\partial h_j}=\frac{\partial Z_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial h_j}$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial h_j}=\frac{\partial Z_2}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial h_j}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial Z_{j-1}}{\partial h_j}=\frac{\partial Z_{j-1}}{\partial Z_j}\frac{\partial Z_j}{\partial h_j}$$

由此可知，要计算$\frac{\partial Z_1}{\partial \rho_j}$和$\frac{\partial Z_1}{\partial h_j}$，首先必须导出$\frac{\partial Z_j}{\partial \rho_j}$，$\frac{\partial Z_j}{\partial h_j}$和$\frac{\partial Z_m}{\partial Z_{m+1}}$。它们的表达式为

$$\frac{\partial Z_j}{\partial \rho_j}=\frac{Z_j}{2\rho_j}-\frac{2\mathrm{i}\omega\mu_0}{\Delta^2\rho_j}\left[\rho_j Z_{j+1}+h_j(\mathrm{i}\omega\mu_0\rho_j-Z_{j+1}^2)\right]\mathrm{e}^{-2k_jh_j}$$

$$\frac{\partial Z_j}{\partial h_j}=\frac{4\mathrm{i}\omega\mu_0}{\Delta^2}(\mathrm{i}\omega\mu_0\rho_j-Z_{j+1}^2)\mathrm{e}^{-2k_jh_j}$$

$$\frac{\partial Z_j}{\partial Z_{j+1}}=\frac{4\mathrm{i}\omega\mu_0\rho_j}{\Delta^2}\mathrm{e}^{-2k_jh_j}$$

这里

$$\Delta=\sqrt{\mathrm{i}\omega\mu_0\rho_j}(1+\mathrm{e}^{-2k_jh_j})+Z_{j+1}(1-\mathrm{e}^{-2k_jh_j})$$

i 为虚数单位。而在最底部界面上

$$\frac{\partial Z_n}{\partial \rho_n}=\frac{Z_n}{2\rho_n}$$

2. 基于最小方差原理的高斯－牛顿法

式(3.3.51)是基于最小方差原理的正态方程，设

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\rho}$$

则

$$\boldsymbol{P}\Delta\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{Y} \tag{3.3.52}$$

式中　$\boldsymbol{P}$——是 $N\times N$ 阶方阵；

$\Delta\boldsymbol{\lambda}$——是 $N\times 1$ 列向量；

$\boldsymbol{Y}$——是 $N\times 1$ 阶的列向量。

根据矩阵知识，$\boldsymbol{P}$ 是对称矩阵，其秩 $P\leqslant N$。当 $P<N$ 时，$\boldsymbol{P}$ 是奇异矩阵，(3.3.52)式无一般意义下的解；即使 $P=N$，当 $\boldsymbol{P}$ 有小特征值存在时，$\boldsymbol{P}$ 是病态的，其解也不稳定。这是因为在地电断面中常存在不灵敏参数和测深曲线对某些模型参数存在等值性的缘故，也可能是由于某些观测数据这间具有较大相关性的缘故。

如果 $\boldsymbol{P}$ 的逆存在，则式(3.3.52)的解为

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}$$

式中　$\Delta\boldsymbol{\lambda}$——是初始模型的校正矢量。

由于我们将非线性方程线性化，所以对初始模型 $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ 校正后并不能使 $\boldsymbol{\Psi}$ 达到极小，求

得模型的真正参数。设 k 为迭代次数,则

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(k)} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

在迭代终止时,目标函数 $\boldsymbol{\Psi}$ 满足给定的质量控制指标

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\lambda}^*) < \boldsymbol{\delta}$$

这时 λ^* 就是曲线的反演结果。

由上面的讨论可以看出,初始模型 $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}$ 越接近真实模型时,按台劳级数展开就越可以忽略高次项,因而高斯 - 牛顿法的效果越好,逐次迭代的结果可以求得一个稳定的极小点。然而,当初台模型远离真实模型时,按始劳级数展开就不能完全忽略高次项,函数线性化的精度不高,加之此时目标函数比较复杂,因此在迭代过程中,甚至可能使方差函数加大,出现发散的情况。这就是高斯 - 牛顿法对初始模型要求较高的原因。

为了提高高斯 - 牛顿法的收敛速度,在初始模型较差的情况下,不致因为改正步长 $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ 过大而在迭代过程中出现发散,可引入一个步长因子 $\alpha^{(k)}$。校正时采用

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \alpha^{(k)}\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$$

选择最优步长因子 $\alpha^{(k)}$ 的方法很多,这里介绍一种二次插值法。由于 $\alpha^{(k)}$ 参与模型参数的校正,目标函数可视为 $\alpha^{(k)}$ 的函数,以二次函数逼近之,则

$$\Psi = \alpha_0 + \alpha_1\alpha^{(k)} + \alpha_2[\alpha^{(k)}]^2$$

式中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$—— 为待定系数。

根据极值原理,最优的 $\alpha^{(k)}$ 应满足

$$\frac{\alpha\Psi}{\alpha\alpha^{(k)}} = \alpha_1 + 2\alpha_2 a^{(k)} = 0$$

即

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \tag{3.3.53}$$

由于 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 是不随 $\alpha^{(k)}$ 取值而变化的常数,可以用如下办法求取:

令 $\alpha^{(k)} = 0$ 　　则 $\Psi_0 = \alpha_0$

$$\alpha^{(k)} = \frac{1}{2} \qquad \Psi_{\frac{1}{2}} = \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2$$

$$\alpha^{(k)} = 1 \qquad \Psi_1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

从而求得

$$\alpha_2 = 2(\Psi_0 + \Psi_1 - 2\Psi_{\frac{1}{2}})$$

$$\alpha_1 = \Psi_1 - \Psi_0 - 2(\Psi_0 + \Psi_1 - 2\Psi_{\frac{1}{2}})$$

代入式(3.3.53),得

$$\alpha^{(k)} = \frac{1}{2} + \frac{\Psi_0 - \Psi_1}{4(\Psi_0 + \Psi_1 - 2\Psi_{\frac{1}{2}})} \tag{3.3.54}$$

因此,在每次迭代过程中,都需要计算 Ψ_0,Ψ_1 和 $\Psi_{\frac{1}{2}}$,并根据(3.3.54)式计算出 $\alpha^{(k)}$ 后,再作校正。应该指出,并不是引入步长因子 $\alpha^{(k)}$ 后,就可以保证任何初始模型在迭代过程中都会稳定收敛。

在迭代过程中,校正步长无疑是重要的。步长过大,往往会使迭代走上歧途,甚至发散,

步长过小，又会增加迭代次数，造成经济和时间的无谓浪费。然而校正方向，对迭代的成败也许更为重要。方向错误，即使步长"最优"，也是枉然，甚至会远离真实模型。只有方向对、步子稳，反演才会成功。

如图 3.3.6 所示，在方差函数比较简单的情况下，沿负梯度方向搜索（或校正），经反复迭代，总可以求得 Ψ 函数的极小点，即模型的解。但是，高斯－牛顿法的搜索方向却与此不同，它不但取决于 $\boldsymbol{P}^{-1}$，而且也决定于矢量 $\boldsymbol{Y}$ 的方向。能否在反演迭代过程中，逐渐调正收敛方向，选取最优步长，这就是反演方法中必须解决的重要问题之一。

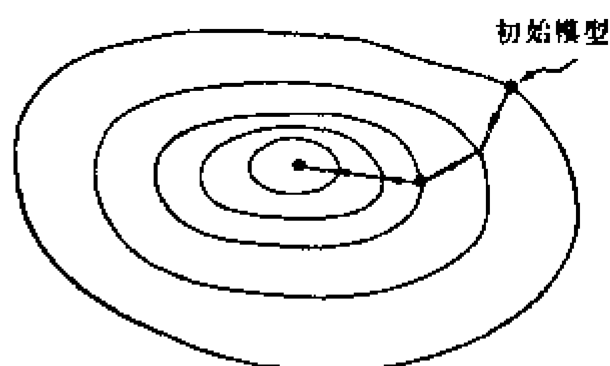


图 3.3.6　梯度法收敛方向

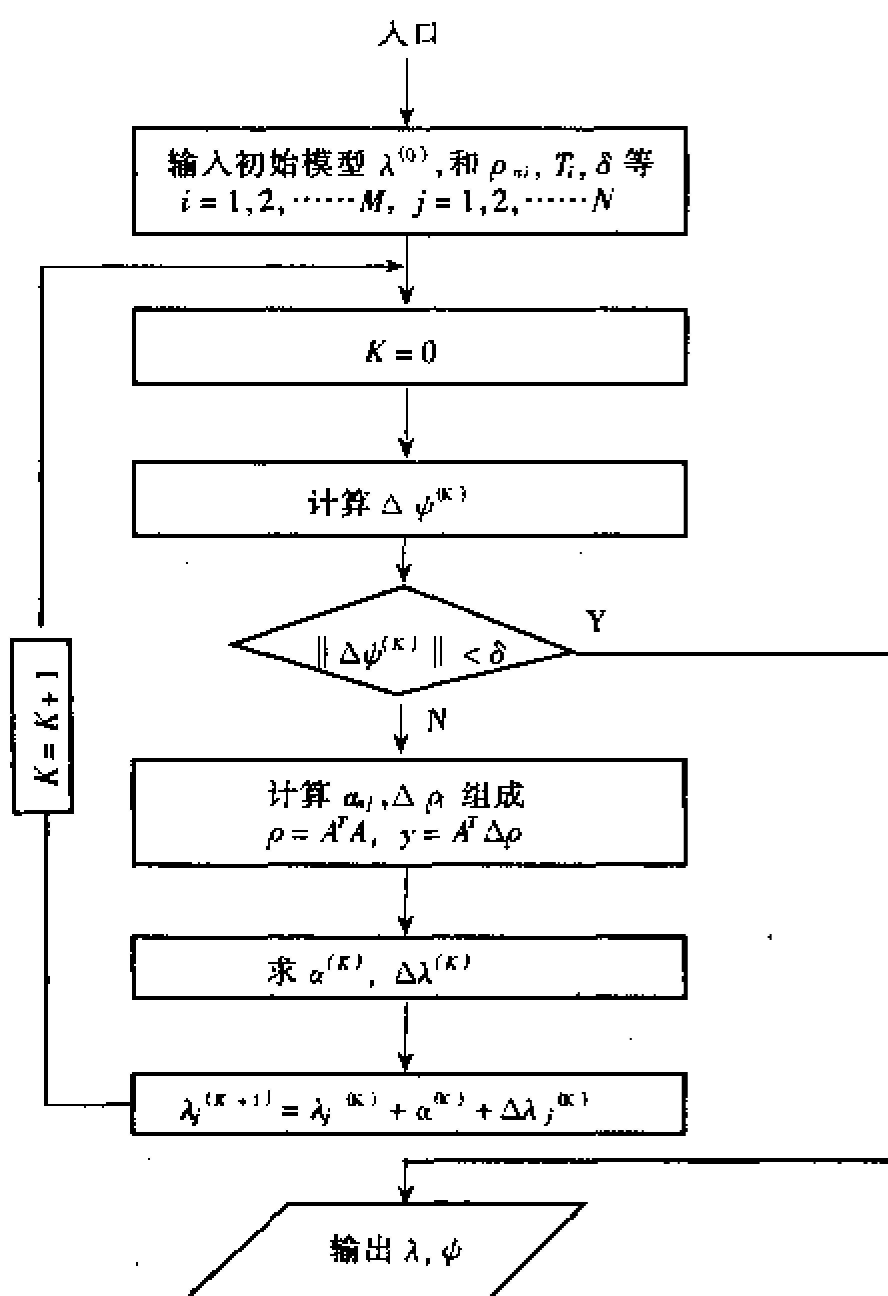


图 3.3.7　高斯－牛顿法计算框图

3. 马夸特法

前面已经提到，高斯－牛顿法在系数矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为奇异或病态时无解或解不稳定，这是因为此时矩阵求逆的条件很差。马夸特法是用增大系数矩阵主对角元素的办法来改善条件，从而达到使解越于稳定的目的。

这种方法的目标函数是

$$\Psi(\lambda)=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\rho_{ai}-\rho_{ri}(\lambda)}{\rho_{ai}}\right]^2+\alpha\sum_{j=1}^{N}\Delta\lambda_j^2 \tag{3.3.55}$$

相应的正态方程组是

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I})\Delta\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\rho} \tag{3.3.56}$$

式中　α—— 是阻尼系数；

$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。

其他符号和前段完全一致。

根据矩阵代数，任何对称矩阵均可分解为与三个矩阵的积

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_j(i = 1,2,\cdots,N)$ 组成的对角线矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量矩阵

由式(3.3.56)知

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\rho} \\ &= \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\rho} \end{aligned} \tag{3.3.57}$$

式中

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1 + \alpha} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda_2 + \alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_N + \alpha} \end{bmatrix}$$

因此，即使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 中有的等于零或趋于零，但 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 矩阵却不再是奇异或病态的了，因而 $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ 就有稳定的解存在。可见，马夸特法就部分地克服了高斯 - 牛顿法存在问题。

从教学上讲，由于目标函数与高斯 - 牛顿法不同，马夸特法的系数矩阵不再有奇异和病态的可能性，因而使解趋于稳定。

从迭代过程中 $\Delta\lambda$ 的校正方向讲，阻尼系数 α 实际上是调正收敛方向的系数，使反演有可能沿最佳方向校正初始模型的参数。不难看出，$\alpha = 0$ 时，马夸特法就是前述的高斯 - 牛顿法；当 α 充分大时，它就退化为梯度法。在迭代过程中可以根据需要不断调整 α 值，从而获得较快的收敛速度和较好的反演效果。

马夸特法是解病态方法的有效方法之一。对大地电磁测深曲线反演而言，还必须针对大地电磁测深的具体特点，对马夸特法进行修改。这些特点，正如在前一段中指出的，就是大地电磁法的体积勘探性质，以及视电阻率的数值和断面参数的变化范围都很大这一特征。为此，将(3.3.55)式目标函数改为

$$\Psi = \sum_{i=1}^{M}[\ln\rho_{ai} - \ln\rho_{Ti}(\lambda^{(e)})]^2 + \alpha\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_j}\right)^2$$

其正态方程为

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \alpha\boldsymbol{D})\Delta\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{L} \tag{3.3.58}$$

其中

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{\rho_{T1}}\frac{\partial\rho_{T1}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_1} & \frac{1}{\rho_{T1}}\frac{\partial\rho_{T1}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\rho_{T1}}\frac{\partial\rho_{T1}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_N}\\
\frac{1}{\rho_{T2}}\frac{\partial\rho_{T2}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_1} & \frac{1}{\rho_{T2}}\frac{\partial\rho_{T2}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\rho_{T2}}\frac{\partial\rho_{T2}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_N}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{1}{\rho_{TM}}\frac{\partial\rho_{TM}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_1} & \frac{1}{\rho_{TM}}\frac{\partial\rho_{TM}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\rho_{TM}}\frac{\partial\rho_{TM}(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda_N}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_N}
\end{bmatrix}
$$

而

$$
\Delta\boldsymbol{L}=\left(\ln\frac{\rho_{a1}}{\rho_{T1}}\quad \ln\frac{\rho_{a2}}{\rho_{T2}}\quad\cdots\quad \ln\frac{\rho_{aM}}{\rho_{TM}}\right)
$$

式中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,N)$——是初始模型的参数。比较(3.3.58)式和(3.3.57)式可知，后者的单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 被对角线矩阵$\boldsymbol{D}$ 所代替，阻尼系数不仅与 α 有关，而且与初始模型的参数有关。这就避免了参数不同阻尼系数相同的弊病。

图 3.3.8 是马夸特法的程序框图。

4. *广义反演法*

广义反演法是基于广义逆而建立起来的一种反演方法，它既适应于解式(3.3.49)这样一组非适定方程，也适用于解式(3.3.58)这种对称方程组。为清楚起见，让我们首先讨论一下广义逆的基础：矩阵的奇异值分解(*SVD*)。

一个 $M\times N$ 阶矩阵$\boldsymbol{A}$，若可以找到一个矩阵 $\boldsymbol{G}$，并满足以下条件

$$
\text{①}\ \boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A};\quad \text{②}\ \boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G};\quad \text{③}\ (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AG};\quad \text{④}\ (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{GA} \tag{3.3.59}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为$\boldsymbol{A}$ 的广义逆。并可用它来解任何(适定，超定和欠定)线性方程组。

不难证明，任何秩为 P 的$M\times N$ 阶矩阵$\boldsymbol{A}$，都可分解为

$$
\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_P\boldsymbol{\Lambda}_P\boldsymbol{V}_P^{\mathrm{T}} \tag{3.3.60}
$$

其中 $\boldsymbol{U}_P$ 是$M\times P$ 阶矩阵，是 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量组成的特征向量矩阵，称为观测数据特征向量矩阵；$\boldsymbol{V}_P$ 是$N\times P$ 阶矩阵，是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征向量组成的特征向量矩阵，也称为参数特征向量矩阵；而 $\boldsymbol{\Lambda}_P$ 是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 或$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的特征值之正根组成的对角线矩阵，其阶是 $P\times P$，且

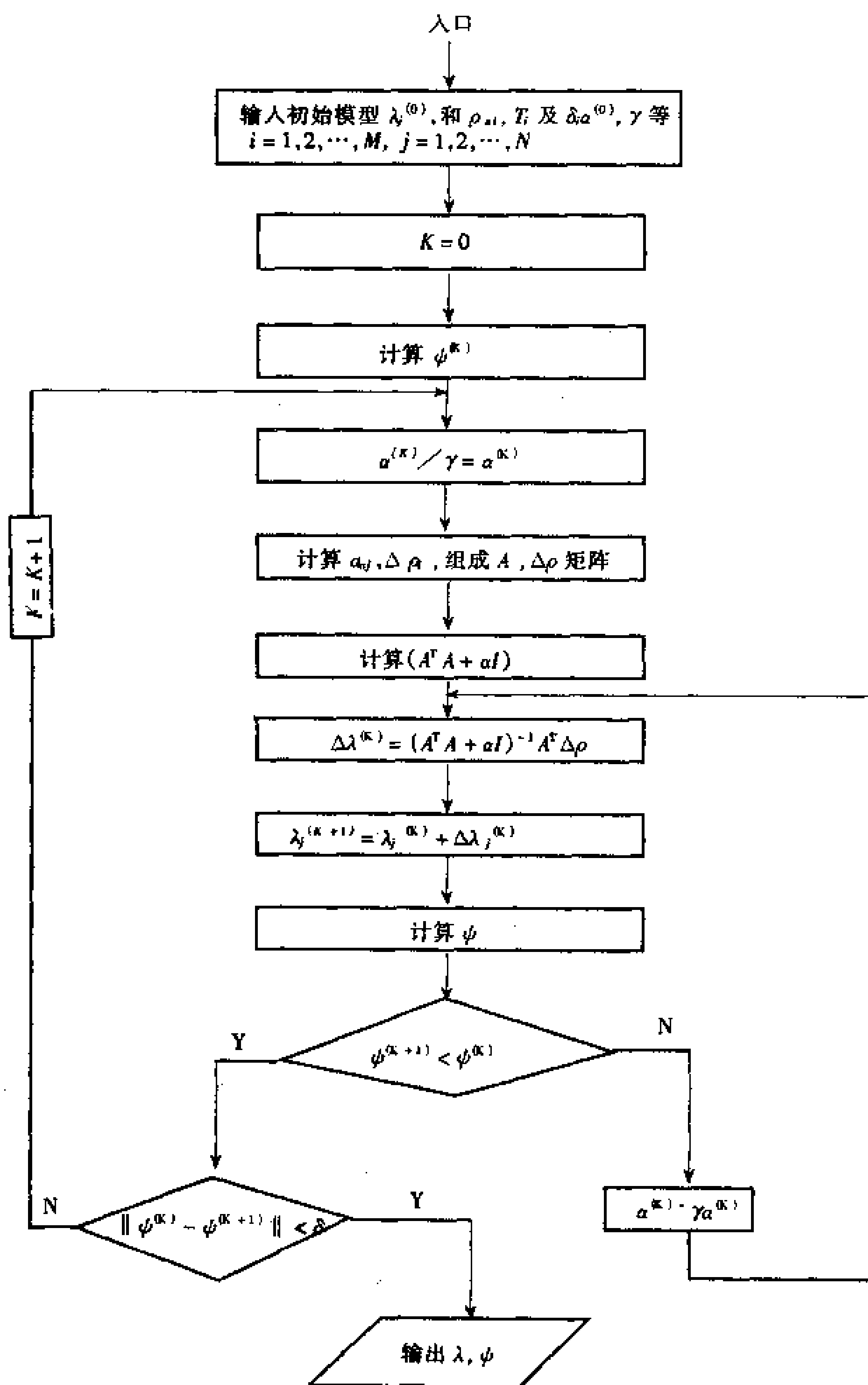


图 3.3.8　马夸特法的程序框图

$$\boldsymbol{A}_p=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & 0\\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_p\end{bmatrix}$$

这里 α_i 称为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值。

根据奇异值分解的表达式(3.3.60),定义

$$A^{+} = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^{\mathrm{T}} \tag{3.3.61}$$

不难证明,A^{+} 满足(3.3.59) 四个条件,因此 A^{+} 是广义逆。显然,广义逆不是一般意义下的矩阵的逆。

现以式(3.3.49) 为例说明广义反演法的基本原理及其优缺点。

利用(3.3.61) 式和(3.3.49) 式,如设由广义逆求得之参数校正矢量为 $\Delta\hat{\lambda}$,则由式(3.3.62) 求出校正向量 $\Delta\hat{\lambda}$ 后,就可对初始模型 $\lambda^{(0)}$ 的参数进行校正了。由此看来,广义反演法的核心,就是求矩阵 A 的广义逆,或者是对 A 进行奇异值分解。

讨论

① 在利用广义反演法求解的过程中,还可以得到一些关于观测数据和模型参数的辅助信息。

如将求得的 $\Delta\hat{\lambda}$ 代入式(3.3.49),则

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\rho} &= A\Delta\hat{\lambda} = AA^{+}\Delta\rho \\ &= U_p U_p^{\mathrm{T}}\Delta\rho = F\Delta\rho\end{aligned} \tag{3.3.63}$$

式中,$F = AA^{+} = U_p U_p^{\mathrm{T}}$,称为信息密度矩阵。

如果 $F = I$,说明 $\Delta\hat{\rho} = \Delta\rho$,即用广义反演法求得的解 $\Delta\hat{\lambda}$ 可以完全恢复观测资料 $\Delta\rho$;F 越偏离单位矩阵,说明 $\Delta\hat{\rho}$ 偏离 $\Delta\rho$ 越远;而 F 的行向量各要素之间相对大小还进一步反映 $\Delta\rho$ 各要素之间的相关程度。因此,信息密度矩阵是反映观测数据之间相关性的一重要辅助信息。

如将(3.3.49) 式代入(3.3.62) 式,则得

$$\Delta\hat{\lambda} = A^{+}\Delta\lambda = A^{+}A\Delta\lambda = R\Delta\lambda \tag{3.3.64}$$

其中

$$R = A^{+}A = V_p V_p^{\mathrm{T}}$$

称为参数分辩矩阵。和信息密度矩阵相似,参数分辨矩阵也反映了断面参数之间的相关程序。当 $R = I$ 时,断面参数是完全互相独立的,否则断面参数之间就是相互依赖互相制约的。R 与单位矩阵相差越远,说明参数之间相关性越大,而且 R 行向量各要素之间的相对大小也反映了哪些参数之间存在着相关性。所以 R 也是一种重要的辅助信息。

② 如前所述,矩阵 A 可以是适定矩阵,也可以是超定或欠定矩阵。当 $M = N = P$ 时矩阵是适定的;当 $N > M = P$ 时,A 是欠定的;当 $M > N = P$ 时则 A 是超定的;当然也会出现 $\min(M,N) > P$ 的混定情况。但不管哪些情况,都可以用广义反演法稳定求解,这就大大地扩大了广义反演法的应用范围。

不难证明,当适定矩阵时

$$A^{+} = A^{-1}$$

即广义逆与矩阵的逆是相同的;当矩阵为超定和欠定时,A^{+} 分别为

$$A^{+} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$$

和

$$A^{+} = (AA^{\mathrm{T}})^{-1}A$$

③ 在广义反演法中,在计算模型参数的校正量时,也遇到了矩阵 A 的求逆计算。当矩阵

$\boldsymbol{A}$ 的奇异值很小时，也会出现解不稳定、方差很大的情况。为了克服这种病态现象，可采用对小奇异值截断和阻尼两种措施。

所谓截断法，就是人为去掉某些较小的奇异值，使之不参加 $\Delta\lambda_j$ 的计算。如将 P 个奇异值中从大到小排列，截去 $P-r$ 个小奇异值后还剩下 r 个较大的

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$$

则

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta\boldsymbol{\lambda} & = & \boldsymbol{V}_r & \boldsymbol{\Lambda}_r^{-1} & \boldsymbol{u}_r^{\mathrm{T}} & \Delta\boldsymbol{\rho} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N\times 1 & & N\times r & r\times r & r\times M & M\times 1 \end{array}$$

由于去掉了小奇异值，使求解的过程变得稳定了。

所谓阻尼法，就是对小奇异值采取阻尼的方式。在每个小奇异值上加上一个常数 α_0 或变量 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)^T$，人为地修改 $\boldsymbol{\Lambda}_p^{-1}$ 的对角线要素，使之变为

$$\boldsymbol{\Lambda}_p^{-1}=\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_0}\quad\frac{1}{\alpha_2+\alpha_0}\quad\cdots\quad\frac{1}{\alpha_p+\alpha_0}\right\}$$

或

$$\boldsymbol{\Lambda}_p^{-1}=\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}\quad\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}\quad\cdots\quad\frac{1}{\alpha_p+\beta_p}\right\}$$

由上面两式可以看出，由于阻尼因子的存在，极大地削弱了小奇异值在计算 $\Delta\lambda_j(j=1,2,\cdots N)$ 中的作用，而又很少改变大奇异值对 $\Delta\lambda_j$ 的贡献，从而达到了稳定求解的目的。

综上所述，广义反演法有许多优点，在不同情况下，可以起到不同反演法的作用。然而这并不是说有了广义反演法就行了，就可以解决大地电磁测深中的一切反演问题了。事实正好相反，为了缩小反演中解的非唯一性，恰恰需要多种方法，特别是需要用原理不同的多种反演方法反演同一条曲线，才能取得更好的成果。以后我们还要讲述这一点。

图 3.3.9 是用截断法计算时广义反演法的框图，而图 3.3.10 是广义反演法的一个应用实例。

5. *连续介质反演法*

前面讲述了水平均匀层状介质表面大地电磁测深曲线的几种常用的反演方法，当介质电阻率随深度连续变化时，这些方法的应用就受到限制。为了提高反演的精度，必须采用适合于连续介质的反演方法。

Oldenburg(1979)(Reprint series: Vozoff, K.(Ed)1986) 证明，在连续介质情况下有

$$\delta\rho_a(T_i)=\int_0^\infty G(\lambda_0,T_i)\delta\lambda(z)\mathrm{d}\lambda\quad i=1,2,\cdots,M \tag{3.3.65}$$

式中 $\delta\rho_a(T_i)$——是在第 i 个周期上，视电阻率的实际观测值 $\rho_a(T_i)$ 与初始模型 $\boldsymbol{\lambda}_0(z)$ 处的理论视电阻率 $\rho_T(T_i)$ 之间的扰动；

$\delta\boldsymbol{\lambda}(z)$——是待求模型相对于初始模型 $\boldsymbol{\lambda}_0(z)$ 之扰动；

$G(\boldsymbol{\lambda}_0,T_i)$——是核函数。

(3.3.65) 式是第一类 Fredholm 方程，解之就可以求得 $\delta\lambda(z)$。解这类线性积分方程的方法很多。这里我们将模型参数化，用一系列离散深度上的数值代替电阻率随深度的连续变化，进而，将(3.3.65) 式化成求和的形式，用解线性方程的办法求解一系列离散深度上的 $\delta\lambda(z_j)$，$(j=1,2,\cdots,N)$，然后对初始模型 $\lambda_0(z)$ 进行校正，并将校正后的模型作为新的初始

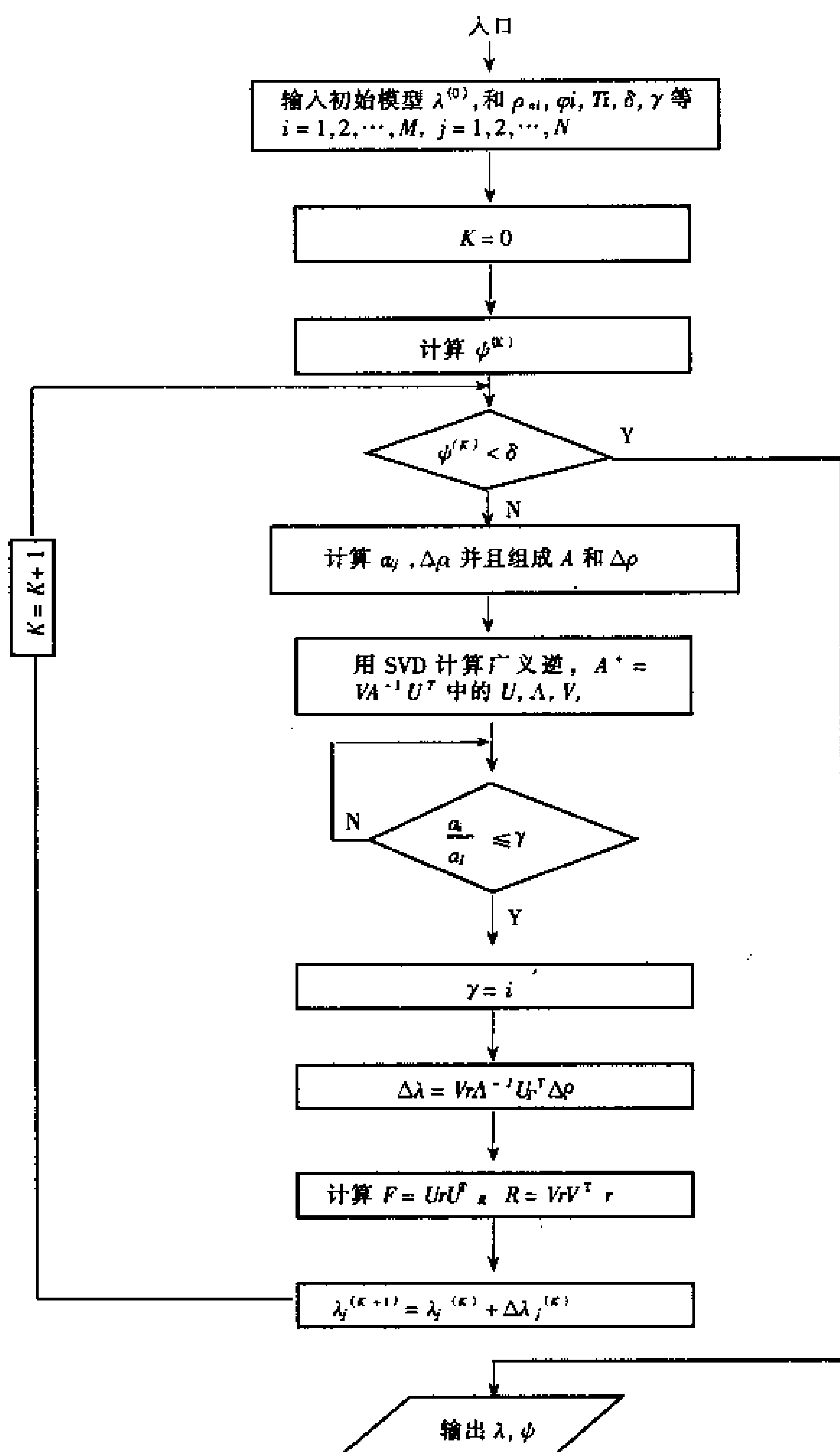


图 3.3.9 广义反演法框图

模型反复进行迭代，直至满足要求为止。

由于观测数据的频点数有限，要由有限的观测数据，求出连续变化的模型或无限多深度点上的电阻率，这显然是不可能的，即使将模型在一系列深度上离散化，而离散后的深度点 N 大于观测的频点数 M，也不可能求得连续变化的模型。

除了以上这些一维大地电磁测深曲线的反演方法外，拟地震解释法（王家映等，1985），

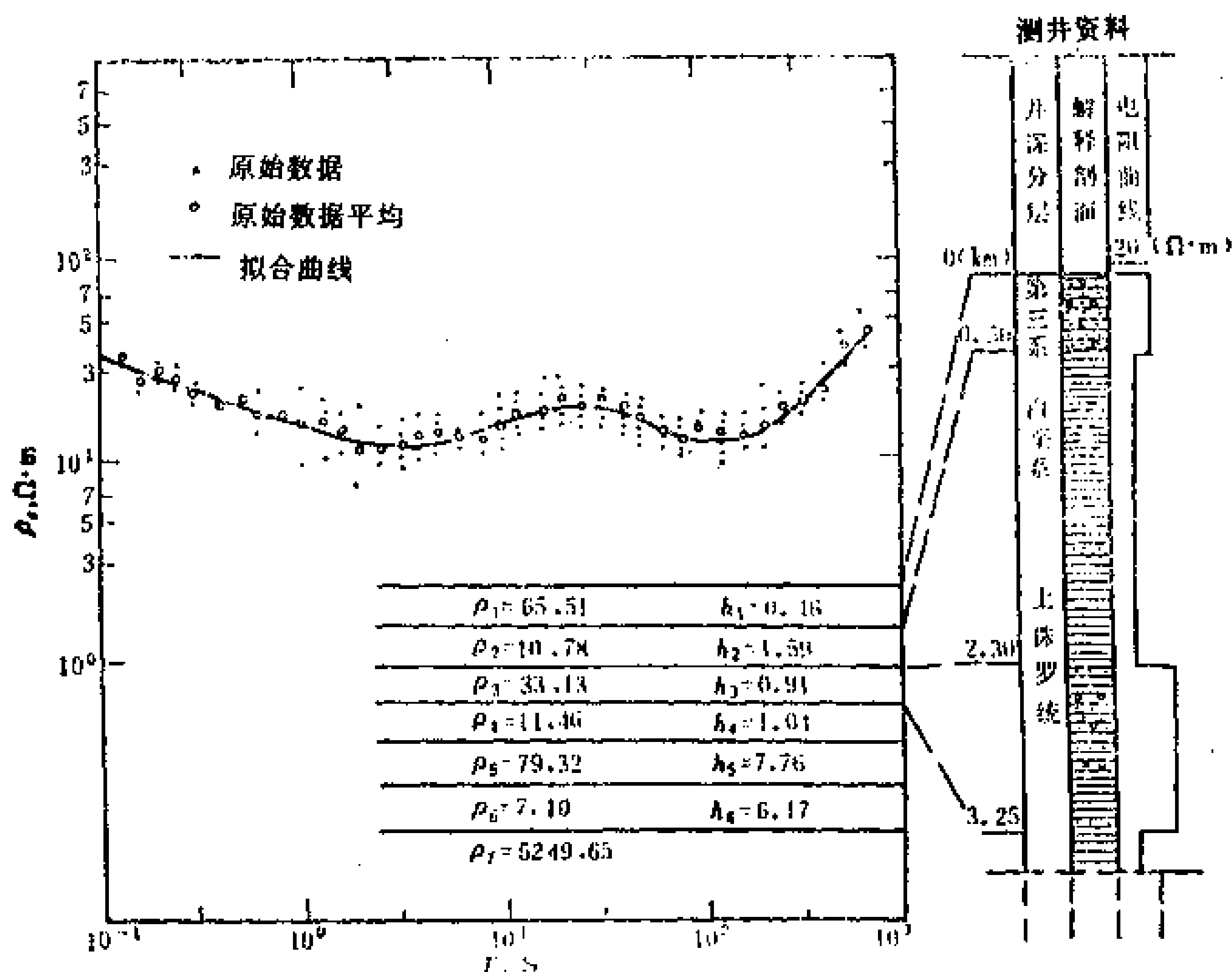


图 3.3.10　井旁测深曲线广义反演法结果

垂直时距曲线法(王家映等,1986),剥皮法,阻抗实分量反演法等在国内都得到了不同程度的应用,我们不一一加以分析了。

为什么要比较详细地介绍那么多一维大地电磁测深曲线的反演方法呢?根本原因就在于大地电磁测深曲线反演的非唯一性。所谓非唯一性,是指一条曲线与多个地电断面相应。因此在反演大地测深曲线时,切不可以为有了一个能拟合观测数据的模型就以为完成任务了。反演的目的不只是要一个能很好拟合观测数据的模型,更重要的是从众多能拟合观测数据的模型中找出一个比较切合实际的模型。实践经验证明,用多种反演方法反演同一条曲线,从各种方法反演结果的共性中,找出比较接近真实的模型是克服这一问题的重要途径(图 3.3.11)。

6. 二维正反演的简述

由于实际地电断面并非处处都是一维、或可用一维模型近似的二维或三维。基于一维反演方法求得的结果与真实地电断面不会完全一致。即使在完全二维条件下,并按前述方程正确地选择了 TE 或 TM 极化中的一条曲线解释,反演结果也不会处处令人满足。要求得比较接近实际的模型,还必须结合大地电磁测深所获得的多种资料,包括视电阻率曲线 ρ_{TE},ρ_{TM},相位曲线 φ_{TE},φ_{TM},倾子等进行二维反演,这是至关重要的。

由于三维正反演问题在目前仅处于研究阶段,因此,我们将把注意力集中在二维问题。和一维反演问题一样,二维的反演的基础仍然是正演。只有根据二维初始模型计算出二维正演理论曲线,才能和实测曲线对比,进而根据方差的大小及参数的特征对初始模型进行校正,在得到新的模型以后,又重复上述步骤,如此反复迭代,直至满足要求为止。

(1) 二维正演

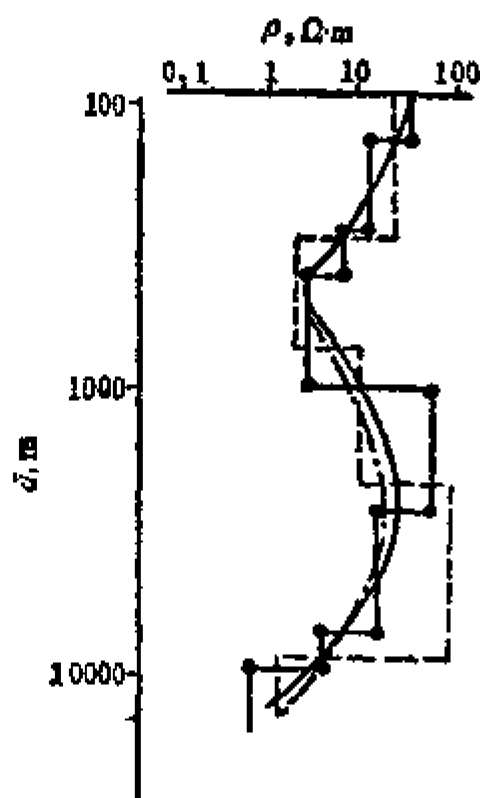


图 3.3.11 各种反演结果（模型）对比

除极为简单的二维模型可以用解析法求解外，绝大部分二维模型的正演问题只能用数值法求解。文献中用于大地电磁二维正演计算的方法有有限差分法，传输面法，有限单元法和积分方程法等等。由于篇幅有限，我们不打算在此全面论述二维数值模拟的各种方法的细节。

不管是哪种二维数值模拟方法，都分 TE 和 TM 两种极化分别进行计算。对 TE 极化计算出 E_x，对 TM 极化计算出 H_x，在计算时应考虑相应的边界条件。算出 E_x 和 H_x 后，再根据

TE

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\sigma_x E_x \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}=i\omega\mu_0 H_y \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y}=-i\omega\mu_0 H_z$$

TM

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=i\omega\mu_0 H_x \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z}=\sigma_y E_y \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y}=-\sigma_z E_z$$

计算 H_y，H_z；E_y，E_z，和相应的阻抗张量、视电阻率、相位、倾子等。

(2) 二维反演

原理上讲，除模型参数较多，线性方程的系数矩阵的阶数很大，因而反演时间较长外，二维反演和一维反演没有任何本质的区别。所不同的是一维反演仅涉及一条曲线，对各个测点分别进行；二维反演同时反演一条测线的所有大地电磁测深曲线，既包括两种极化的视电阻率和相位曲线，也包括倾子的振幅和相位等。这就意味着，二维反演的数据和计算工作量与一维反演相比，多出十倍以上。因此，二维反演的关键是：

① 要提出比较接近真实的初始模型。这里，我们建议以上述一维反演结果作为二维反演的初始模型；

② 由于正演计算时间长，因此要有一些快速计算大地电磁响应相对于模型参数偏导数的方法，以代替一般的差商方法。

必须指出，由于实际地电断面并非真正二维，加之各种干扰和观测误差以及正演计算和数据处理时的数字误差，在二维反演时对观测数据的拟合程度不可能要求过高，不可能作到所有观测数据完全拟合。

第 3 章 参考文献

1. 王家林，王一新，万明浩. 石油重磁解释. 北京：石油工业出版社，1991
2. 王一新，王家林，万明浩，钟慧智. 石油综合地球物理方法与应用. 北京：石油工业出版社，1995
3. 陈乐寿，王光锷. 大地电磁测深法. 北京：地质出版社，1990
4. 王家映. 石油电法勘探. 北京：石油工业出版社，1992

第4章　地震波的散射与吸收

地下岩石是非弹性介质，在离震源的距离大于几个波长的远场情况，可以用线性粘弹性介质来近似。散射和吸收是地震波在分层粘弹性介质中传播时最重要的物理现象。本章首先介绍地震波的散射理论和吸收对地震波传播的影响，然后讨论利用反射波振幅与入射角关系的信息在寻找油气中的应用。

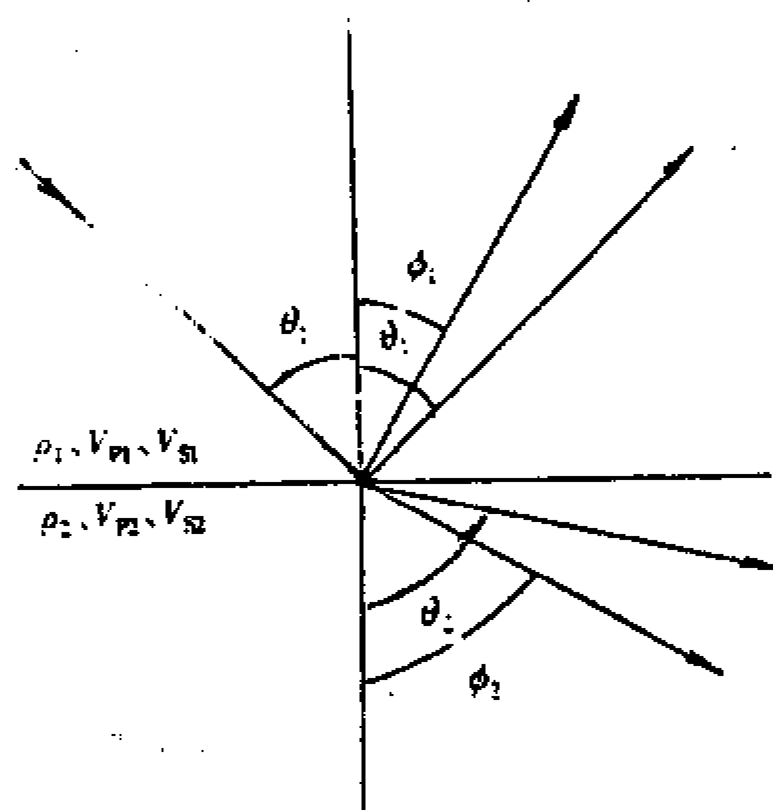


图4.1.1　P波入射到弹性界面

4.1　地震波散射

本节讨论弹性介质中单界面和多层介质中的地震波散射问题。在无限弹性介质中，压缩波或纵波（P波）和两个切变波或横波（SV波和SH波）分别以 $V_P\left(=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\right)$ 和 $V_S\left(=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)$ 的速度传播。当遇到界面时，P波和SV波相互耦合，会产生波型转换，SH波不发生波型转换。这里我们仅讨论P波和SV波的散射问题。

4.1.1　单界面情况波的散射特征

（1）Zoeppritz 方程

当平面谐和P波入射到如图4.1.1所示的弹性界面时，将产生反射P波、反射SV波、透射P波和透射SV波。它们之间的振幅关系满足 Zoeppvitz 方程

$$\begin{bmatrix} \sin\theta_1 & \cos\phi_1 & -\sin\theta_2 & \cos\phi_2 \\ -\cos\theta_1 & \sin\phi_1 & -\cos\theta_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin2\theta_1 & \frac{V_{P1}}{V_{S1}}\cos2\phi_1 & \frac{\rho_2 V_{S2}^2 V_{P1}}{\rho_1 V_{S1}^2 V_{P2}}\sin2\theta_2 & \frac{\rho_2 V_{S2} V_{P1}}{\rho_1 V_{S1}^2}\cos2\phi_2 \\ \cos2\phi_1 & \frac{-V_{S1}}{V_{P1}}\sin2\phi_1 & \frac{-\rho_2 V_{P2}}{\rho_1 V_{P1}}\cos2\phi_2 & \frac{-\rho_2 V_{S2}}{\rho_1 V_{P1}}\sin2\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_P \\ R_{SV} \\ T_P \\ T_{SV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \\ \sin2\theta_2 \\ -\cos2\phi_1 \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

其中，ρ_1、V_{P1}、V_{S1}和 ρ_2、V_{P2}、V_{S2}分别是入射介质和透射介质的密度、纵波速度和横波速度；θ_1是P波的入射角和反射角，ϕ_1 是SV波反射角，θ_2 是P波透射角，ϕ_2 是SV波透射角。

入射角与反射角及透射角满足 Snell 定律

$$\frac{\sin\theta_1}{V_{P1}} = \frac{\sin\phi_1}{V_{S1}} = \frac{\sin\theta_2}{V_{P2}} = \frac{\sin\phi_2}{V_{S2}} = p \tag{4.1.2}$$

其中，p 称为射线参数或水平慢度。由(4.1.2)式可见，在一定条件下存在临界角，它对波传播特性有重大影响。根据入射介质与透射介质的速度关系，考虑到同一介质中纵波速度总是大于横波速度，可以把出现临界角与否的所有情况列于表 4.1.1 中。

表 4.1.1

速度关系	入射波型	临　界　角　情　况
$V_{P1} > V_{S1} > V_{P2} > V_{S2}$	P 波	无临界角
	SV 波	一个临界角 $\phi_{cr} = \arcsin(V_{S1}/V_{P1})$
$V_{P1} > V_{P2} > V_{S1} > V_{S2}$	P 波	无临界角
	SV 波	两个临界角 $\phi_{cr1} = \arcsin(V_{S1}/V_{P1})$　$\phi_{cr2} = \arcsin(V_{S1}/V_{P2}$
$V_{P1} > V_{P2} > V_{S2} > V_{S1}$	P 波	无临界角
	SV 波	三个临界角 $\phi_{cr1} = \arcsin(V_{S1}/V_{P1})$　$\phi_{cr2} = \arcsin(V_{S1}/V_{P2})$　$\phi_{cr3} = \arcsin(V_{S1}/V_{S2})$
$V_{P2} > V_{P1} > V_{S1} > V_{S2}$	P 波	一个临界角 $\theta_{cr} = \arcsin(V_{P1}/V_{P2})$
	SV 波	两个临界角 $\phi_{cr1} = \arcsin(V_{S1}/V_{P2})$　$\phi_{cr2} = \arcsin(V_{S1}/V_{P1})$
$V_{P2} > V_{P1} > V_{S2} > V_{S1}$	P 波	一个临界角 $\theta_{cr} = \arcsin(V_{P1}/V_{P2})$
	SV 波	三个临界角 $\phi_{cr1} = \arcsin(V_{S1}/V_{P2})$　$\phi_{cr2} = \arcsin(V_{S1}/V_{P1})$　$\phi_{cr3} = \arcsin(V_{S1}/V_{S2})$
$V_{P2} > V_{S2} > V_{P1} > V_{S1}$	P 波	两个临界角 $\theta_{cr1} = \arcsin(V_{P1}/V_{P2})$　$\theta_{cr2} = \arcsin(V_{P1}/V_{S2})$
	SV 波	三个临界角 $\phi_{cr1} = \arcsin(V_{S1}/V_{P2})$　$\phi_{cr2} = \arcsin(V_{S1}/V_{S2})$　$\phi_{cr3} = (V_{S1}/V_{P1})$

在讨论临界角对波传播的影响以前，首先引入均匀平面波与非均匀平面波的概念。对一个平面脉冲波来说，可通过傅氏变换把它分解为不同频率的平面谐和波，记为

$$\begin{aligned} f &= \Phi(\omega)\exp[\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] \\ &= \Phi(\omega)\exp[\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

其中，$\Phi(\omega)$是平面脉冲波的频谱密度函数；$\vec{k}$是波数向量，k_x、k_y 和 k_z 分别是 $\vec{k}$在 x、y、z 上的分量；$\vec{r}$是位置向量，x、y、z 分量是 $\vec{r}$ 的坐标分量；ω 是角频率，t 是时间。对于弹性介质来说，$\vec{k}$恒为实数。当 k_x、k_y 和 k_z 都是实数时，相应的平面波是均匀平面波；当它们为复数时，则为非均匀平面波。各复分量用实部和虚部写出

$$k_x = k_x' + \mathrm{i}k_x'',\qquad k_y = k_y' + \mathrm{i}k_y'',\qquad k_z = k_z' + \mathrm{i}k_z'' \tag{4.1.4}$$

(4.1.4)代入(4.1.3)式得

$$f = \Phi(\omega)\exp[\mathrm{i}(k_x'x + k_y'y + k_z'z - \omega t]\exp[-(k_x''x + k_y''y + k_z''z)] \tag{4.1.5}$$

(4.1.5)式表明，非均匀波是振幅随 x，y 或 z 增大而指数减小的波，且等振幅面由下式表示

$$k_x''x + k_y''y + k_z''z = C_1(\text{常数}) \tag{4.1.6}$$

等相位面表达式为

$$k_x'x + k_y'y + k_z'z = C_2(\text{常数}) \tag{4.1.7}$$

把(4.1.4)式代入下面的波数关系式

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{4.1.8}$$

再令等式两边虚部相等后得

$$k_x'k_x'' + k_y'k_y'' + k_z'k_z'' = 0 \tag{4.1.9}$$

这表明，在弹性介质中非均匀波的等振幅面与等相位面是正交的。

对于图4.1.1所示的坐标，令 $k_y' = k_y'' = 0$，引入某角度 θ 使得

$$k_x = k\sin\theta, \qquad k_z = k\cos\theta \tag{4.1.10}$$

由于非均匀波的 k_x 和 k_z 都是复数，故 θ 必为复角，记为

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\theta'' \tag{4.1.11}$$

其中，θ'' 为正实数。(4.1.11)式代入(4.1.10)式得

$$k_x = k\mathrm{ch}\theta'', \qquad k_z = \mathrm{i}k\mathrm{sh}\theta'' \tag{4.1.12}$$

此时，非均匀平面波的表达式可改写为

$$f = \Phi(\omega)\exp[-k\cdot\mathrm{sh}\theta''\cdot z]\exp[\mathrm{i}(k\cdot\mathrm{ch}\theta''\cdot x - \omega t)] \tag{4.1.13}$$

由(4.1.13)式可见，此非均匀平面波沿 x 轴方向传播，但振幅沿 z 轴方向呈指数衰减，且非均匀波的传播速度和波长分别为

$$\frac{\omega}{k\cdot\mathrm{ch}\theta''} = \frac{C}{\mathrm{ch}\theta''} \tag{4.1.14}$$

和

$$\frac{2\pi}{k\cdot\mathrm{ch}\theta''} = \frac{\lambda}{\mathrm{ch}\theta''} \tag{4.1.15}$$

其中，c 和 λ 分别是均匀波的速度和波长。由于双曲余弦 $\mathrm{ch}\theta''$ 的值总是大于或等于1，故非均匀平面波的速度和波长总是小于相应均匀平面波的速度和波长。

当入射角小于临界角时，反射波和透射波都是均匀平面波。当入射角等于表4.1.1列出的最小临界角时，(4.1.14)式和(4.1.15)式中的 θ'' 角等于零，因而波传播速度和波长仍等于均匀平面波的速度和波长。但当入射角大于临界角时，相应的反射或透射波将沿着界面传播成为非均匀平面波。而且，大于临界角愈甚，θ'' 角愈大，$\mathrm{ch}\theta''$ 愈大，因而相应的非均匀平面波的波速和波长愈小。此外，由于大于临界角入射时反射系数成为复数，因此反射波和透射波都与入射波有相位差(即相移)；而且，大于临界角愈甚，相移愈大。对于平面脉冲波入射到界面，当入射角小于临界角时，反射波与透射波的波形与入射波相同；但当入射角大于临界角后，由于不同频率成份的谐和波的相移是不同的，故反射与透射的平面脉冲波的波形必将与入射波不同。因此，在地震勘探的数据采集和处理时必须慎重对待。通常，我们总是要求在小于临界角的范围采集数据，或在处理时切除大于临界角的数据，以避免大于临界角时波形变化带来的不利影响。

(2) *Zoeppritz 方程的 Bortfeld 近似*

Zoeppritz 方程精确地表述了反射系数和透射系数与入射角及界面两侧弹性常数的关系，但函数关系复杂。为了明确地表达反射系数与弹性常数的关系，Bortfeld 对 P 波入射时 P 波反射系数导出了下面简化关系式

$$R_{\mathrm{P}} \approx \frac{1}{2}\ln\left[\frac{V_{\mathrm{P2}}\rho_2/\cos\theta_2}{V_{\mathrm{P1}}\rho_1/\cos\theta_1}\right] + \left(\frac{\sin\theta_1}{V_{\mathrm{P1}}}\right)^2(V_{\mathrm{S1}}^2 - V_{\mathrm{S2}}^2)\left[2 + \frac{\ln(\rho_2/\rho_1)}{\ln(V_{\mathrm{P2}}/V_{\mathrm{P1}}) - \ln(V_{\mathrm{P2}}V_{\mathrm{S1}}/V_{\mathrm{P1}}V_{\mathrm{S2}})}\right] \tag{4.1.16}$$

上式中第一项与 SV 波速度无关，称为声学项，第二项称为切变项。据徐仲达的观点(1991)，声学项可有四种情况：

① $V_{P2}\rho_2 > V_{P1}\rho_1$ 和 $V_{P2} < V_{P1}$

此时,法向入射的反射系数是正值;随着入射角增加,反射系数减小,即反射系数随入射角增大呈下降趋势。

② $V_{P2}\rho_2 > V_{P1}\rho_1$ 和 $V_{P2} > V_{P1}$

法向入射的反射系数为正值;随着入射角增加,反射系数呈上升趋势。

③ $V_{P2}\rho_2 < V_{P1}\rho_1$ 和 $V_{P2} > V_{P1}$

法向入射的反射系数是负值;随着入射角增加,反射系数负值减小,即反射系数呈上升趋势。

④ $V_{P2}\rho_2 < V_{P1}\rho_1$ 和 $V_{P2} > V_{P1}$

法向入射的反射系数为负值;随着入射角增加,反射系数负值增大,即反射系数呈下降趋势。

对于切变项,可改写成

$$\frac{\sin^2\theta_1}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}\left[(0.5-\sigma_1)(1-\sigma_1)-(1-\sigma_1)(0.5-\sigma_2)\frac{V_{P2}^2}{V_{P1}^2}\right]\left[2+\ln\frac{\rho_2 V_{S2}}{\rho_1 V_{S1}}\right] \tag{4.1.17}$$

在实际介质中,界面两侧的横波波阻抗差值不会超过 5 倍,此时$\left[2+\ln\frac{\rho_2 V_{S2}}{\rho_1 V_{S1}}\right]$总为正值;由于弹性介质的泊松比取值范围是 0~0.5,故$\frac{1}{(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}$也总为正值。因而,此两项不会改变反射系数随入射角变化的趋势。切变项中剩下的方括号部份在 $V_{P1}\approx V_{P2}$时近似地等于 $0.5(\sigma_2-\sigma_1)$。因此,当透射介质的泊松比 σ_2 大于入射介质的泊松比 σ_1 时,反射系数随入射角增加呈上升趋势;当 $\sigma_2<\sigma_1$ 时,反射系数随入射角增加呈下降趋势;当 $\sigma_1\approx\sigma_2$ 时,反射系数随入射角增加基本保持不变。但当 V_{P2}与 V_{P1}相差很大时,还应考虑界面两侧的速度差异对反射系数的影响。

由上面讨论可知,P 波反射系数是声学项与切变项共同作用的结果,它随入射角变化的曲线形态由于界面两侧弹性差异不同而不同,这成为地震勘探中利用反射系数随入射角(或偏移距)变化的信息判断岩性或寻找油气的依据。

(3) Zoeppritz 方程的线性近似

Bortfeld 近似虽能表述反射系数与入射角关系的曲线形态与介质弹性参数的关系,但用于地震数据的处理和解释仍不够简捷。这里介绍对 Zoeppritz 方程作线性近似,以得到更简单的关系式

Aki and Richards(1980)在界面两侧的弹性参数差异不大的假设下提出 Zoeppritz 方程中 P 波反射系数的线性近似表达式

$$R_P(\theta)\approx\frac{1}{2}\left(1-4\frac{V_S^2}{V_P^2}\sin^2\theta\right)\frac{\Delta\rho}{\rho}+\frac{\sec^2\theta}{2}\frac{\Delta V_P}{V_P}-\frac{4V_S^2}{V_P^2}\sin^2\theta\frac{\Delta V_S}{V_S} \tag{4.1.18}$$

其中,$V_P=(V_{P1}+V_{P2})/2,\quad \Delta V_P=V_{P2}-V_{P1}$

$V_S=(V_{S1}+V_{S2})/2,\quad \Delta V_S=V_{S2}-V_{S1}$

$\rho=(\rho_1+\rho_2)/2,\quad \Delta\rho=\rho_2-\rho_1$

$\theta=(\theta_1+\theta_2)/2.$

Shuey(1985)进一步把(4.1.18)式改写为

$$R_P(\theta) \approx R_0 + \left[A_0 R + \frac{\Delta\sigma}{(1-\sigma)^2}\right]\sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{\Delta V_P}{V_P}(\tan^2\theta - \sin^2\theta) \tag{4.1.19}$$

其中，$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$，　　$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$

$$R_0 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta V_P}{V_P} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right),\ B = \frac{\Delta V_P/V_P}{\Delta V_P/V_P + \Delta\rho/\rho}$$

$$A = A_0 + \frac{1}{(1-\sigma)^2}\frac{\Delta\sigma}{R_0^2},\ A_0 = B - (1+B)\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}$$

σ_1 和 σ_2 分别为入射介质和透射介质的泊松比。

当入射角不大时，(4.1.19)式进一步近似为一个线性表达式

$$R_P(\theta) \approx R_0 + G\sin^2\theta \tag{4.1.20}$$

其中，$G = \frac{1}{2}\frac{\Delta V_P}{V_P} - \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{2\Delta V_P}{V_P}\right)\left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\right) + \frac{\Delta\sigma}{(1-\sigma)^2}$

(4.1.20)式表明，如果以 $R_P(\theta)$ 作为纵坐标，$\sin^2\theta$ 作为横坐标，则两者为线性关系；该直线的截距就是 P 波法向入射的 P 波反射系数，斜率即为 G。

地震勘探常采用多次覆盖方式采集数据。在多次覆盖数据集中可沿测线顺序抽取共中心点(common midpoint 简称 CMP)道集。对每个 CMP 道集，经动校正后每个时刻提取道集内各偏移距(可换算为入射角)道的反射波振幅，用上述直线拟合得到的截距 R_0 组成了 P 波叠加剖面，由斜率 G 组成梯度叠加剖面。P 波叠加剖面主要反映界面两侧的波阻抗差异，它比水平叠加剖面更接近法向入射的自激自收剖面，且具有更高的分辨率，更适于作为参数反演的基础资料。梯度叠加剖面主要反映界面两侧的泊松比差异，能用于判断油气存在与否。

应当注意，上面在线性近似时已作了界面两侧弹性差异不大(实际介质往往并非如此)、小入射角等假设，因此在使用 P 波剖面时应当注意到这些局限性。

4.1.2 多层介质中散射波的频率响应

这里讨论的是夹在上、下固体半空间之间 $n-1$ 个弹性层组成的水平层状多层介质模型(图 4.1.2)。平面纵波从上半空间($n+1$)以 θ_{n+1} 角入射到此层系顶面，将产生反射纵波和反射横波，在层系底面产生透射纵波和透射横波。假定入射纵波 P 的振幅为 1，反射纵波振幅为 V，反射横波振幅为 V'，透射纵波振幅为 W，透射横波振幅为 W'，则上、下半空间处的位移标量位和向量位分别为

$$\phi_{n+1} = \exp[-i\alpha_{n+1}(Z-H)] + V\exp[i\alpha_{n+1}(Z-H)] \tag{4.1.21a}$$

$$\psi_{n+1} = V'\exp[i\beta_{n+1}(Z-H)] \tag{4.1.21b}$$

$$\phi_1 = W\exp[-ik_1 Z\cos\gamma_1] \tag{4.1.21c}$$

$$\psi_1 = W'\exp[-iK_1 Z\cos\gamma_1] \tag{4.1.21d}$$

其中，$\alpha(=k\cos\theta)$ 是纵波波数的垂直分量，$k\left(=\frac{\omega}{c}\right)$ 是纵波波数，c 是纵波速度；$\beta = (k\cos\gamma)$ 是横波波数的垂直分量，$K\left(=\frac{\omega}{b}\right)$ 是横波波数，b 是横波速度；θ 是纵波的反射角或透射角，γ 是横波的反射角或透射角；各物理量加下标 $n+1$ 或 1 分别代表上半空间和下半空间。

在弹性层系的每个弹性层中都存在向下传播和向上传播的一对纵波和横波，各层内的

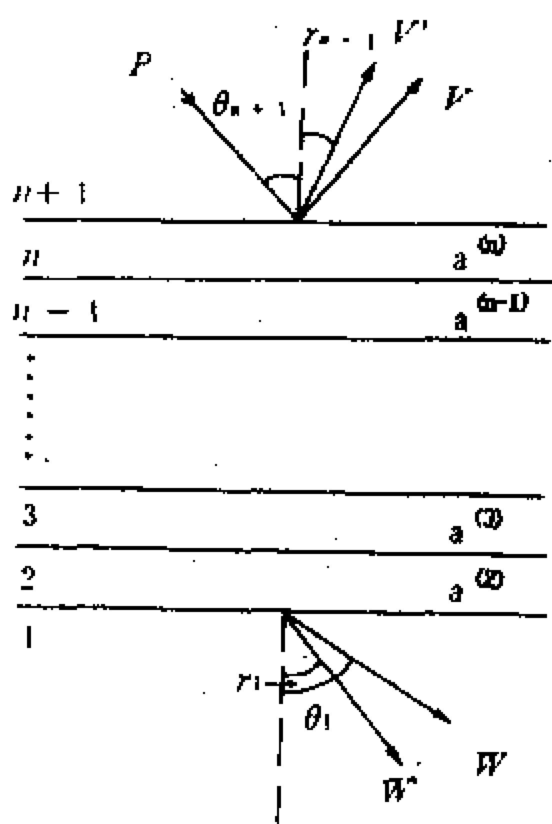


图 4.1.2 多层介质模型

水平波数都等于入射纵波的水平波数 ξ，即

$$\xi = k_{n+1}\sin\theta_{n+1} = k_i\sin\theta_i = K_i\sin\gamma_i \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{4.1.22}$$

各弹性层之间界面应满足应力连续和位移连续，即

$$[\sigma_{zz}] = 0 \quad [\sigma_{zx}] = 0 \quad [u] = 0 \quad [w] = 0 \tag{4.1.23}$$

其中，σ_{zz}和σ_{zx}分别是正应力和切应力，u 和 w 分别是位移的水平分量和垂直分量。

首先考虑任一层序号为 j 的层，且暂时把坐标原点放在层 j 和层$j-1$之间的界面上。该层内的纵波和横波的位函数表达式分别为

$$\phi = \phi'\exp(\mathrm{i}\alpha z) + \phi''\exp(-\mathrm{i}\alpha z) \tag{4.1.24a}$$

$$\psi = \psi'\exp(\mathrm{i}\beta z) + \psi''\exp(-\mathrm{i}\beta z) \tag{4.1.24b}$$

这里，上标为单撇号表示向上传播的波，双撇号表示向下传播的波，且省略了共有的因子 $\exp[\mathrm{i}(\xi x - \omega t)]$。

位移分量据 Helmholtz 向量分解公式

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla\times\vec{\psi} \tag{4.1.25}$$

得到。应力分量为

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{4.1.26a}$$

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{4.1.26b}$$

在层 j 的顶面($z = d$)处的位移和应力用 $u^{(i)}, w^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}$和$\sigma_{zx}^{(i)}$表示。经简单运算得

$$u^{(j)} = \mathrm{i}\xi\cos P(\phi' + \phi'') - \xi\sin P(\phi' - \phi'') - \mathrm{i}\beta\cos Q(\psi' - \psi'') + \beta\sin Q(\psi' + \psi'')$$

其中，$P(=\alpha d)$和 $Q(=\beta d)$分别是纵波和横波垂向通过该层的相移因子。同样可写出 $w^{(i)}$、$\sigma_{zz}^{(i)}$和$\sigma_{zx}^{(i)}$的表达式且统一用下面的矩阵公式表示

$$\begin{bmatrix} u^{(j)} \\ w^{(j)} \\ \sigma_{zz}^{(j)} \\ \sigma_{zx}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\xi\cos P & -\xi\sin P & -\mathrm{i}\beta\cos Q & \beta\sin Q \\ -\alpha\sin P & \mathrm{i}\alpha\cos P & -\xi\sin Q & \mathrm{i}\xi\cos Q \\ -(\lambda k^2 + 2\mu\alpha^2)\cos P & -\mathrm{i}(\lambda k^2 + 2\mu\alpha^2)\sin P & -2\mu\xi\beta\cos Q & -2\mathrm{i}\mu\xi\beta\sin Q \\ -2\mathrm{i}\mu\alpha\xi\sin P & -2\mu\alpha\xi\cos P & -\mathrm{i}\mu(\xi^2 - \beta^2)\sin Q & \mu(\beta^2 - \xi^2)\cos Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' + \phi'' \\ \phi' - \phi'' \\ \psi' - \psi'' \\ \psi' + \psi'' \end{bmatrix} \tag{4.1.27}$$

对于层 j 的底界面($z = 0$)处相应的矩阵只要在(4.1.27)式中令 $P = Q = 0$ 即可得到。再据界面连续性条件，层 $j-1$ 的顶界面处位移和应力分量的矩阵为

$$\begin{bmatrix} u^{(j-1)} \\ w^{(j-1)} \\ \sigma_{zz}^{(j-1)} \\ \sigma_{zx}^{(j-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\xi & 0 & -\mathrm{i}\beta & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\alpha & 0 & \mathrm{i}\xi \\ -\lambda k^2 + 2\mu\alpha^2 & 0 & -2\mu\xi\beta & 0 \\ 0 & -2\mu\alpha\xi & 0 & \mu(\beta^2-\xi^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' + \phi'' \\ \phi' - \phi'' \\ \psi' - \psi'' \\ \psi' + \psi'' \end{bmatrix} \tag{4.1.28}$$

(4.1.28)式对 $\phi' + \phi''$等求解,并把结果代入(4.1.27)式,经化简后得

$$\begin{bmatrix} u^{(j)} \\ u^{(j)} \\ \sigma_{zz}^{(j)} \\ \sigma_{zx}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(j-1)} \\ w^{(j-1)} \\ \sigma_{zz}^{(j-1)} \\ \sigma_{zx}^{(j-1)} \end{bmatrix} \tag{4.1.29}$$

其中,层矩阵 a 的元素 a_{ik}为

$$a_{11} = a_{44} = (\cos P - \cos Q)\cdot 2b^2\xi^2/\omega^2 + \cos Q$$
$$a_{12} = a_{34} = \mathrm{i}[\sin P\cdot\xi(1-2b^2\xi^2/\omega^2)/\alpha - \sin Q\cdot 2\xi\beta/K^2]$$
$$a_{13} = a_{24} = \mathrm{i}(-\cos P + \cos Q)\xi/(\omega^2\rho)$$
$$a_{14} = (\sin P\cdot\xi^2/\alpha + \sin Q\cdot\beta)/(\omega^2\rho)$$
$$a_{21} = a_{43} = \mathrm{i}[\sin P\cdot 2\alpha b^2\xi/\omega^2 - \sin Q\cdot\xi(1-2b^2\xi^2/\omega^2)/\beta]$$
$$a_{22} = a_{33} = \cos P(1-2b^2\xi^2/\omega^2) + \cos Q\cdot 2b^2\xi^2/\omega^2$$
$$a_{23} = (\sin P\cdot\alpha + \sin Q\cdot\xi^2/\beta)/(\omega^2\rho)$$
$$a_{31} = a_{42} = \mathrm{i}(\cos P - \cos Q)\cdot 2\rho\xi b^2(1-2b^2\xi^2/\omega^2)$$
$$a_{32} = \sin P\cdot\rho\omega^2(1-2b^2\xi/\omega^2)(2\xi^2-K^2)/(\alpha K^2) + \sin Q\cdot 4\rho\beta b^2\xi^2/K^2$$
$$a_{41} = -\sin P\cdot 4\rho\alpha b^4\xi^2/\omega^2 + \sin Q\cdot\rho b^2(1-2b^2\xi^2/\omega^2)(2\xi^2-K^2)/\beta$$

如果已知介质 1 与 2 之间界面上的应力和位移,通过连续性条件可得到介质 1 与 $n+1$ 中应力和位移之间的矩阵关系:

$$\begin{bmatrix} u^{(n+1)} \\ w^{(n+1)} \\ \sigma_{zz}^{(n+1)} \\ \sigma_{zx}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{zx}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{4.1.30}$$

其中,层系矩阵 A 是层 2 到层 n 的层矩阵的乘积,即

$$A = a^{(n)}a^{(n-1)}\cdots a^{(3)}a^{(2)}$$

把位函数表达式(4.1.21a)和式(4.1.21b)代入第 $n+1$ 层的位移和应力表达式(4.1.25)和式(4.1.26)后得

$$u^{(n+1)} = \mathrm{i}(\xi + \xi V - \beta_{n+1}V') \tag{4.1.31a}$$
$$w^{(n+1)} = \mathrm{i}(-\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}V + \xi V') \tag{4.1.31b}$$
$$\sigma_{zz}^{(n+1)} = -\rho_{n+1}\omega^2(\cos 2\gamma_{n+1}V + \sin 2\gamma_{n+1}V' + \cos 2\gamma_{n+1}) \tag{4.1.31c}$$
$$\sigma_{zx}^{(n+1)} = \rho_{n+1}\omega^2\left(\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}^2}\sin^2\theta_{n+1} - \frac{b_{n+1}^2}{c_{n+1}}V + \cos 2\gamma_{n+1}V'\right) \tag{4.1.31d}$$

同样,得到第一层的位移和应力表达式

$$u^{(1)} = \mathrm{i}(\xi W + K\cos\gamma_1 \cdot W') \tag{4.1.32a}$$

$$w^{(1)} = \mathrm{i}(-\alpha_1 W + \xi W') \tag{4.1.32b}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = -\omega^2\rho_1(\cos 2\gamma_1 \cdot W - \sin 2\gamma_1 \cdot W') \tag{4.1.32c}$$

$$\sigma_{zx}^{(1)} = \omega^2\rho_1\left(\cos 2\gamma_1 \cdot W' + \frac{b_1^2}{c_1^2}\sin 2\theta_1 \cdot W\right) \tag{4.1.32d}$$

把(4.1.31)式和(4.1.32)式代入(4.1.30)式得

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} = &\ \mathrm{i}A_{11}(\xi W + W'K_1\cos\gamma_1) + \mathrm{i}A_{12}(W'\xi - \alpha_1 W) \\ &+ A_{13}\omega^2\rho_1(W'\sin 2\gamma_1 - W\cos 2\gamma_1) + A_{14}\omega^2\rho_1\left(\frac{b_1^2}{c_1^2}\sin 2\theta_1 + W'\cos 2\gamma_1\right) \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

考虑到 A_{11}等元素是复数,令 R_{11}和 I_{11}分别表示其实部和虚部

$$A_{11} = R_{11} + \mathrm{i}I_{11} \qquad A_{12} = R_{12} + \mathrm{i}I_{12} \quad A_{13} = R_{13} + \mathrm{i}I_{13} \qquad A_{14} = R_{14} + \mathrm{i}I_{14}$$

代入(4.1.33)式得

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} = &\ W'[-I_{11}K_1\cos\gamma_1 - I_{12}\xi + R_{13}\omega^2\rho_1\sin 2\gamma_1 + R_{14}\omega^2\rho_1\cos 2\gamma_1) \\ &+ \mathrm{i}(R_{11}K_1\cos\gamma_1 + R_{12}\xi + I_{13}\omega^2\rho_1\sin 2\gamma_1 + I_{14}\omega^2\rho_1\cos 2\gamma_1)] \\ &+ W[(-I_{11}\xi + I_{12}\alpha_1 - R_{13}\omega^2\rho_1\cos 2\gamma_1 + R_{14}\omega^2\rho_1\frac{b_1^2}{c_1^2}\sin^2\theta_1) \\ &+ \mathrm{i}(R_{11}\xi - R_{12}\alpha_1 - I_{13}\omega^2\rho_1\cos 2\gamma_1 + I_{14}\omega^2\rho_1\frac{b_1^2}{c_1^2}\sin^2 2\theta_1)] \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

同样可得到 $w^{(n+1)}$、$\sigma_{zz}^{(n+1)}$和 $\sigma_{zx}^{(n+1)}$的表达式。把(4.1.31)式代入(4.1.34)式等,经整理后得

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\xi \\ -\mathrm{i}\alpha_{n+1} \\ -\rho_{n+1}b_{n+1}^2(K_{n+1}^2 - 2\xi^2) \\ 2\rho_{n+1}b_{n+1}^2\xi\alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V' \\ W' \\ W \end{bmatrix} \tag{4.1.35}$$

其中,B 称为解矩阵,其元素为

$$\begin{aligned} &B_{11} = B_{22} = -\mathrm{i}\xi \\ &B_{12} = \mathrm{i}\beta_{n+1} \\ &B_{13} = (-I_{11}\beta_1 - I_{12}\xi + R_{13}E\beta_1 + R_{14}F) + \mathrm{i}(R_{11}\beta_1 + R_{12}\xi + I_{13}F\beta_1 + I_{14}F) \\ &B_{14} = -I_{11}\xi + I_{12}\alpha_1 - R_{13}F + R_{14}E\alpha_1 \\ &B_{21} = -\mathrm{i}\alpha_{n+1} \\ &B_{23} = (-I_{21}\beta_1 - I_{22}\xi + R_{23}E\beta_1 + R_{24}F) + \mathrm{i}(R_{21}\beta_1 + R_{22}\xi + I_{23}E\beta_1 + I_{24}F) \\ &B_{24} = -I_{21}\xi + I_{22}\alpha_1 - R_{23}F + R_{24}E\alpha_1 \\ &B_{31} = -B_{42} = \rho_{n+1}b_{n+1}^2(K_{n+1}^2 - 2\xi^2) \\ &B_{32} = 2\rho_{n+1}b_{n+1}^2\xi\beta_{n+1} \\ &B_{33} = (-I_{31}\beta_1 - I_{32}\xi + R_{33}E\beta_1 + R_{34}F) + \mathrm{i}(R_{31}\beta_1 + R_{32}\xi + I_{33}E\beta_1 + I_{34}F) \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

$$B_{34} = -I_{31}\xi + I_{32}\alpha_1 - R_{33}F + R_{34}E\alpha_1$$

$$B_{41} = 2\rho_{n+1}b_{n+1}^2\alpha_{n+1}$$

$$B_{43} = (-I_{41}\beta_1 - I_{42}\xi + R_{43}E\beta_1 + R_{44}F) + \mathrm{i}(R_{41}\beta_1 + R_{42}\xi + I_{43}E\beta_1 + I_{44}F)$$

$$B_{44} = -I_{41}\xi + I_{42}\alpha_1 - R_{43}F + R_{44}E\alpha_1$$

$$E = 2\rho_1 b_1^2\xi$$

$$F = \rho_l b_l^2(K_1^2 - 2\xi^2)$$

当 α_1 为虚数时记为 $\alpha_1 = \mathrm{i}\alpha_1''$，则(4.1.35)式中第 4 列元素相应写为

$$B_{i4} = (-I_{i1}\xi + R_{i2}\alpha_1'' - R_{i3}F - I_{i4}E\alpha_1'') + \mathrm{i}(R_{i1}\xi + I_{i2}\alpha_1'' - I_{i3}F + R_{i4}E\alpha_1'') \tag{4.1.37}$$

当 α_1 和 β_1 都是虚数时有 $\alpha_1 = \mathrm{i}\alpha_1''$ 和 $\beta_1 = \mathrm{i}\beta_1''$，除第 4 列元素按(4.1.37)式写出外，第 3 列元素应为

$$B_{i3} = (-I_{i1}\beta_1'' - I_{i2}\xi - I_{i3}E\beta_1'' + I_{i4}F) + \mathrm{i}(-I_{i1}\beta_1'' + R_{i2}\xi + R_{i3}E\beta_1'' + I_{i4}F) \tag{4.1.38}$$

求解矩阵方程(4.1.35)即可得到平面谐和波在弹性层系顶界面的纵波反射系数 V 和横波反射系数 V' 及底界面的纵波透射系数 W 和横波透射系数 W'。如果以不同的频率的平面谐和波入射到弹性层系上，就可获得纵波和横波的反射和透射系数的频率响应，即多层介质中散射波的频率响应。

若要计算弹性层系的反射波或透射波记录，只需先计算已知地震子波的频谱，然后与反射系数或透射系数频率响应相乘，再经反傅氏变换即可。

4.1.3 地层衰减

O'Doherty and Anstey(1971)提出，地震波在弹性层状介质中传播的地震衰减是由于层状介质的界面透射损失和层间多次反射共同作用的结果。对于弹性参数周期性变化(如砂、泥岩互层)的层状介质，法向入射的层间多次一方面趋向于补偿波通过大量界面时透射损失造成的反射波振幅的减小，一方面造成透射波高频成份的减小。

Schoenberger and Levin (1974,1978)用世界各地 30 多口井的合成记录验证了 O'Doherty and Anstey(1971)的结论。他们把速度测井和密度测井数据划分许多层，每层厚度都相应于 2ms 的双程旅行时。在所取得的测井数据以下的深部 15000 ft 处人为地设立一个孤立的反射层，其上直到测井数据底部取为均匀厚层。假定平面脉冲波法向入射到此水平层状介质，计算四种理论道：① 仅包括一次反射且无透射损失的"输入道；② 包括所有可能的反射和透射损耗的"全道"；③ 考虑了透射损耗的任意人为设定阶数的层间多次反射的"直接道"；④ 仅包括层间多次的"多次道"。如果包括 M 阶层间多次，则"尾波"长度为 $2M$ ms。一般当 M 等于 50 阶时就可认为包括了全部层间多次波。$M = M'$ 的直接道与 $M = 0$ 的直接道两者的频谱比给出 M' 个层间多次的贡献。$M = 0$ 的直接道与输入道两者的频谱比给出透射损耗的影响。$M = M'$ 的直接道与输入道两者的频谱比则给出透射损耗与层间多次的联合影响。为暂时不考虑各种物理现象与频率的关系，输入尖脉冲来形成合成道。

图 4.1.3 是井 A 的密度测井、速度测井、反射系数、输入道、直接道、多次道和全道记录。图 4.1.4 是井 A 测井深度(11000 ft)以下 4000 ft 处人为孤立界面所得到的通过介质的透射损失。它表明两次通过许多界面的透射损失达到 21 dB，但与频率无关。应当注意，透射损失并不随深度而均匀增加。图 4.1.5 表示井 A 的瞬时透射损失与双程旅行时的关系。该图

中 1.6—1.8s 的振幅急剧减小刚好与图 4.1.3 中速度快速变化的周期性地层相应。这与透射损失（$\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)^2$）随反射系数 R_i 的增大而增大是符合的。因此，单纯的透射损失仅降低透射波的振幅而与频率无关。

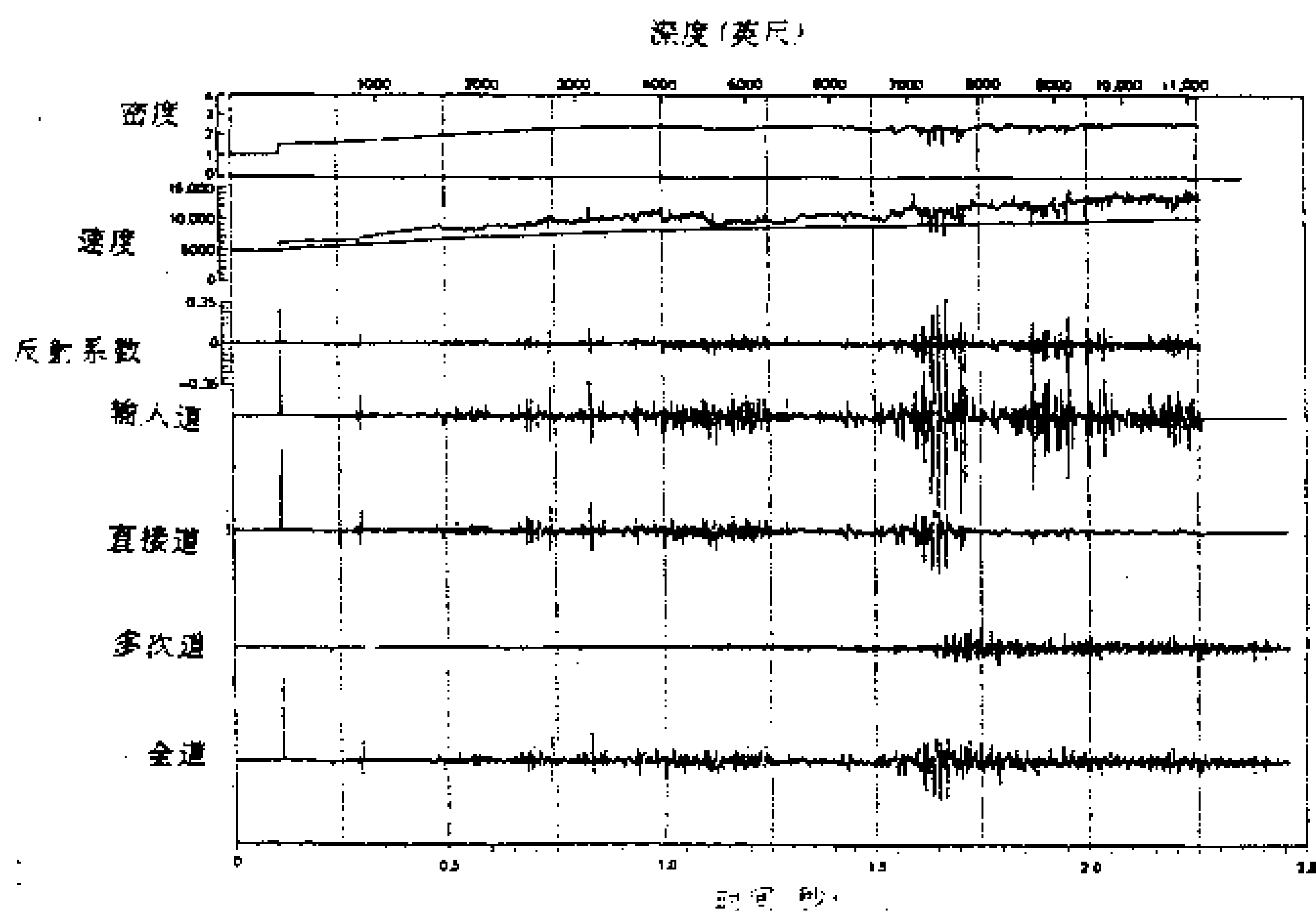


图 4.1.3　井 A 的测井数据与合成道

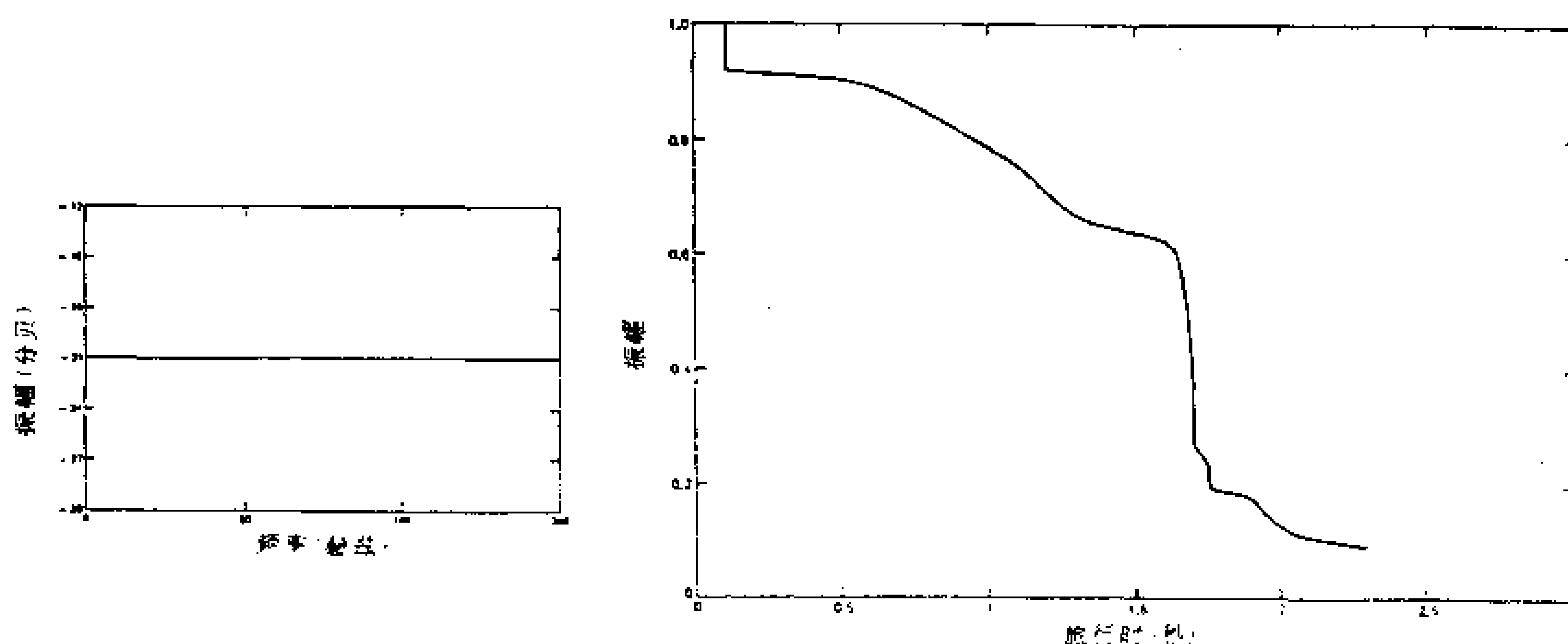


图 4.1.4　井 A 的透射损失

图 4.1.5　井 A 的透射损失与双程旅行时的关系

为了讨论层间多次的作用，对 15000 ft 深处的孤立界面计算尖脉冲反射波。图 4.1.6 表示直达波至和前 50 阶层间多次。由此图可见，前 8 个低阶层间多次与直达波具有相同的极性，且前 5 阶的层间多次都大于直达波，因而增强了复合波的低频能量。

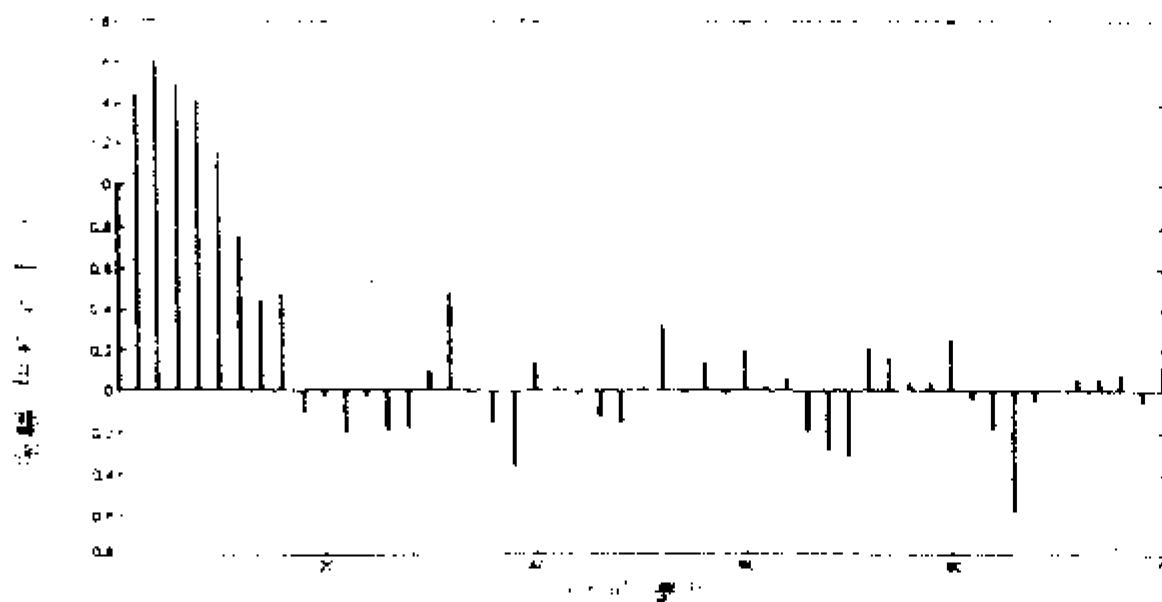


图 4.1.6　孤立界面的尖脉冲反射

图 4.1.7 是 M 在 0—50 阶时直接道与输入道两者的频谱比值与频率的关系曲线，它表培示地震脉冲的有效地层滤波。其中，(a)图中是 0~4 阶层间多次，(b) 图包括 5 阶层间多次，(c)图表示 50 阶层间多次，(d)图是包括所有层间多次的地层滤波。由这些曲线可见，$M=0$ 时虽有 21dB 的衰减，但不随频率而变；随着 M 的增大，产生了低频处有峰值的频变曲线，频变曲线的斜率逐渐增大，即选频作用更明显；当 $M=50$ 和 100 时，频谱比变为锯凿状的。

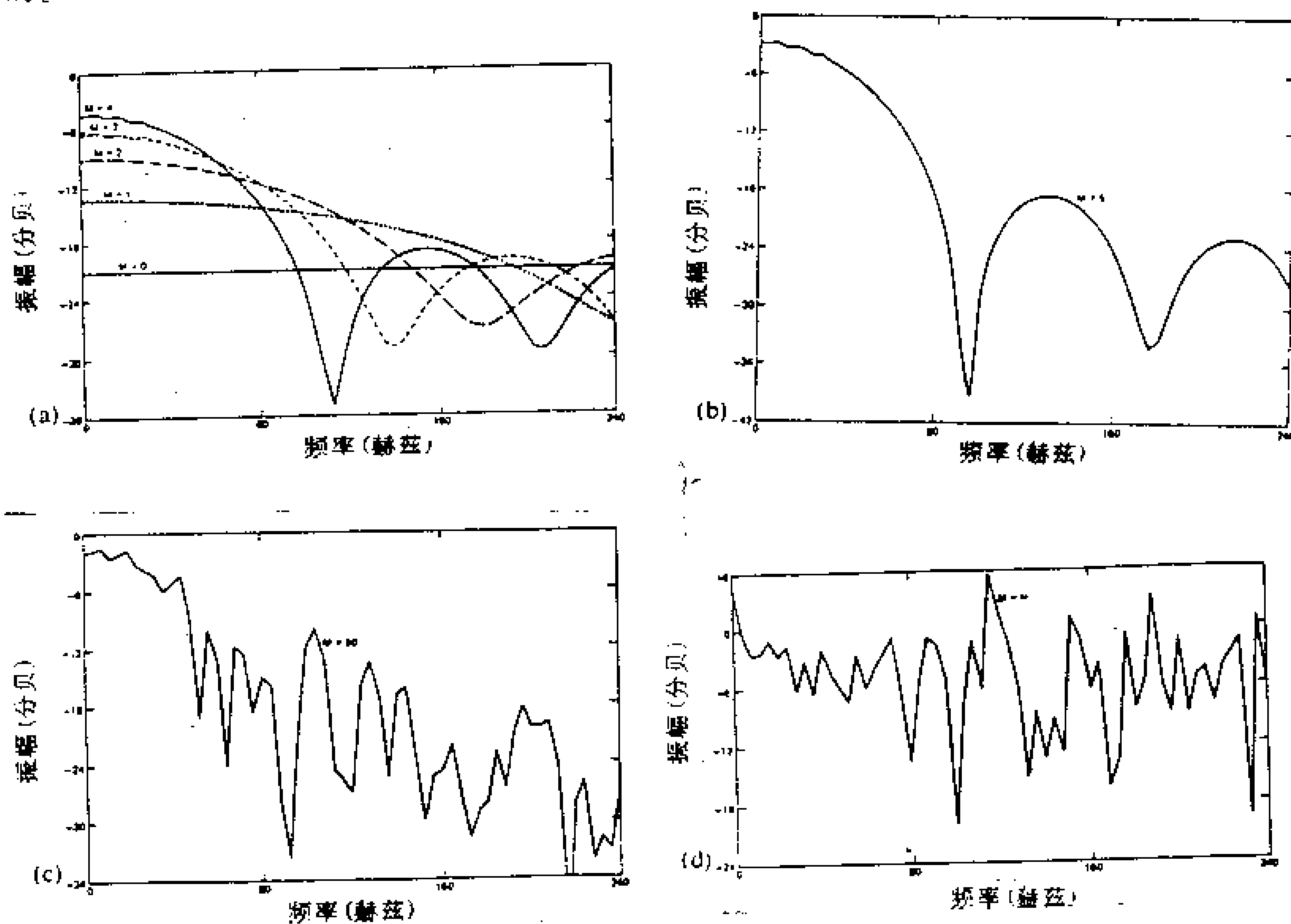


图 4.1.7　地震脉冲的有效地层滤波

为了说明不同地层结构的层间多次效应将产生不同的滤波特性，这里分别把井 A 的 8000 ft 和 7000 ft 以下的层间多次波消除掉(即把界面平滑掉)后计算 15000 ft 孤立界面上的尖脉冲反射，如图 4.1.8a 和 b 所示。比较图 4.1.8a 与图 4.1.6 后可见，两者基本相似，表明反射系数较小的 8000—11340 ft 剖面段对脉冲形状影响不大。但由图 4.1.8b 可见，尽管在 7000 ft 以下地层中旅行了两次，但由于不考虑层间多次，透射波仍保持为尖脉冲的基本形态。这表明，反射系数较大的 7000—8000 ft 剖面段的层间多次是主要影响。这从图 4.1.9 的包含 5 阶层间多次的地震脉冲的有效地层滤波曲线上更显然可见。

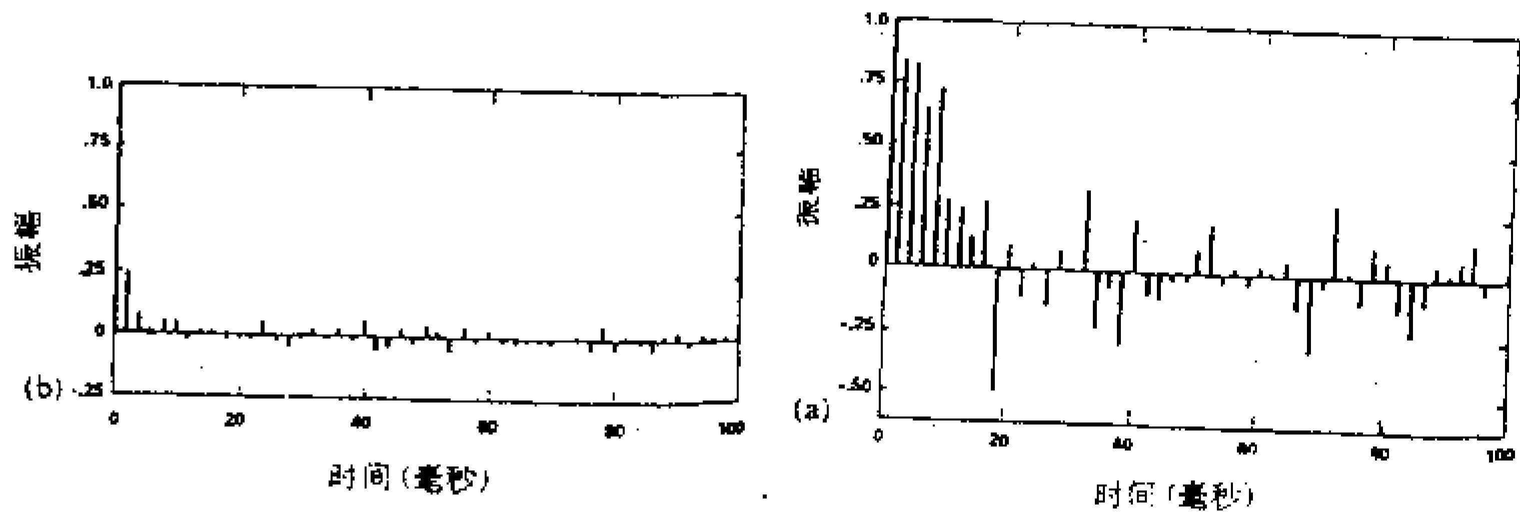


图 4.1.8 井 A 深 15000 呎处孤立界面的脉冲反射

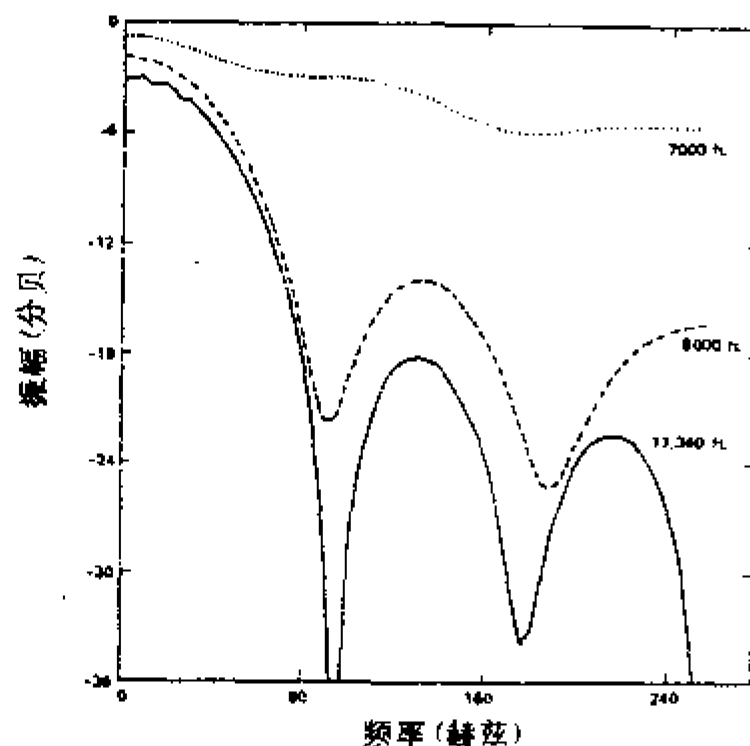


图 4.1.9 包括 5 阶层向多次的地震脉冲的有效地层滤波

图 4.1.10 是 1.6—2.2s 间隔上包含 M 阶层间多次的直接道与输入道两者的频谱比，(a)图是 $M=0$ 与 1，(b)图是 $M=3$ 与 5，(c)图是 $M=50$。在常用的地震勘探频带 0~150Hz 内，$M=0$(仅为透射损失)曲线的总体趋势基本上不随频率而变，透射损失约为 30%。随着 M 的增大(即所包含的层间多次阶数增多)，高频能量损耗增加。图 4.1.11 是包含层间多次的直接道与无层间多次的直接道两者的频谱的曲线，(a)图是 $M=1$ 与 2，(b)图是 $M=5$ 和 50。它反映层间多次的效应。图 4.1.11 与图 4.1.10 中相应 M 的曲线相似，进一步说明高频能量损耗是由于层间多次的结果。

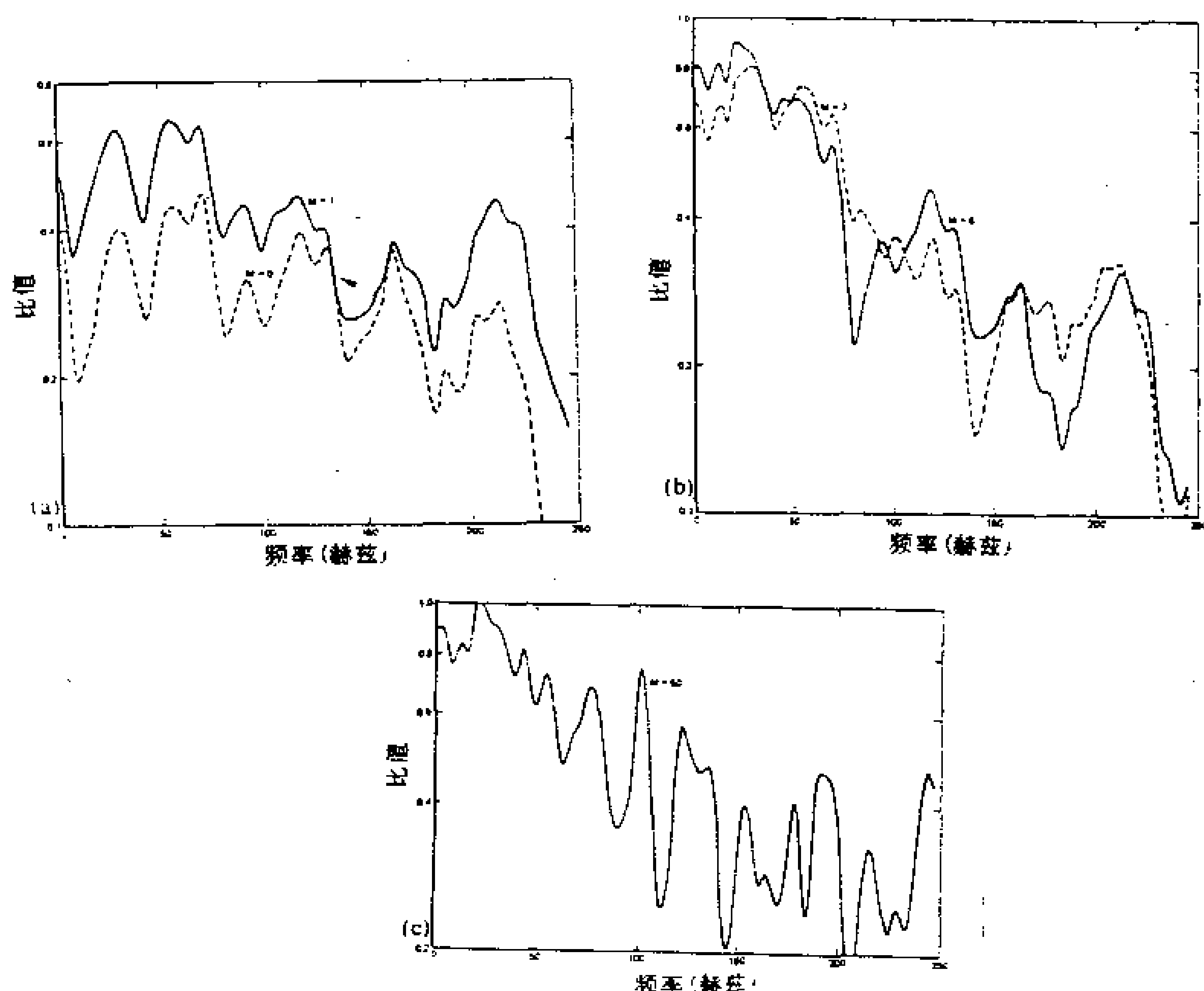


图 4.1.10　透射损失和层间多次两者的透射效应

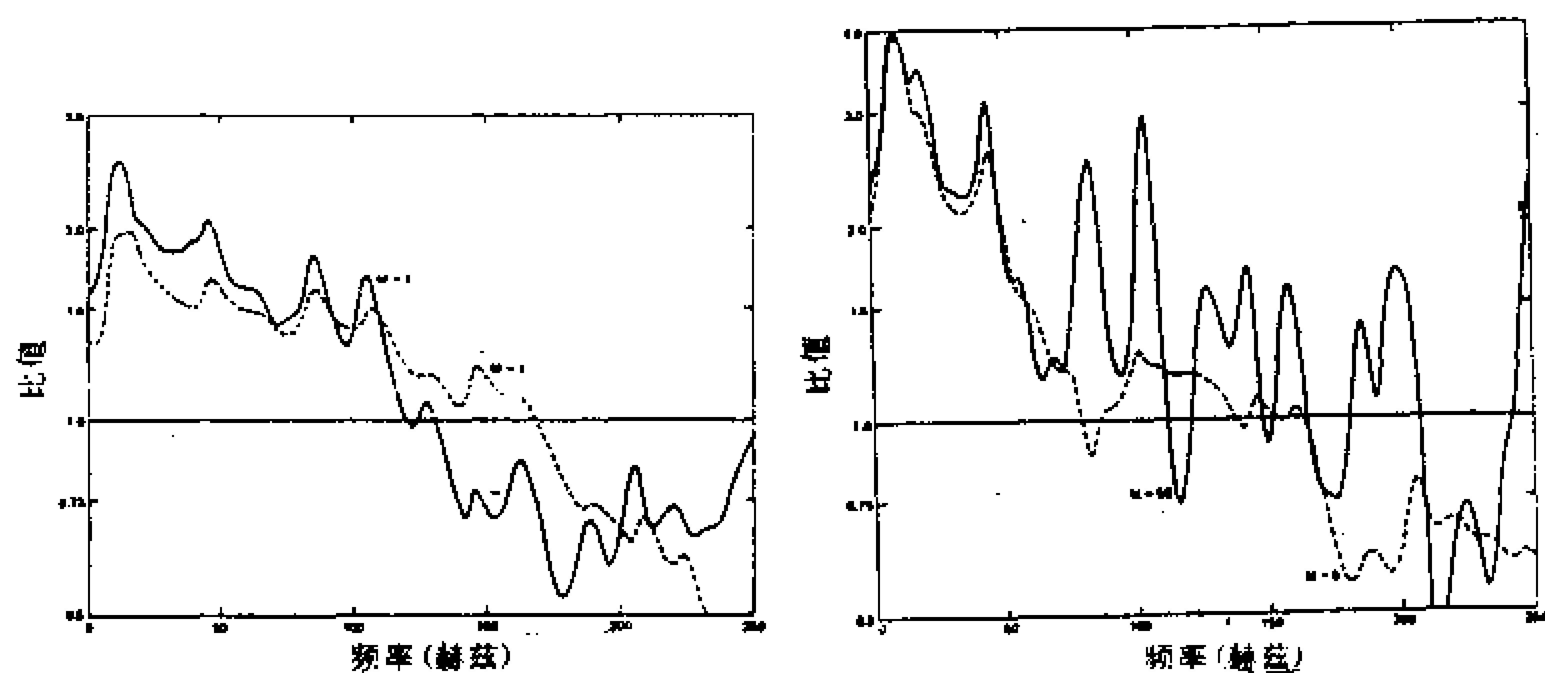


图 4.1.11　仅出层间多次的透射效应

为讨论实际野外记录中的损耗中吸收与层间多次各占多大比例,对 $M=50$ 的直接道的 0.5—1.1s 和 1.7—2.3s 两个时间段求取 0～100Hz 范围的频谱比,然后按 $\exp(-\alpha ft)$ 求取衰减系数为 0.0064。而由实际地震资料中与上述相同的时间段求得的衰减系数为 0.019。这

表明层间多次产生的视衰减约为野外观测数据的三分之一左右。

为讨论反射系数对地层衰减的影响，Schoenberger and Levin(1978)用小反射系数序列(井15)、中反射系数序列(井18)和大反射系数序列(井2)计算最深的测井数据以下人为孤立界面(图4.1.12a)产生的前100ms地表接收的尖脉冲记录道(图4.1.12b)。由图4.1.12b可

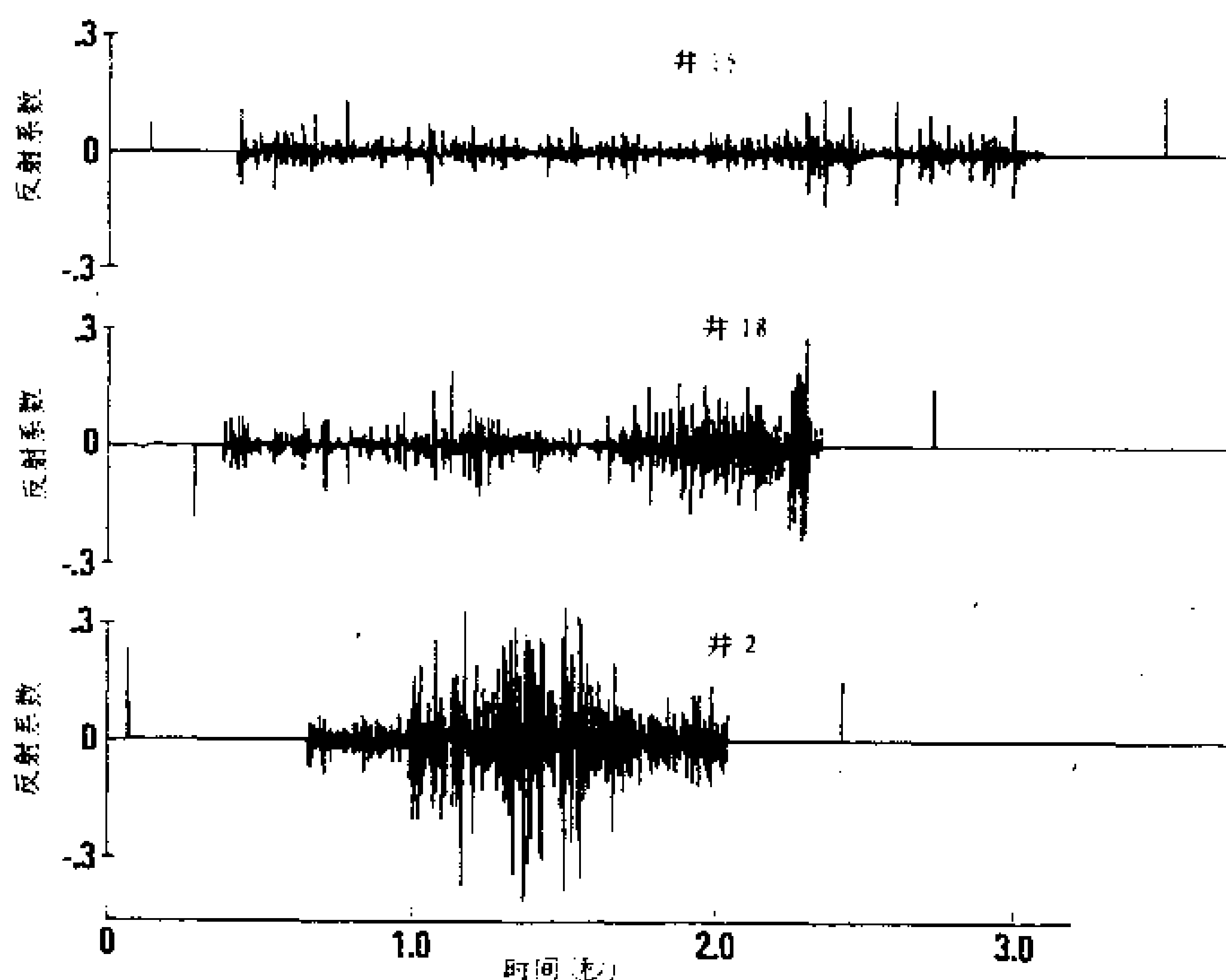


图4.1.12a 三口井的反射系数序列

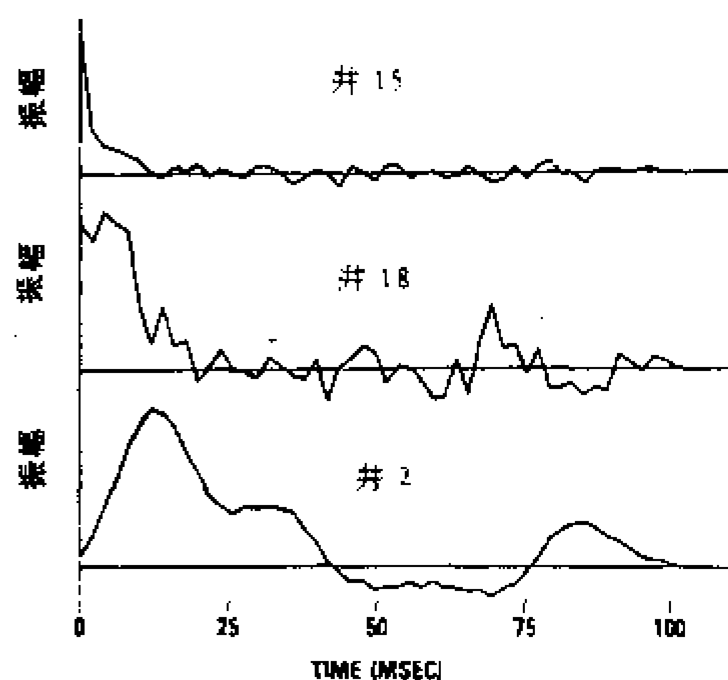


图4.1.12b 孤立界面反射波的前100ms记录

见，小反射系数序列得到的是接近于尖脉冲的地震道，表明层间多次的影响很小；大反射系数序列则由于能量转换为层间多次，造成脉冲加宽，时间延迟。图4.1.13是用孤立界面反射的前40ms计算的由透射损失和20阶层间多次的透射滤波效应；显然，大反射系数序列由于层间多次更强，故高频能量衰减更多。

由于层间多次使能量向后转移，产生了相位效应(图4.1.14)。相位延迟基本上随频率线性增大，大反射系数剖面的相位延迟增加更快(即曲线斜率更大)。这些相位曲线对直线的偏离程度是波散大小的度量；偏离愈大，波散愈大。图4.1.15是用地震子波作为输入时产生的地震记录。它表明反射系数愈大，透射波愈宽(即主频愈低)，时延愈大(由第一个波谷的时移来确定)。图4.1.16是世界各地30多口

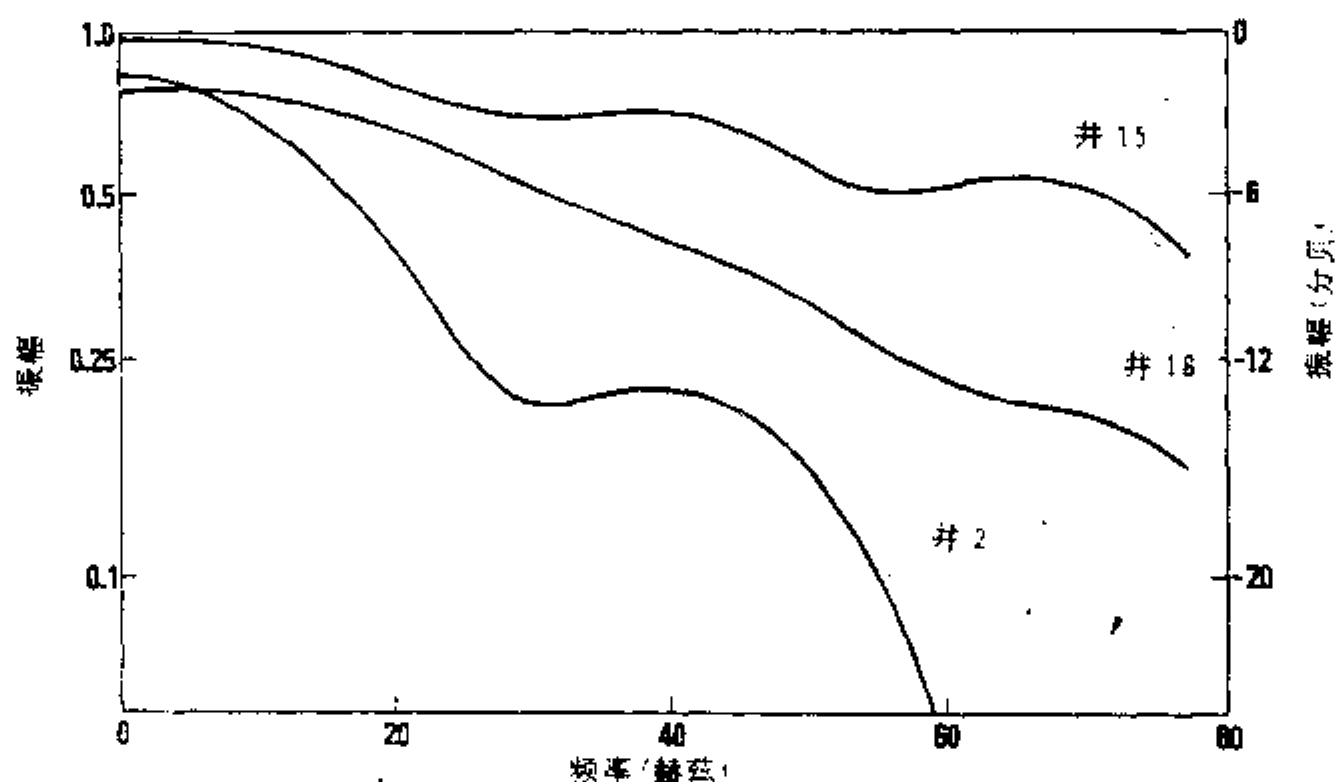


图 4.1.13　三口井的地层透射滤波

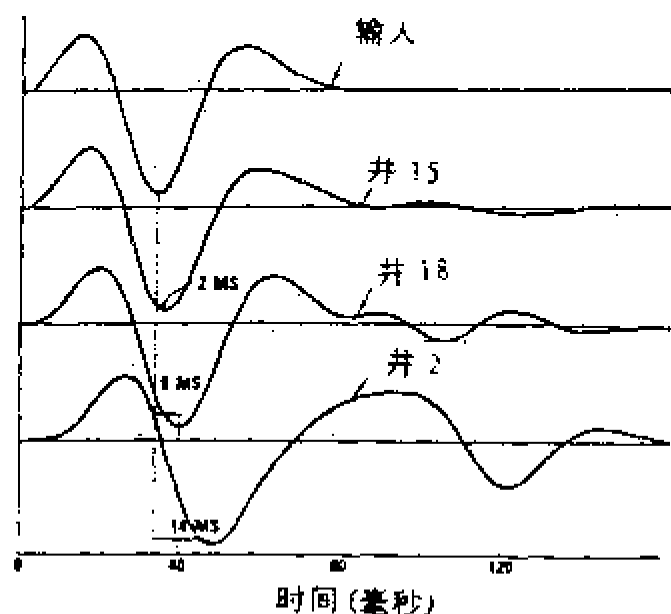


图 4.1.14　三口井的地层透射相位滤波

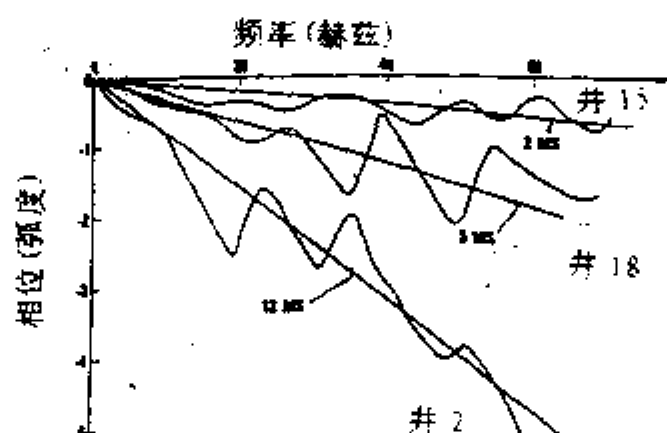


图 4.1.15　三口井孤立界面的反射波

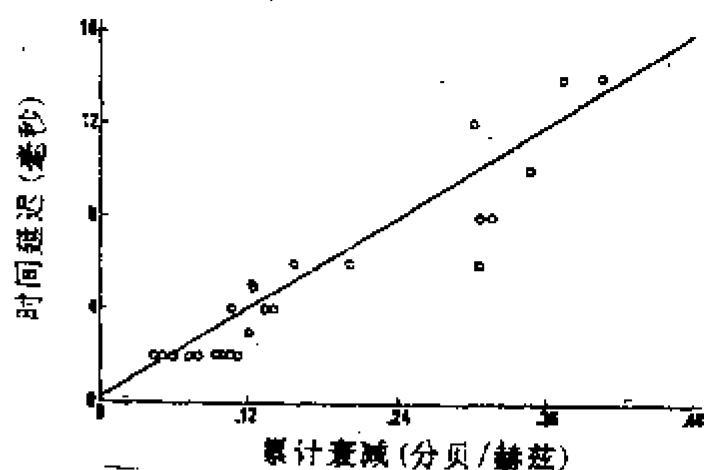


图 4.1.16　时延与累计衰减的关系

井求得的累计衰减与时延的关系。由前面讨论可知，反射系数愈大，层间多次的振幅愈大，由层间多次产生的累计衰减愈大，因而时延愈大。时延基本上与累计衰减成正比关系。

下面我们从理论上讨论。据 Ziolowski 等(1986)，厚度为 d_2、密度为 ρ_2、压缩波速为 v_2 的单个平面层夹在两个半空间(密度和压缩波速都为 ρ_1 和 v_1)情况在法向入射时的反射系数响应和透射系数响应分别为

$$R(\omega)=\frac{[1-\exp(2i\omega d_2/v_2]R_P}{1-R_P^2\exp(2i\omega d_2/v_2)} \quad (4.1.39)$$

$$T(\omega)=\frac{(1-R_{\mathrm{P}}^{2})}{1-R_{\mathrm{P}}^{2}\exp(2\mathrm{i}\omega d_{2}/v_{2})}\exp[\mathrm{i}\omega d_{2}(1/v_{2}-1/v_{1})] \tag{4.1.40}$$

其中，R_{P} 是单界面法向入射时的压力反射系数，等于$\frac{\rho_2 v_2-\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2+\rho_1 v_1}$。

在地震勘探频带范围，实际地层厚度都较小，即 $d \ll \lambda/4$，因而有

$$\exp(2\mathrm{i}\omega d_{2}/v_{2})\approx 1+\mathrm{i}2\omega d_{2}/v_{2} \tag{4.1.41}$$

代入(4.1.39)式后得薄层近似下的反射系数响应

$$R\approx\frac{-\mathrm{i}\omega R_{\mathrm{P}}\cdot 2d_{2}/v_{2}}{1-R_{\mathrm{P}}^{2}-\mathrm{i}R_{\mathrm{P}}^{2}\cdot 2\omega d_{2}/v_{2}} \tag{4.1.42}$$

实际介质的界面反射系数都不大($R_{\mathrm{P}}<0.4$)，故(4.1.42)式中的分母的虚部可以忽略，进一步近似为

$$R\approx\frac{-\mathrm{i}\omega R_{\mathrm{P}}\cdot 2d_{2}}{v_{2}(1-R_{\mathrm{P}}^{2})} \tag{4.1.43}$$

此式表明，薄层反射系数振幅随阻抗差(或 R_{P})的增加而增加，随层厚增大而线性增加，随频率增高而线性增加；而且，由式中因子($-\mathrm{i}\omega$)可见，反射波是入射波的微分，因而，薄层的反射响应是高频滤波器。图 4.1.17 是平面谐和波的反射响应与 d/λ 的关系曲线，它由(4.1.39)式计算，图中的倾斜直线则由(4.1.43)式计算得到。

由(4.1.40)式可见，反射系数响应是高频滤波器，则透射系数响应必为低通滤波器。其中的因子 $\exp[\mathrm{i}\omega d_{2}(1/v_{2}-1/v_{1})]$在所有频率处的模等于 1，仅包含相位信息。透射系数的振幅为

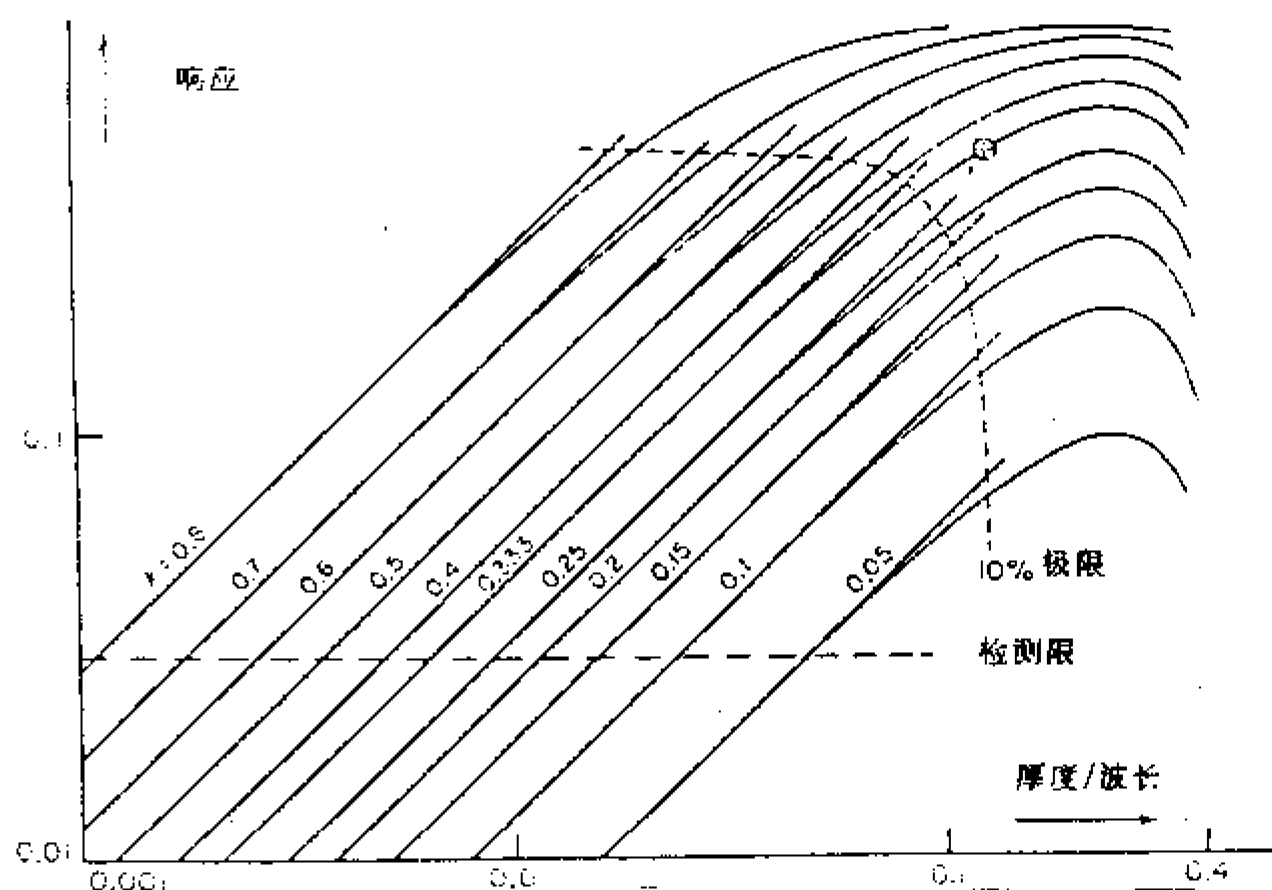


图 4.1.17　单层平面谐和波的反射响应

$$
|T(\omega)| = \frac{|1 - R_{\mathrm{p}}^2|}{|1 - R_{\mathrm{p}}^2 \exp(2\mathrm{i}\omega d_2 / v_2|)} \tag{4.1.44}
$$

图 4.1.18 是根据(4.1.44)式计算的透射系数振幅响应。它在 $\omega = \pi v_2 / 2d_2$(即 $d_2 = \lambda/2$)的调谐频率处具有极小值,且与该频率处反射系数极大值相应。因此,在调谐频率以下,薄层的透射响应是低通的。

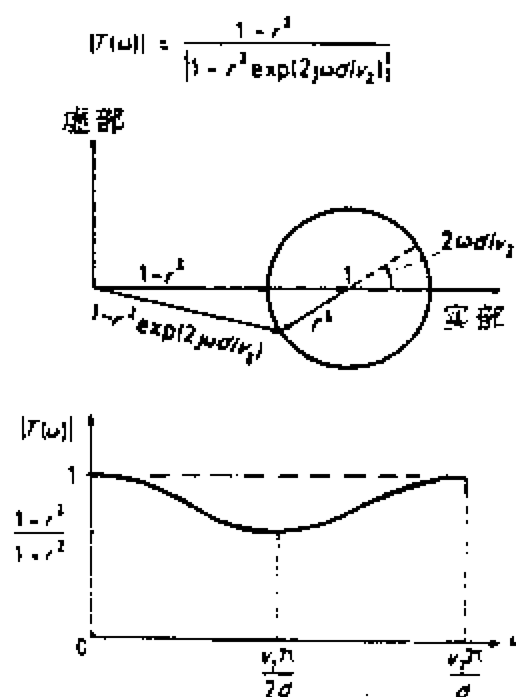


图 4.1.18 单层的透射响应

n 个单层的透射响应可由(4.1.44)式相乘 n 次后得到

$$
\begin{aligned}
|T_n(\omega)| &= |T(\omega)|^n \\
&= \frac{|1 - R_{\mathrm{p}}^2|^n}{|1 - R_{\mathrm{p}}^2 \exp(2\mathrm{i}\omega d_2 / v_2)|^n}
\end{aligned} \tag{4.1.48}
$$

它的透射响应与图 4.1.18 基本相似,但高频成份衰减增加了 n 倍。

这里要指出的是,一系列薄层,不管是否是周期性沉积,都存在一个相应的低通透射效应。

上述讨论进一步表明,薄层的反射响应是高通的,而透射响应是低通的。因而,对通过大量薄层之下的薄层反射波来说,两者的响应的组合应是带通的。此外,深部反射比浅部反射要通过更多的薄层,故频谱成份偏向低频。

4.2 地震波吸收

本节首先简述吸收衰减机制及其数学表述,导出线性粘弹性介质中的波动方程和粘弹性介质与弹性介质之间的对应原理。然后计算无限吸收介质和周期性结构细密分层吸收介质中的地震波形。最后讨论地层衰减与吸收衰减的分离问题。

4.2.1 吸收衰减机制

波在实际介质中传播时总有部份弹性能量转化为热能或其它形式的能量,导致非弹性吸收衰减。在离震源较远处,应力与应变都很小,可以用线性粘弹性理论来描述非弹性介质的性质。前人提出许多不同的模型来描述线性粘弹性介质中的应力与应变的关系。线性粘弹性介质中的弹性可用弹簧来描述,粘性可用阻尼器来描述。Maxwell 模型由一个弹性与一个阻尼器串联组成,Kelvin-Voigt 模型用一个弹簧和一个阻尼器并联组成。但是,Maxwell 模型不具备蠕变特性,Kelvin-Voigt 模型不能考虑应力作用下应变的突然变化,也不能表示应力消失后的剩余应变;两者都不足以描述粘弹性介质的特性。标准线性固体模型是由 Kelvin-Voigt 模型再串联一个弹簧组成的三元固体,它同时具备应变突然变化、剩余应变和蠕变等特性。

据 Ben-Menahem(1981),Maxwell 模型、Kelvin-Voigt 模型和标准线性固体模型在阶梯应力 $\sigma_0 H(t)$ 的作用下的应变响应可统一写为

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \phi_c(t) H(t) \tag{4.2.1}$$

其中，$\phi_c(t)$称为蠕变顺度，即单位作用力下产生的蠕应变，$H(t)$是亥维塞尔函数。这三个模型在阶梯应变 $\varepsilon_0 H(t)$作用下的应下响应可统一写为

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \psi_c(t) H(t) \tag{4.2.2}$$

其中，$\psi_c(t)$称为松弛模量。

实际介质的粘弹性可能要用许多或无数个蠕变顺度或松弛模量来描述。此时，可以用一维广义线性固体模型来表示，其应力与应变之间的关系可表示为

$$P\sigma(t) = S\varepsilon(t) \tag{4.2.3}$$

其中，

$$P = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + \cdots + p_L \frac{\partial^L}{\partial t^L}$$

$$S = s_0 + s_1 \frac{\partial}{\partial t} + \cdots + s_M \frac{\partial^M}{\partial t^M}$$

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \cdots = \sigma^{(L-1)} = 0 \qquad \text{在 } t = \pm \infty \text{ 时}$$

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} = \cdots = \varepsilon^{(M-1)} = 0 \qquad \text{在 } t = \pm \infty \text{ 时}$$

不失一般性，可令 $p_0 = 1$，(4.2.3)式经傅氏变换后得

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \frac{1 + p_1(\mathrm{i}\omega) + p_L(\mathrm{i}\omega)^2 + \cdots + p_2(\mathrm{i}\omega)^L}{s_0 + s_1(\mathrm{i}\omega) + s_2(\mathrm{i}\omega)^2 + \cdots + s_M(\mathrm{i}\omega)^M} \hat{\sigma}(\omega) \tag{4.2.4}$$

$$= \frac{\hat{p}(\mathrm{i}\omega)}{\hat{s}(\mathrm{i}\omega)} \hat{\sigma}(\omega) \tag{4.2.5}$$

$$= J^*(\mathrm{i}\omega) \hat{\sigma}(\omega) \tag{4.2.6}$$

其中，$J^*(\mathrm{i}\omega)$称为复蠕变顺度。

若在时刻 τ 对粘弹性介质作用一个应力$\sigma(\tau)$，且保持 $\delta\tau$ 时间长度，则此应力对后一时刻 t 的剩余应变贡献是$\sigma(\tau) M(t-\tau)\delta\tau$，其中 $M(t)$称为介质的存贮函数。因而，对任意时刻 t 的总贡献是这些无限小贡献之和，即

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) M(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{4.2.7}$$

这称为一维 Boltzman 叠加原理，相应的模型称为 Boltzman 固体模型。

上述讨论限于一维情况。对三维粘弹性介质，Kelvin-Voigt 模型的应力与应变的关系可写为

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm} + D_{ijlm} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial t} \tag{4.2.8}$$

在各向同性介质中，弹性常数 Cijlm 仅有两个是独立的，记为拉每常数 λ 和 μ，Stokes 粘滞常数 Dijlm 也仅有两个是独立的，记为 λ' 和 μ'。因此，若作如下代换

$$\lambda \rightarrow \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mu \rightarrow \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.2.9}$$

则与弹性介质作类比后，可把粘弹性介质的位移运动方程写为

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{F} + \alpha^2 \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \nabla \cdot \vec{u} - \beta^2 \left(1 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \times \nabla \times \vec{u} \tag{4.2.10}$$

其中，　$\tau_1 = \dfrac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}$，　$\tau_2 = \dfrac{\mu'}{\mu}$.

根据 Boltzman 叠加原理,可把上式推广得到线性粘弹性介质中最一般张量形式的应力-应变关系

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{t} \Psi_{ijlm}(t-\tau)\left[\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{lm}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.2.11}$$

其中,σ,ε,Ψ 都是空间坐标及时间的函数,Ψ_{ijlm}称为四阶松弛张量。

如果把(4.2.11)式改写为

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} r_{ijlm}(t-\tau)\mathrm{d}\varepsilon_{lm}(\tau) = r_{ijkl} * \mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{4.2.12}$$

则对各向同性情况,上式可简化为

$$\sigma_{ij}' = r_s * \mathrm{d}\varepsilon_{ij}' \tag{4.2.13a}$$

$$\sigma_{kk} = r_k * \mathrm{d}\varepsilon_{kk} \tag{4.2.13b}$$

其中,γ_s 和 γ_k 分别是与介质的切变特性和体变特性有关的松弛函数,上标撇号表示应力和应变的偏斜分量,即

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{4.2.14a}$$

$$\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{4.2.14b}$$

(4.2.13)式与应力运动方程及应变-位移关系式一起足以描述均匀各向同性线性粘弹性(HILV)介质。为得到这些方程的稳态解,可令位移为

$$u_i = U_i\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

其中,U_i 是复值位移振幅。实际位移由 u_i 的实部 u_{iR}给出。在无体力存在时,可通过应力运动方程等的傅氏变换得到控制 HILV 介质的稳态运动方程

$$P_{ij,j} + \rho\omega^2 U_i = 0 \tag{4.2.15}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \tag{4.2.16}$$

$$P_{ij}' = \mathrm{i}\omega R_s E_{ij}' \tag{4.2.17a}$$

$$P_{kk} = \mathrm{i}\omega R_k E_{kk} \tag{4.2.17b}$$

其中,R_s 和 R_k 分别是松弛函数 r_s 和 r_k 的傅氏变换,P_{ij}和 E_{ij}分别是应力 σ_{ij}和应变 ε_{ij}的傅氏变换。

如果定义复切变模量 M 和复体积模量 K 为

$$M = \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\right)R_s \tag{4.2.18}$$

$$K = \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{3}\right)R_K \tag{4.2.19}$$

则(4.2.17)式可写为

$$P_{ij}' = 2ME_{ij}' \tag{4.2.20a}$$

$$P_{kk} = 3KE_{kk} \tag{4.2.20b}$$

或统一写为

$$P_{ij} = \delta_{ij}\left(K - \frac{2}{3}M\right)E_{kk} + 2ME_{ij} \tag{4.2.21}$$

(4.2.21)式代入(4.2.15)式,再用(4.2.16)式简化后得到稳态位移运动方程

$$\left(K+\frac{M}{3}\right)\nabla\cdot u_i + M\nabla^2 u_i = \rho\ddot{u}_i \tag{4.2.22}$$

此方程与线弹性理论中的位移运动方程相似,差别仅在于线弹性介质中的实弹性常数在线性粘弹性介质中要用复弹性常数来代替。因此,如果在线弹性理论中,方程的任何解和实弹性常数用复弹性常数代替,就可得到线性粘弹性方程的解。这称为对应原理。

4.2.2 无限均匀吸收介质中的高频衰减和地震波形

根据对应原理,只要在前述的弹性层状介质公式中取弹性常数或波数与波传播速度为复数即变为线性粘弹性介质的公式。据 Frayer(1978),对均匀波有

$$Q^{-1} = -\frac{\mathrm{Im}(k^2)}{\mathrm{Re}(k^2)} \tag{4.2.23}$$

其中,Q 是质量因素,k 是复波数,Re 表示取实部,Im 表示取虚部,且有

$$k=\frac{\omega}{\alpha(\omega)}=\frac{\omega}{\alpha_R(\omega)+\mathrm{i}\alpha_I(\omega)} \tag{4.2.24}$$

当速度与频率无关,即在无速度波散时上式可简化为

$$k=\frac{\omega}{\alpha_R+\mathrm{i}\alpha_I} \tag{4.2.25}$$

代入(4.2.23)式得

$$Q^{-1}=\frac{2\alpha_R\alpha_I}{\alpha_R^2-\alpha_I^2} \tag{4.2.26}$$

在小吸收时可假定 $\alpha_R \gg \alpha_I$,则上式进一步简化为

$$Q^{-1}=\frac{2\alpha_I}{\alpha_R} \tag{4.2.27}$$

或

$$\alpha_I=\frac{\alpha_R}{2Q} \tag{4.2.28}$$

如果已知层状介质中各层的实波速 α_{ij}和质量因素 Q_j,可求出每层的复波速 α_j

$$\alpha_j=\alpha_{Rj}+\mathrm{i}\frac{\alpha_{Rj}}{2Q_j} \tag{4.2.29}$$

如果在前面的多层介质中散射波频率响应公式中所有的波速用复波速代替,就可得到多层吸收介质中散射波的频率响应公式。

我们利用多层吸收介质中透射波频率响应公式来讨论无限均匀吸收介质中的高频衰减和地震波形。假定尖脉冲 P 波分别法向入射到 100、200、500、1000、2000m 厚的单层模型顶界面上。如果该层的上、下半空间和层内的弹性参数和品质因素都相同,就等同于无限均匀吸收介质,所计算的不同层厚的透射系数频率响应相应于离震源不同距离上的频率响应变化。为了讨论品质因素 Q 对频率响应的影响,分别计算了小吸收(纵波品质因素 $Q_c=500$,横波品质因素 $Q_b=250$)和大吸收($Q_c=30$, $Q_b=15$)情况下的透射系数频率响应的振幅谱为图 4.2.1 和图 4.2.2。由此两图可见,随着传播距离和吸收的增加,高频成份明显衰减。

我们用频带范围为 30~80Hz 的零相位子波作为输入地震子波计算了透射地震子波随距离的变化(见图 4.2.3 和图 4.2.4)。结果表明,小吸收介质近距离处的地震子波接近于一

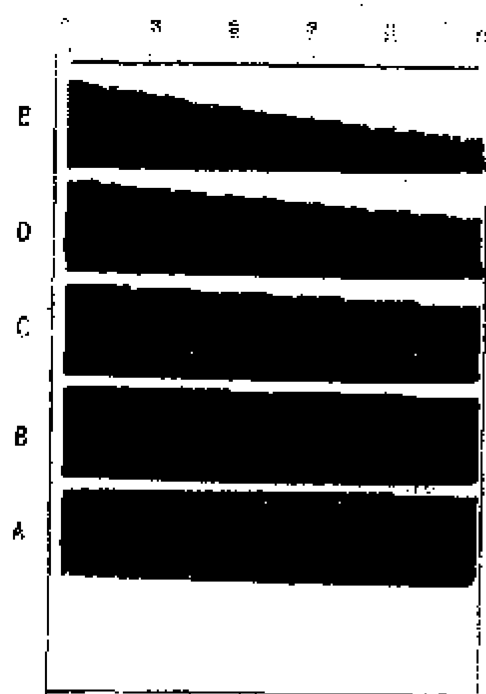


图 4.2.1　小吸收介质中振幅谱随距离的变化
A:100m　B:200m　C:500m
D:1000m　E:2000m

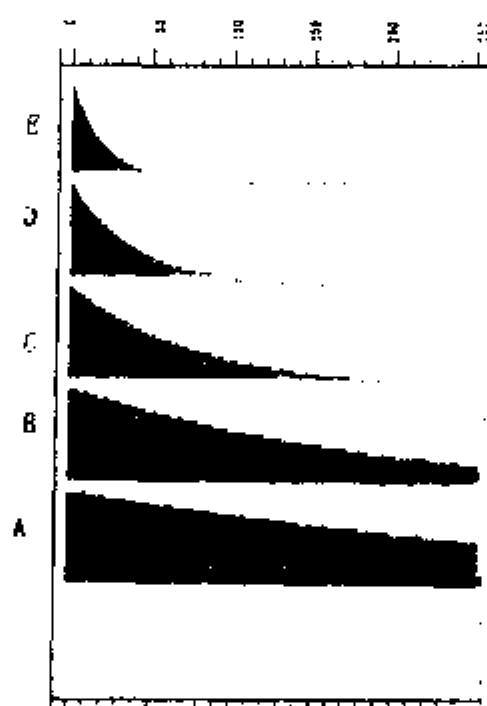


图 4.2.2　大吸收介质中振幅谱随距离的变化
A:100m　B:200m　C:500m
D:1000m　E:2000m

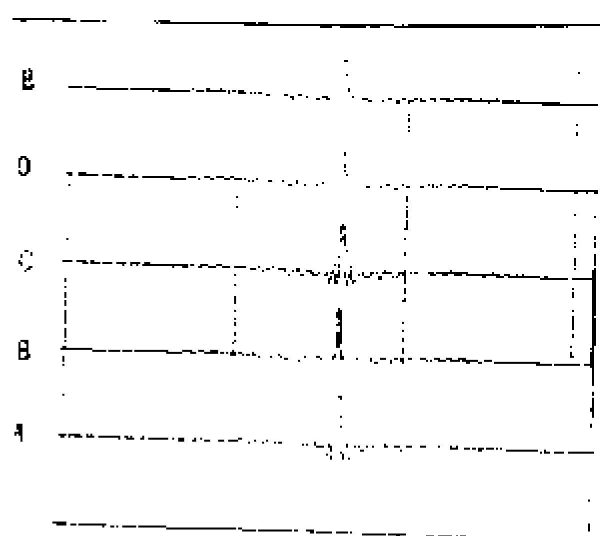


图 4.2.3　小吸收介质中地震子波随距离的变化
A:100m　B:200m　C:500m
D:1000m　E:2000m

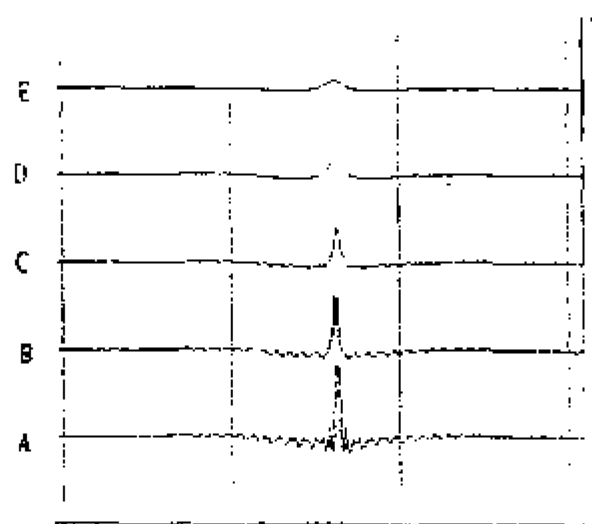


图 4.2.4　大吸收介质中地震子波随距离的变化
A:100m　B:200m　C:500m
D:1000m　E:2000m

个尖脉冲，随着距离和吸收 的增大，地震子波的振幅减小，波形加宽。

4.2.3　细密分层吸收介质中的频率响应和地震波形

为讨论地震波通过细密分层吸收介质时频率响应和地震波形的变化，我们设计了周期性结构层系模型，其中每个基本单元由两个薄层组成，它们的密度分别为 2 和 4g/cm^3，但纵波速度和层厚都为 4000m/s 和 2m。我们计算了层系的厚度为 100、200、300 和 400 米的透射波的频率响应和地震子波。仍按前面无限吸收介质计算的方式得到振幅谱和透射地震子波(见图 4.2.5 到图 4.2.8)。分析这些图，并与无限均匀吸收介质中相同的距离的振幅谱和地震波形比较后可得到以下认识：

(1) 细密分层吸收介质的频率响应曲线亦具有与无限吸收介质那样的高频衰减趋势，但在此趋势背景上存在着与周期性层状结构有关的频率调谐。

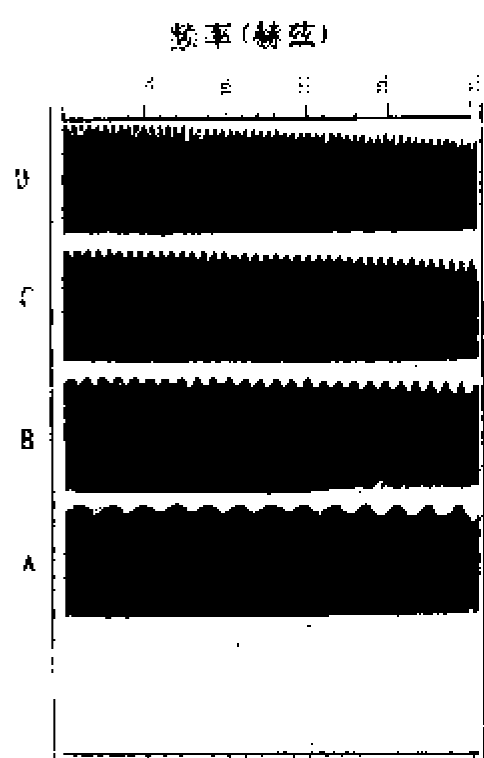


图 4.2.5　小吸收细密分层介质中振幅谱随距离的变化

A:100m　B:200m　C:300m　D:400m

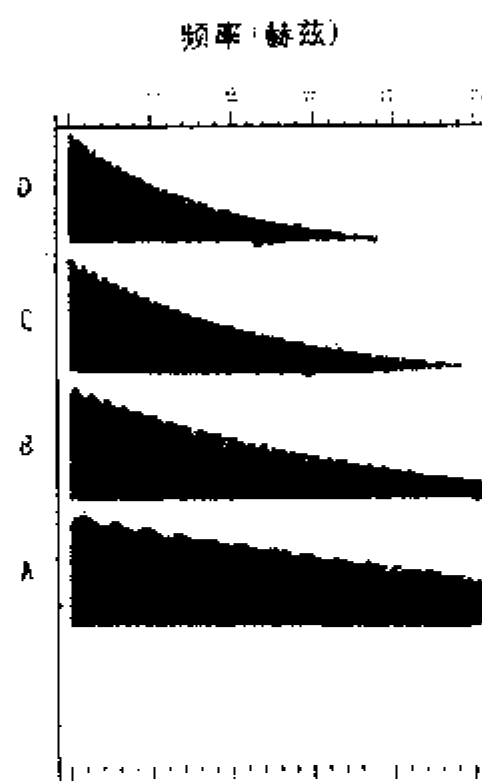


图 4.2.6　大吸收细密分层介质中振幅谱随距离的变化

A:100m　B:200m　C:300m　D:400m

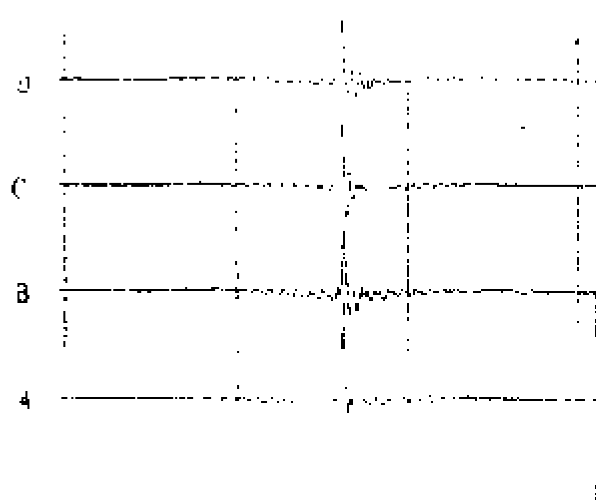


图 4.2.7　小吸收细密分层介质中地震子波随距离的变化

A:100m　B:200m　C:300m　D:400m

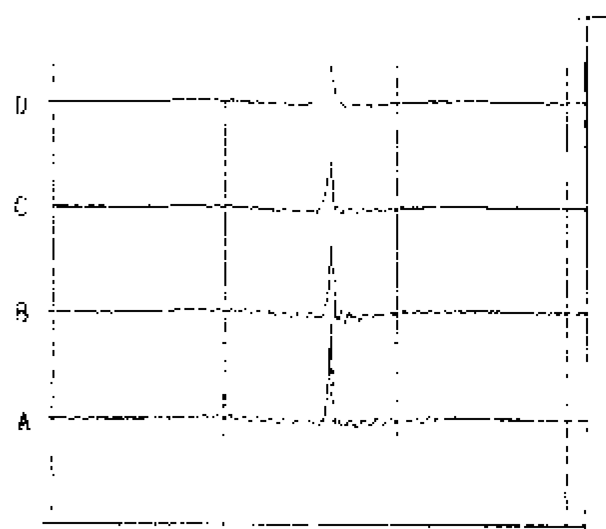


图 4.2.8　大吸收细密分层介质中地震子波随距离的变化

A:100m　B:200m　C:300m　D:400m

(2) 频率调谐的频度随周期性层状模型的总厚度增加而变高。

(3) 大吸收情况在较远距离和较高的频率时频率调谐作用变弱,甚至消失。

(4) 细密分层吸收介质中的地震子波也与无限吸收介质一样随着距离的增加,振幅减小,波形加宽;但波形已不再象无限吸收介质那样的对称的零相位子波。

4.2.4　地层衰减与吸收衰减的分离

实际介质是非弹性的层状介质,地层衰减和吸收衰减同时影响着地震波在实际地层中的传播。因此,在反射地震记录中,除了球面扩散和透射损失外,还存在着地层衰减和吸收衰减,且两者都是随频率而变化的。如果能予测地层衰减和吸收衰减的相对大小,甚至能加以区分,对于利用地震信息解决地质问题是很有意义的。

Spencer(1977)讨论了一维周期性地层的散射模型(图 4.2.9)。它由无限介质中一系列具有不同阻抗的层所构成,且施加了两个条件:① 要求 $\frac{2E_i}{V_0}$大于 τ_d 的非相互作用系统,即散射层之间的多次波在透射脉冲时间长度 τ_d 之后到达,因而其影响可以忽略;② 要求$\frac{2D_i}{V_i} \ll \tau_d$ 的不可分辩系统,即每层顶与底部的透射波叠加在一起。对于如此定义的非相互作用的不可分辩系统,通过周期性地层的透射脉冲特性仅由初至波和层内短程多次波之间的干涉所决定。

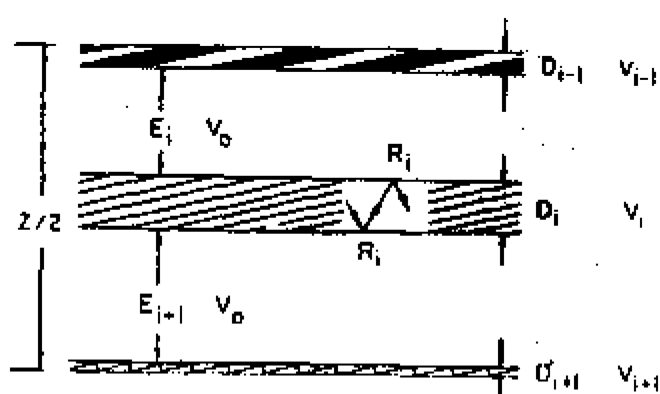


图 4.2.9 一维散射模型

对于单层的双程透射系数可写为

$$Q_i(f) = (1 - R_i)^2/[(1 + R_i^2)^2 - 4R_i^2\cos^2 2\pi f\Delta_i] \tag{4.2.30}$$

其中,Δ_i 是第 i 个单散射层的单程旅行时,R_i 是法向位移反射系数,即

$$R_i = (\rho_i V_i - \rho_0 V_0)/(\rho_i V_i + \rho_0 V_0)$$

由(4.2.30)式可见,当频率 $f = 0$ 时,$Q_i(f) = 1$,即对所有入射能量全部被透射;当 $f = V_i/4D_i$ 时,$Q_i(f)$具有极小值,称为节点频率;当 $f = V_i/2D_i$ 时,$Q_i(f)$具有极大值,称为反节点频率。当 R_i 减小时,$Q_i(f)$变大,即层更易被透射(图 4.2.10)。图 4.2.11 表示单层厚度对透射系数频率响应的影响。对大厚度 D_i 值,在反射地震频带内(< 100Hz)将存在节点和反节点;对中等 D_i 值,在地震频带内存在明显的高频单调衰减;对小 D_i 值,地震频带内的衰减可以忽略。

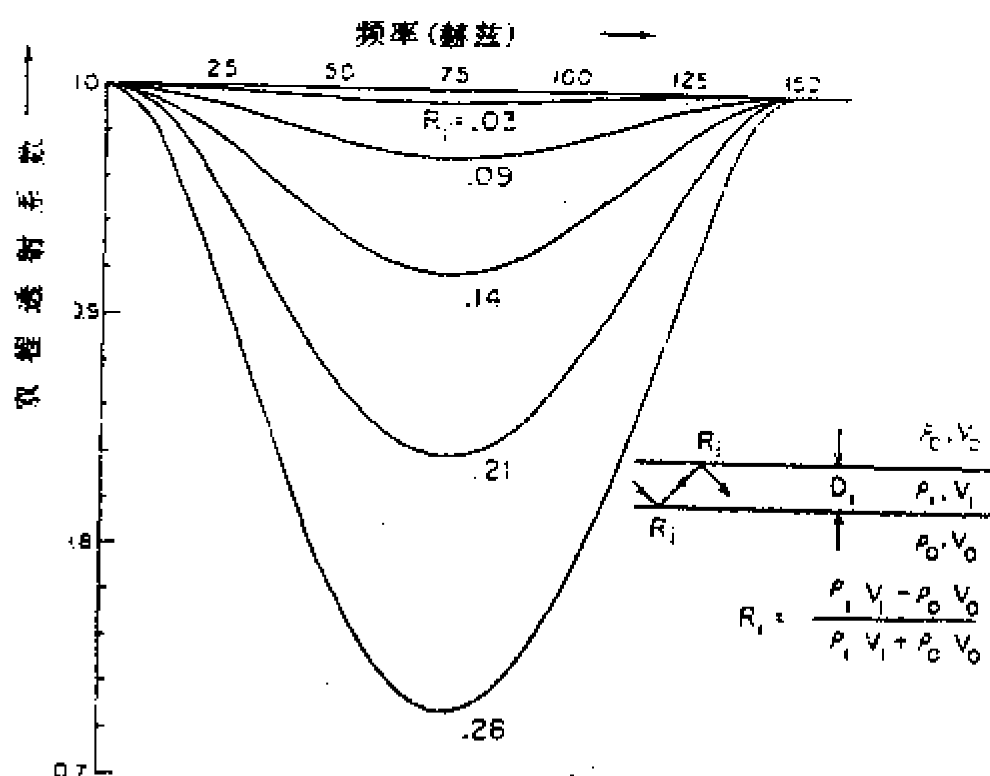


图 4.2.10 单层的双程透射系数

对于非相互作用系统中的多个散射层产生的透射损失可由各单个散射层的 $Q_i(f)$相乘后得到。令 M 是散射层类型数,$m_i(i = 1,2,\cdots,M)$是第 i 个类型的散射层数,N 是散射层

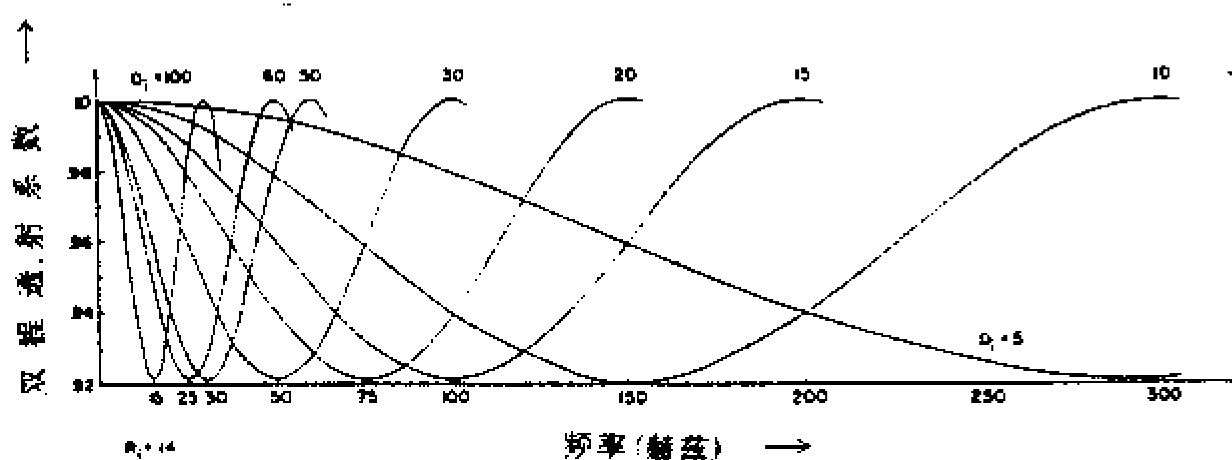


图 4.2.11 层厚对双程透射系数的影响

总数，$P_i(=m_i/N)$是第 i 个类型散射层所占的百分比，称为分布函数，则总透射损失为

$$A(f)=\prod_{i=1}^{M}\{Q_i(f)\}^{P_iN}$$

$$=\exp[\lg A(f)]=\exp[\sum_{i=1}^{N}P_iN\lg Q_i(f)] \tag{4.2.31}$$

由于实际地层中的反射系数不大，故 $Q_i(f)$可展为 R_i^2 的幂级数且忽略 R_i^4 和更高阶项后得

$$Q_i(f)=1-4R_i^2\sin^2 2\pi f\Delta_i$$

故

$$\lg Q_i(f)\approx -4R_i^2\sin^2 2\pi f\Delta_i$$

和

$$A(f)=\exp[\sum_{i=1}^{M}(-4NP_iR_i^2\sin^2 2\pi f\Delta_i)] \tag{4.2.32}$$

(4.2.32)式表明，当散射层的 Δ_i 为尖锐的峰值分布时比均匀分布时对透射损耗有更明显的影响。

令 Z 是波旅行的全部距离(它等于散射层埋深的两倍)，$\overline{D}$ 是平均层厚，ϕ 是散射层所占空间的百分比，则有 $N=\phi Z/2\overline{D}$。对于不可分辩系统有 $\sin 2\pi f\Delta_i\approx 2\pi f\Delta_i$。因而，非相互作用的不可分辩系统的透射损耗可写为

$$A(f)=\exp[-\Gamma(f)Z] \tag{4.2.33}$$

其中

$$\Gamma(f)=(8\pi^2\phi/\overline{D})(\sum_{i=1}^{M}P_iR_i^2\Delta_i^2)f^2=B_0f^2 \tag{4.2.34}$$

$\Gamma(f)$称为衰减系数，它在频带范围内随频率的平方而增大。这区别于吸收衰减随频率线性增大的特性。这个差异有可能用于区分地层衰减和吸收衰减。

定义带宽 f_0 为

$$f_0=(B_0Z)^{1/2}=\{(8\pi^2\phi/\overline{D})\sum_{i=1}^{M}P_iR_i^2\Delta_i\}^{-1/2}Z^{-1/2} \tag{4.2.35}$$

则 $\tau_0(=1/f_0)$是脉冲宽度。把(4.2.34)式代入(4.2.33)式后得

$$A(f)=\exp(-B_0f^2Z)=\exp[-(f/f_0)^2] \tag{4.2.36}$$

因而，当一个脉冲通过该系统时，带宽减小，脉冲宽度增大。若散射层个数固定，则所有散射层乘以常数 C_1 相应于带宽乘以 C_1^{-1}，所有层的速度乘以常数 C_2 相当于带宽乘以 C_2。对于所有散射层都相同这个特殊情况，其带宽由(4.2.35)式得

$$f_0=(8\pi^2\phi)^{-1/2}Z^{-1/2}D^{-1/2}R^{-1}V \tag{4.2.37}$$

由此式可见，带宽与散射层的反射系数成反比，与速度成正比。层厚 D 对带宽的影响有两个因素：① D 减小使节点频率向更高频率移动，因而增大了带宽；② D 减小意味着给定总

厚度时散射层个数增加，因而降低了带宽。一般说来，第①个因素对带宽的影响是主要的。

实际地层中，散射层间距与散射层厚度有相同量级。因此，上述非相互作用的条件并不成立，即散射层之间的层间多次波也将影响透射波形。为研究这类相互作用系统的效应，可用波动理论来计算一维透射波理论记录。假定最小层厚的 $H_i^0 = V_i\Delta$，其中 Δ 是理论记录的采样间隔，且假定所有层的速度 V_i 和厚度 H_i 都具有 Δ 的整数倍的多次波。考虑砂、页岩组成的层状模型，其厚度序列呈均匀概率分布，低限为 D_a，高限为 D_b。图 4.2.12 是不同距离 Z 时输入尖脉冲的理论记录。此图表明，随着距离的增加，波形逐渐加宽，变为近似于高斯型波形。如果把脉冲宽度取为振幅极大值两侧减小到 95% 的两点间的时间间隔，且用双对数坐标画出脉冲宽度与 Z 的函数关系，则斜率为 0.4 的直线可以很好地拟合(图 4.2.13)。这里，相互作用系统的透射波形宽度随深度的变化(0.4)小于前述的非相互作用系统(0.5)表明了两者的衰减以不同的方式与频率有关。

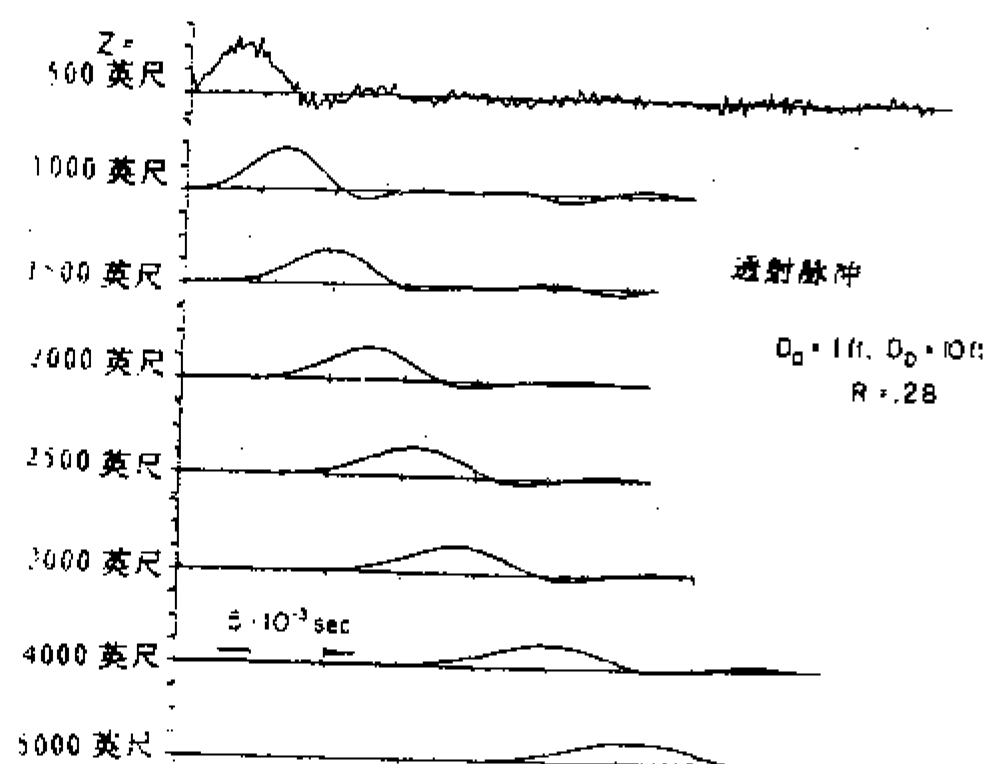


图 4.2.12 不同距离时的透射波形

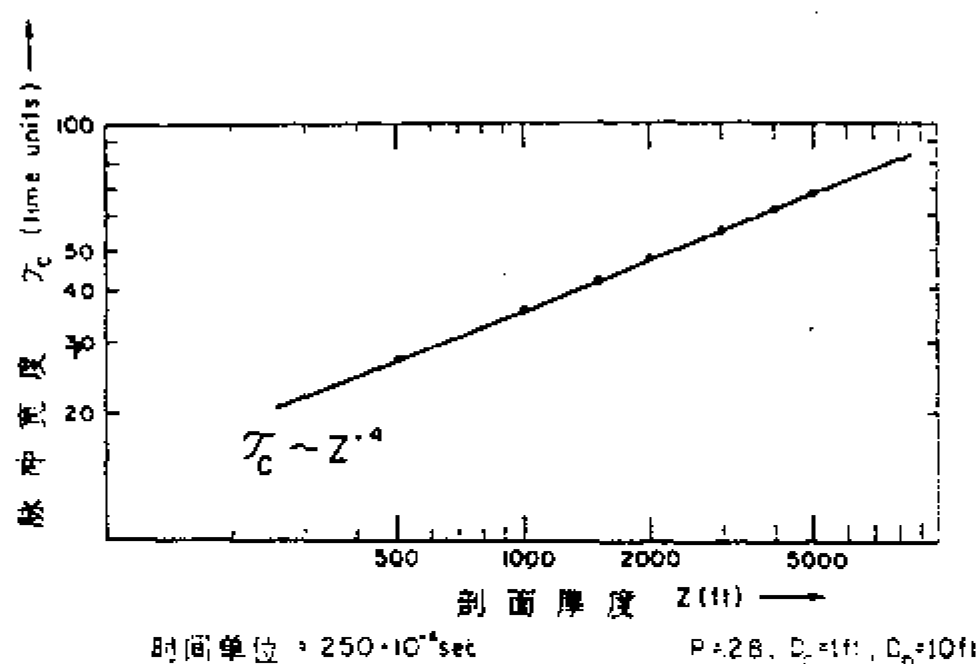


图 4.2.13 脉冲宽度与模型厚度的关系

图 4.2.14 是透射波形宽度与反射系数的关系。它表明,脉冲宽度随反射系数的增大而迅速增大。

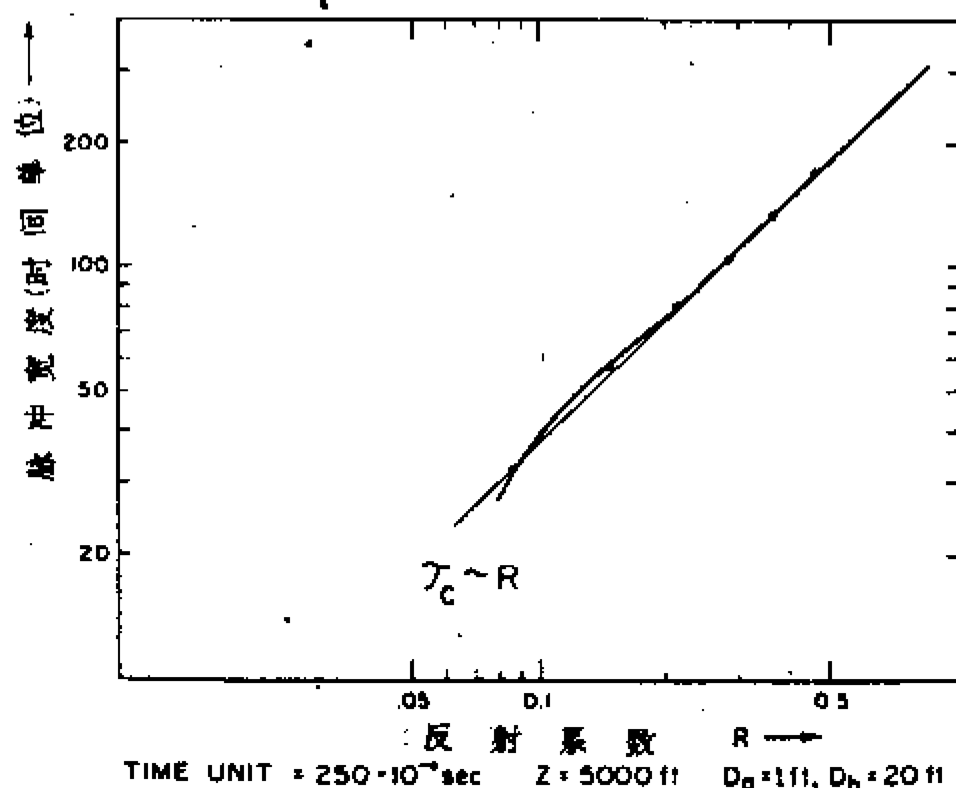


图 4.2.14 反射系数与透射脉冲宽度的关系

垂直地震剖面(Vertical seismic profiling,简写为 VSP)是提供现场衰减测量的最好方法,但它必定同时包含地层衰减和吸收衰减(Spencer,1982)。常用振幅比法来计算现场衰减,即用零偏移距 VSP 记录中的下行波振幅谱比值的对数值(dB)画作频率的函数(图 4.2.15)。通常,它具有平缓单调变化的趋势,可以用直线拟合,其斜率为

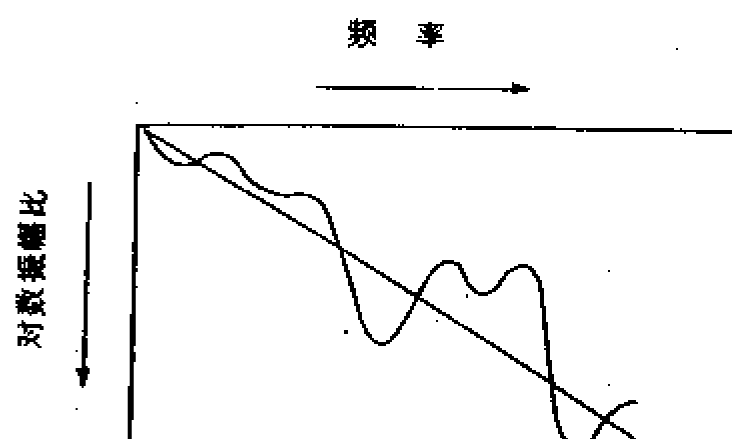


图 4.2.15 振幅比值的对数与频率的关系

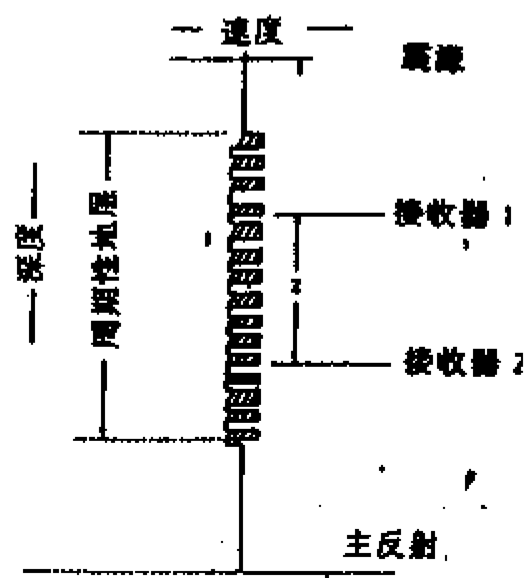


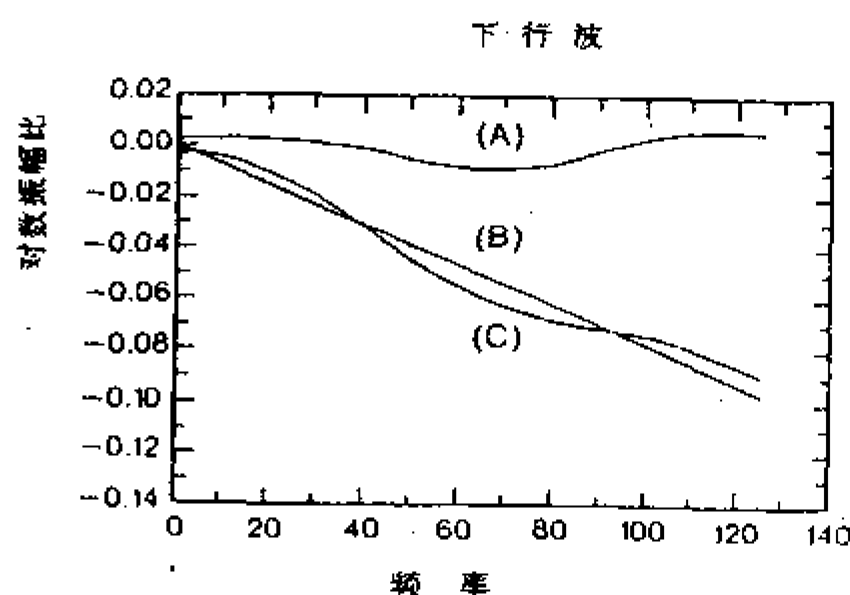
图 4.2.16 周期性地层模型

$$L = -(\pi T_{12}/Q)20\lg e \tag{4.2.38}$$

其中,T_{12}是两接收器处到达的下行波时间差,$1/Q$ 即为衰减系数。当单调变化的趋势不能用直线来拟合时,表明衰减是随频率而变的。图 4.2.15 中叠加在单调变化趋势之上的振荡特征是由于接收器邻近地层中的短程层间多次波与直达波相互干涉的结果。因而,通过对

低频趋势的拟合可以消除这类干涉的影响。

图 4.2.16 是周期性地层模型，各层厚度在有限范围内呈均匀分布，最小层厚为 1 英尺。两个接收器放置在周期性地层内。图 4.2.17 是两个接收器处下行直达波理论记录的振幅比与频率的关系曲线。其中，曲线 A 是弹性周期性模型（即不存在吸收衰减）的结果，曲线 B 是均匀吸收介质模型（品质因素是 Q_d）的结果，曲线 C 是周期性吸收模型的结果。对曲线 A 和 C 的最佳拟合直线的斜率应分别等于 $1/Q_0$ 和 $1/Q_m$，$1/Q_0$ 是无吸收系统的衰减，$1/Q_m$ 是 VSP 记录中得到的实际衰减。由图 4.2.17 可见有



(A) $1/Q_0$, (B) $1/Q_D$, (C) $1/Q_M$

图 4.2.17 下行直达波的振幅比与频率关系曲线

$$1/Q_m = 1/Q_0 + 1/Q_d \qquad (4.2.39)$$

上述结果表明，如果从声速测井和密度测井中取得实际周期性地层的参数，可以计算相应的弹性理论记录并得到 $1/Q$，然后据 (4.2.33) 式从实际 VSP 记录中得到的 $1/Q_m$ 中减去 $1/Q_0$，即得到吸收衰减 $1/Q_d$。由于测井数据常受到井径等因素的影响，有时并不真实地代表实际地层的弹性参数。如果测井数据真实可靠，则理论记录的振幅比与频率的关系曲线上的振荡特性应与 VSP 记录上实测的一致。据此可以判断此方法结果的正确性。

4.3 反射波振幅与入射角的关系在寻找油气中的应用

70 年代用“亮点”技术来直接寻找油气曾风靡一时。它的地质与物理基础是砂岩储层在含油气后波阻抗大大降低，增大了与围岩的波阻抗差异，使得法向入射反射系数增大，表现在水平叠加剖面上含油气砂岩段的反射波振幅明显大于不含油气段，即产生了“亮点”。随着工作的深入，发现有不少岩性（如灰岩、火成岩等）也会产生“亮点”，使得用“亮点”标志来直接寻找油气变得不可靠。此外，如果砂岩在不含油气时的波阻抗明显大于围岩，在含油气后砂岩波阻抗降低而与围岩相近，此时含油气砂岩的法向入射反射系数反而小于不含油气的砂岩，产生的并不是“亮点”而是“暗点”。我国许多油气田的物性资料表明，由于砂岩与页岩的压实作用不同，它们的速度和密度随深度的变化规律不同，往往在浅部（埋深小于 2000m）的砂岩的波阻抗小于页岩，深部（埋深大于 3000m）砂岩的波阻抗却大于页岩，中等埋深处砂岩波阻抗与页岩的相近。因此，浅部砂岩含油气时应产生“亮点”，深部砂岩含油气时却产生“暗点”。

由于“亮点”技术存在严重的多解性，70 年代末人们开始注意利用反射波振幅与入射角关系（Amplitude versus Angle，简称 AVA）的信息来直接指示油气存在与否。

地震勘探野外数据采集采用多次覆盖技术，可抽取共中心点（Common Middle point，简称 CMP）道集，经动校后叠加得到水平叠加剖面，是“亮点”技术的基础资料。但是，水平叠加丢失了反射波振幅与偏移距关系（Amplitude versus offset，简称 AVO）的宝贵信息。Ostrander

(1984)在用 Zoeppritz 方程计算 AVA 信息并把它转换为 AVO 信息的基础上首先成功地寻找(“亮点”型)厚层砂岩的油气。至今,人们一直对用 AVO 技术寻找油气进行了广泛深入地研究,取得了大量成果。

4.3.1 单界面情况 AVA 信息与油气的关系

对于如 Ostrander(1984)文章中厚层砂岩情况,其顶、底界面的反射波是分离的,因而可以用 Zoeppritz 方程来计算单界面反射系数。

AVO 技术的地质基础是当砂岩不含油气时,泊松比在 0.3~0.4 左右,与页岩的泊松比相近;当砂岩含油气时,泊松比降低到 0.1~0.2 左右,与围岩页岩的泊松比有明显差异。由第一节的讨论可知,界面两侧介质的泊松比差异是影响 AVA 曲线形态的主要因素,因而可以根据 AVA(或 AVO)曲线形态来判断砂岩是否含油气。

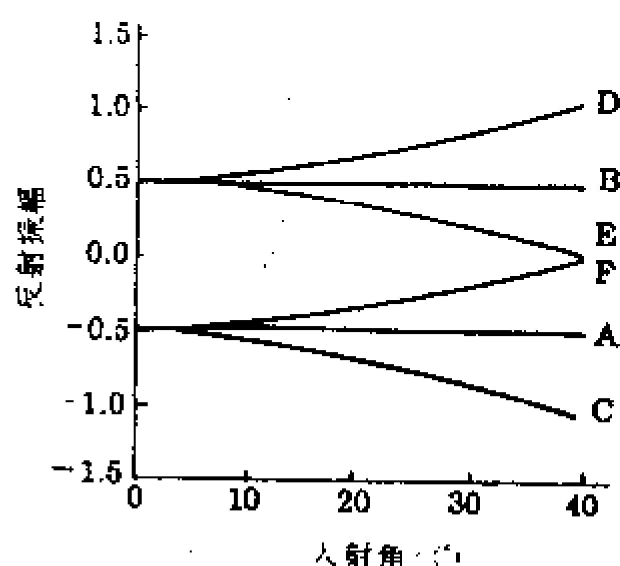


图 4.3.1 低速储层与高速储层的 AVO 曲线

与“亮点”技术相似,AVO 曲线形态也可划分为“亮点”型和“暗点”型(图 4.3.1)。为方便叙述起见,我们把界面下侧的参数大于上侧的称为正界面,反之称为负界面。对“亮点”型厚层情况,当砂岩含气时,顶界面是负泊松比与负波阻抗界面,其反射系数在法向入射时为负值,且随入射角增大而负值更大(曲线 C);它与砂岩不含气时反射波振幅基本上不随入射角而变(曲线 A)有明显区别。底界面在砂岩含气时是正泊松比界面与正波阻抗界面,其反射系数在法向入射时为正,且随入射角增加而更大(曲线 D);它与砂岩不含气时(曲线 B)也有明显区别。对“暗点”型厚层情况,当砂岩含气时,顶界面是负泊松比与正波阻抗界面,其反射系数在法向入射时为正值,且随入射角增加而减小(曲线 E);它与不含气时(曲线 B)有明显区别。“暗点”型厚层的底界面是正泊松比负波阻抗界面,其反射系数在法向入射时为负值,且随入射角增加而负值变小(曲线 F);它与不含气时(曲线 A)也有明显区别。总之,当砂岩不含气时,其顶、底界面的反射系数基本上不随入射角不变;当砂岩含气时,其顶、底界面的反射系数将随入射角增大或减小。这就是 AVO 技术根据 AVO(或 AVA)曲线形态直接寻找油气的物理基础。由图 4.3.1 可见,“亮点”型的反射系数绝对值随入射角增大而增大,“暗点”型的反射系数却随入射角增加而减小,因而更难检测到反射波。这就是用 AVO 技术寻找“暗点”型油气更困难的主要原因,它要求更精细地采集和处理地震数据。

4.3.2 薄互层情况 AVA 信息与油气的关系

当砂岩储层为薄层时,其顶、底界面产生的反射波将发生干涉,其复合反射波振幅将不能用 Zoeppritz 方程计算。我们用前面计算多层介质反射波的理论分别讨论“亮点”型与“暗点”型薄互层情况反射波振幅随入射角的变化规律。

(1)“亮点”型薄互层 AVA 信息与油气的关系

前人对“亮点”型 AVA 信息与油气的关系已有大量讨论,并取得了大量成功实例。这里

我们对表 4.3.1 所列参数的单层模型计算了不同入射角、不同厚度/波长比值及不同泊松比时的反射波理论记录，并拾取反射波振幅作出与入射角的关系曲线(图 4.3.2)。计算时地震子波主频为 66Hz，故层内纵波的主波长为 22.215m。同时，我们画出法向入射及各入射角时泊松比为 0.1 和 0.4 的反射波振幅差值与层厚/波长比值的关系曲线(图 4.3.3)。

表 4.3.1

层序号	纵波速度(m/s)	密度(g/cm^3)
1	2000	2.01
2	1481	1.81
3	2000	2.01

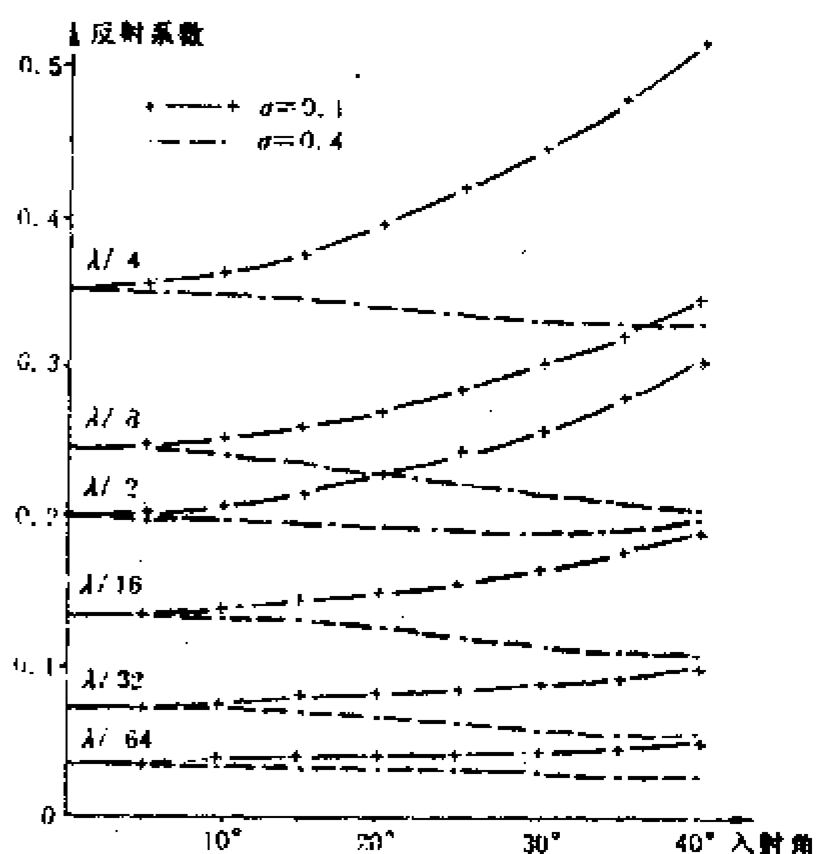


图 4.3.2 不同厚度情况下反射波振幅与入射角的关系

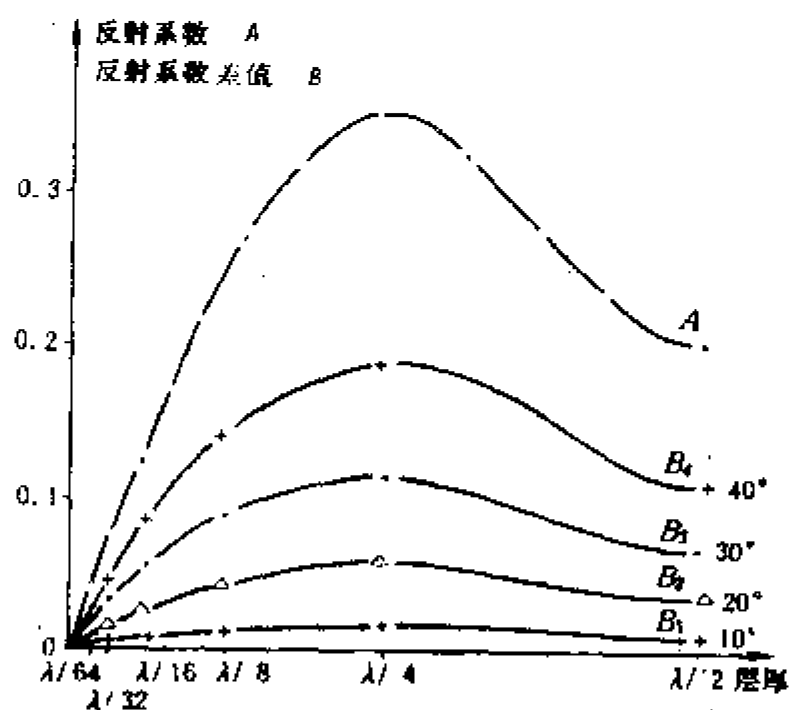


图 4.3.3 法向入射调谐效应(A)与各入射角($\sigma=0.1$ 与 $\sigma=0.4$)反射系数差值(B)

图 4.3.3 中曲线 A 是法向入射时反射波振幅与层厚/波长比值的关系曲线。层厚大于 $\lambda/2$(λ 为波长)时反射波振幅保持不变，这是由于层顶和层底的反射波相互分离的缘故。随着层厚的减小，层顶和层底的反射波叠合，使反射波振幅增大；到层厚等于 $\lambda/4$ 时达到极大，称为调谐厚度。层厚继续减小，反射波振幅基本上成正比地减小。

由图 4.3.2 可见，在调谐厚度时，不但法向入射的反射波振幅达到极大，而且非法向入射时泊松比为 0.1 和 0.4 两条曲线之间的差值也最大；随着层厚的减小，不但法向入射的反射波振幅减小，而且非法向入射时泊松比为 0.1 和 0.4 两条曲线之间的差值也减小。

图 4.3.3 中的曲线 B 表示入射角 10°、20°、30°及 40°时泊松比为 0.1 和 0.4 之间反射波振幅差值与层厚/波长比值的关系曲线。它们与法向入射的曲线 A 有相似的形状。此外，泊松比为 0.1 和 0.4 的反射波振幅差值随入射角增加而增大。

由上述分析可见，对于小于调谐厚度的油气层，不但其法向入射的反射波振幅减小(即“亮点”不明显)，而且，反射波振幅随入射角增加而增大(即“亮点”型 AVO 异常)的幅度也变

小,造成用 AVO 技术寻找薄油气层的困难。这里,我们给出两个实例。某区高频地震资料中 5m 厚的气层有明显的 AVO 异常(图 4.3.4a),但另一地区中频地震资料中 5m 厚气层却不存在可检测到的 AVO 异常(图 4.3.4b)。因此,要寻找小于 10 米的薄气层宜采用高频地震。

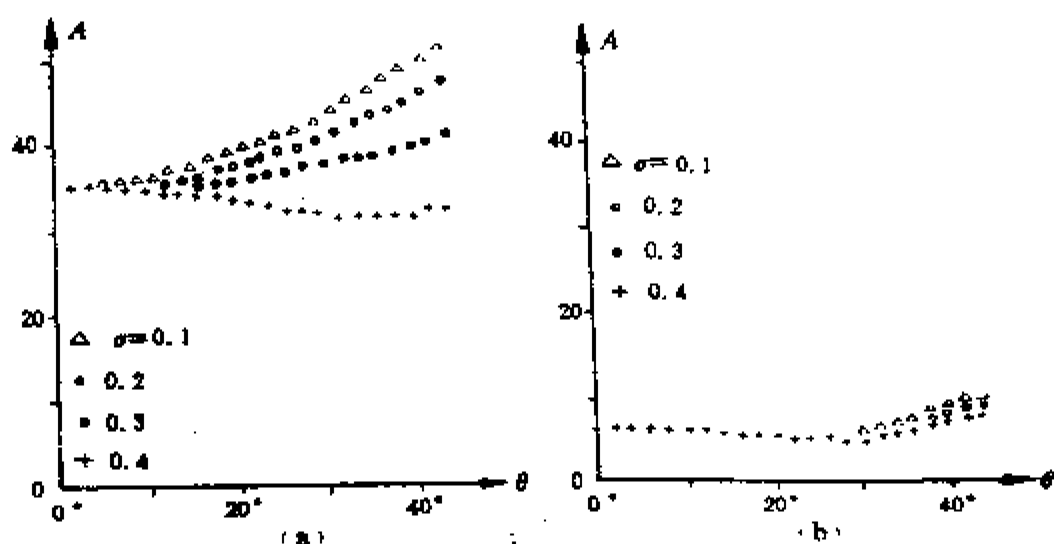


图 4.3.4 高、中频资料 5m 厚气层 AVO 曲线对比

a 高频资料 b 中频资料

由前面关于单界面反射系数讨论可知,正泊松比界面的反射系数曲线随入射角增大而向上变化,负泊松比界面的反射系数曲线随入射角增大而向下变化。而且,界面两侧介质的泊松比差异越大,引起的 AVO 异常幅度越大。对于薄互层而言,复合反射波振幅随入射角的变化趋势是多层介质中许多不同类型的泊松比界面、速度界面和密度界面的综合响应。

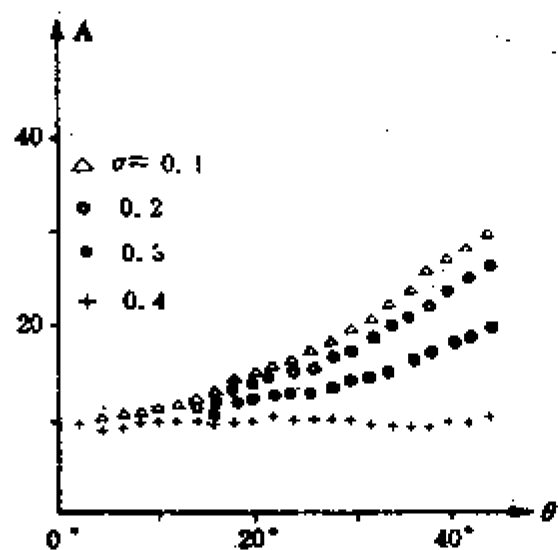


图 4.3.5 某层系的 AVO 曲线

图 4.3.5是某层系的 AVO 曲线,砂岩储层的泊松比假定为 0.1、0.2、0.3 和 0.4,围岩的泊松比为 0.4。当砂岩含气时,泊松比一般为 0.1 ~ 0.2 左右,产生明显的 AVO 异常;当砂岩含油时,泊松比一般为 0.2 ~ 0.3 左右 AVO 异常较小。这就是很多地区在含油砂岩地层的反射波资料中不能观测到明显的 AVO 异常的原因。

(2) "暗点"型薄互层 AVA 信息与油气的关系

据我国某油田埋深 3000m 以下的声速测井资料,砂岩的纵波速度为 4800m/s 左右,页岩的纵波速度在 4000m/s 左右;两者的密度相差不大,因而这类高速砂岩储层(以页岩为围岩)属于"暗点"型。下面首先从理论上讨论单个高速储层和多个薄储层给合的 AVO 曲线特征,然后讨论某油田实际地层模型的 AVO 曲线性质。

① 单个高速储层的 AVO 曲线

为了讨论不同砂层厚度在砂岩含油气(泊松比取为 0.1 ~ 0.2)与不含油气(泊松比取为 0.3 ~ 0.4)的 AVO 曲线特征,我们计算了砂层厚度在 0.5、1.0、2.0、4.0、8.0、16.0、32.0m 和 64.0m 时单层理论模型的反射波,得到 AVA 曲线,围岩页岩的泊松比取为 0.3,图 4.3.6 ~ 图 4.3.9 分别是砂岩泊松比为 0.1、0.2、0.3 和 0.4 时的 AVA 曲线。由这些图可得到下面结论:

A. 砂岩厚度愈大,法向入射反射系数愈大,且 AVA 曲线变化也愈大,更易被检测。一

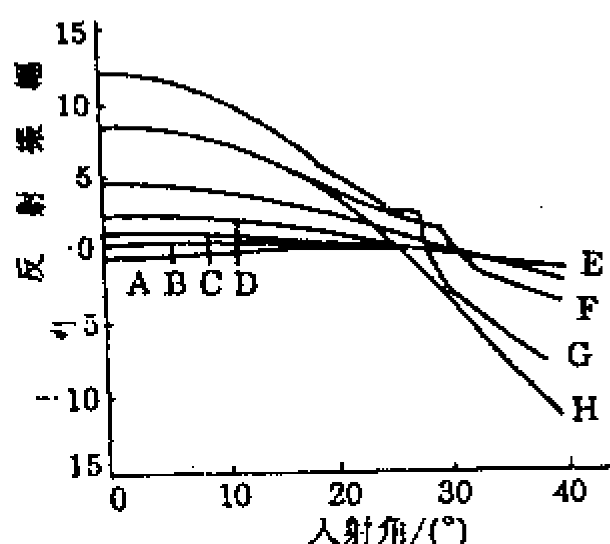


图 4.3.6 单层情况不同层厚的 AVA 曲线(泊松比 = 0.1)
A:0.5m; B:1m; C:2m; D:4m; E:8m; F:16m; G:32m; H:64m.

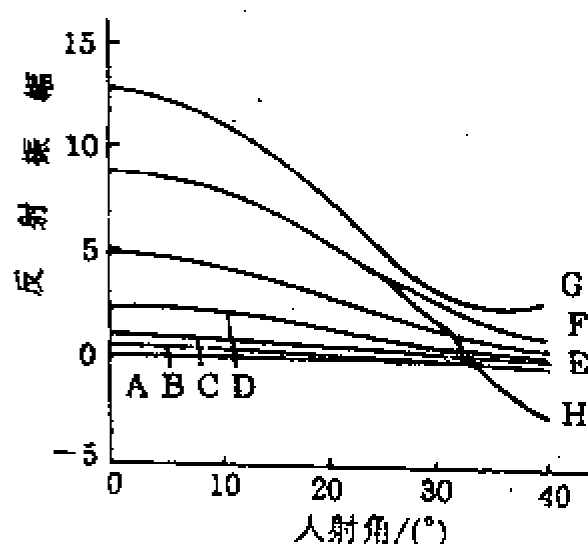


图 4.3.7 单层情况不同层厚的 AVA 曲线(泊松比 = 0.2)
A:0.5m; B:1m; C:2m; D:4m; E:8m; F:16m; G: # @M; H:64m.

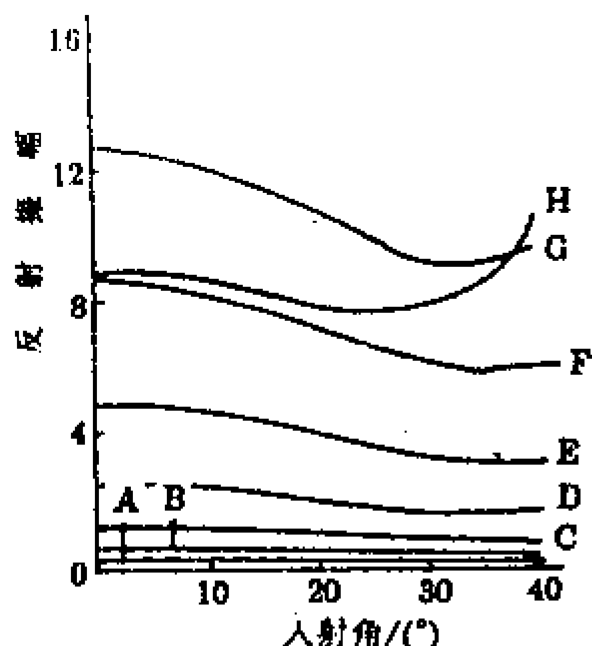


图 4.3.8 单层情况不同层厚的 AVA 曲线(泊松比 = 0.3)
A: 0.5m; B:1m; C:2m; D:4m; E:8m; F:16m; G:32m; H:64m.

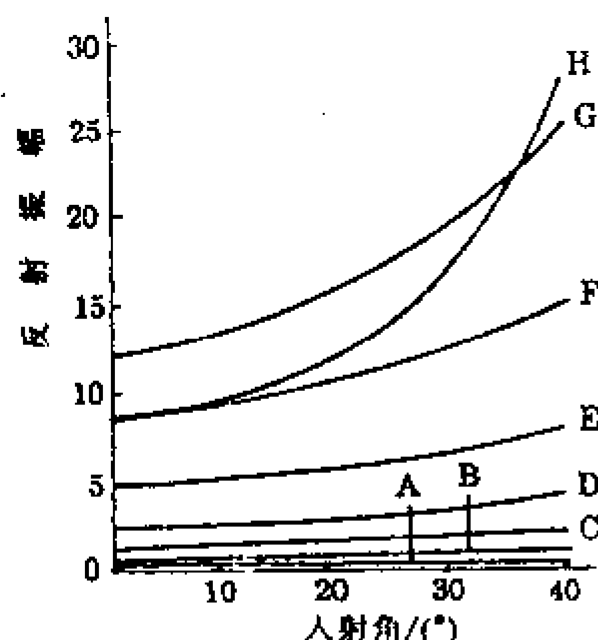


图 4.3.9 单层情况不同层厚的 AVA 曲线(泊松比 = 0.4)
A: 0.5m; B:1m; C:2m; D:4m; E:8m; F:16m; G:32m; H:64m.

般说来,单层砂岩厚度小于 8 米时已很难用 AVO 技术检测单个油气层。

B. 当砂岩和页岩的泊松比都为 0.3 时,反射波振幅随人射角增加略有减小;而当砂岩泊松比降到 0.2 或 0.1 时,反射波振幅随人射角增大而变小,且砂岩泊松比越小,变化越快;有的在某人射角处反射振幅减小到零后变为负值,即发生极性反转。

C. 当砂岩泊松比(0.4)比页岩泊松比(0.3)大时,反射波振幅随人射角增大而增大。

② 多个薄层储层的 AVA 曲线

针对我国油气层大多为单层厚度为 0.5 ~ 5m 的多个薄层组合的情况,我们设计了由 17 层组成的砂岩与页岩的薄互层模型(见表 4.3.2)来讨论 AVO 技术的通用性,仍假定页岩的泊松比为 0.3,砂岩的泊松比则据含油气与否分别取为 0.1、0.2 和 0.3、0.4,用固体多层公式计算该层系在不同人射角时的复合反射波,得到反射波振幅与人射角的关系。

表 4.3.2　　砂页岩互层模型

岩性	纵波速度/m·s⁻¹	泊公比	厚厚/m	密度/g·cm⁻³
页岩	4000	0.3	2	2.5
砂岩	4800	0.1~0.4	1	2.5
页岩	4000	0.3	2	2.5
砂岩	4800	0.1~0.4	1	2.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
页岩	4000	0.3	2	2.5

图 4.3.10~图 4.3.13 分别是薄互层模型中的含气层数为 1、2、4 和 8 时的 AVA 曲线。由图 4.3.10 可见，当仅有 1 个气砂层时，AVA 曲线在大于 20°时才与不含气的有明显差别。但由于野外地震数据采集时最大偏移距相对应的入射角常在 20°以内，故不可能检测到 1 个含气层。比较图 4.3.10~图 4.3.13 的各曲线后可见，随着气层数的增加，不同泊松比的 AVA 曲线之间的差别加大。当气层数大于 4 时，即使在较小的入射角范围内也可检测到差别，因此可判别砂层组是否含气。

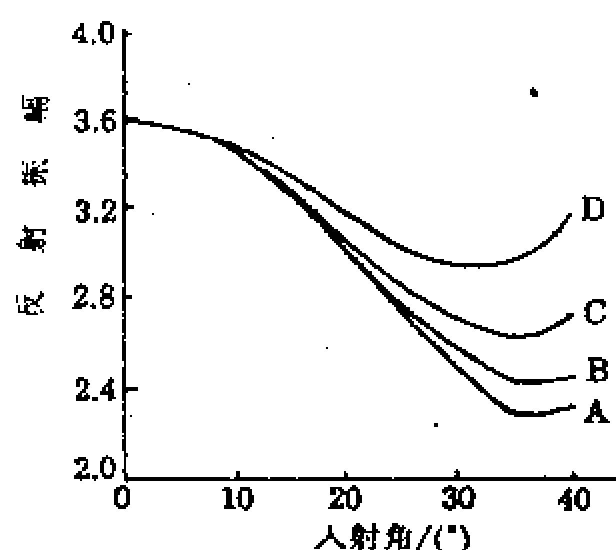


图 4.3.10　不同泊松比的 AVA 曲线(气层数 = 1)
A:σ = 0.1　B:σ = 0.2　C:σ = 0.3　D:σ = 0.4

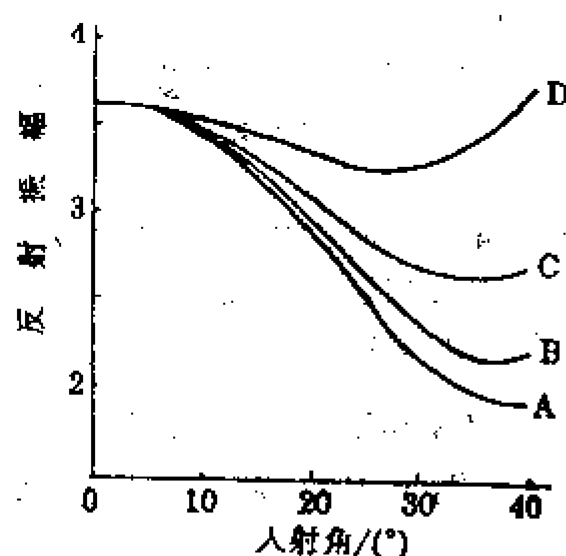


图 4.3.11　不同泊松比的 AVA 曲线(气层数 = 2)
A:σ = 0.1　B:σ = 0.2　C:σ = 0.3　D:σ = 0.4

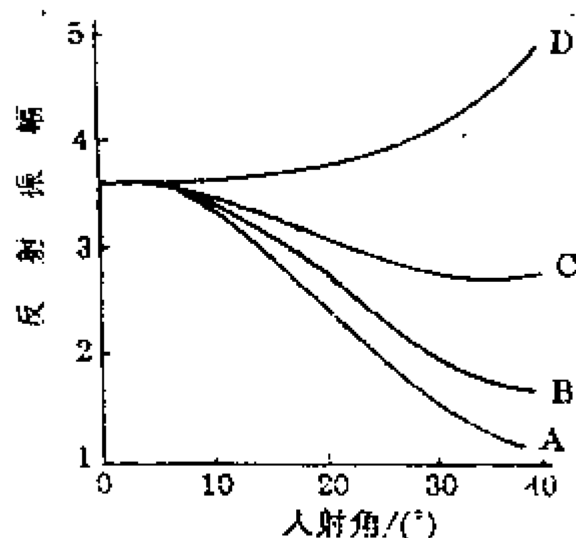


图 4.3.12　不同泊松比的 AVA 曲线(气层数 = 4)
A:σ = 0.1　B:σ = 0.2　C:σ = 0.3　D:σ = 0.4

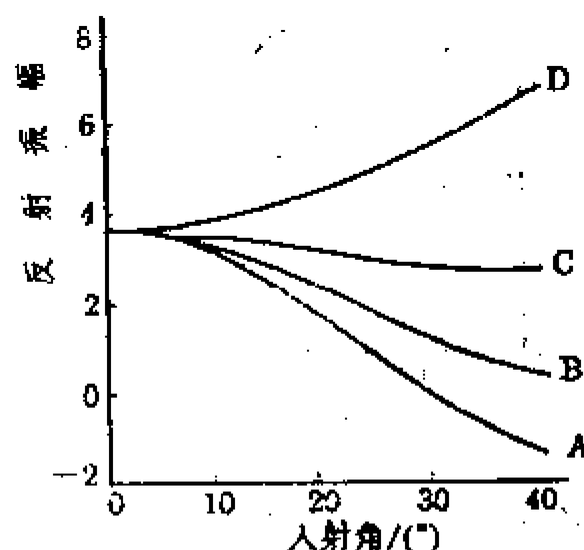


图 4.3.13　不同泊松比的 AVA 曲线(气层数 = 8)
A:σ = 0.1　B:σ = 0.2　C:σ = 0.3　D:σ = 0.4

为进一步说明气层数对 AVA 曲线的影响，以气层数为参数分别画出泊松比为 0.1 和 0.4 的曲线图。由图 4.3.14 可见，气层数越多，反射波振幅随入射角增大而减小愈甚。由图 4.3.15 可见，当砂岩层数为 1 和 2 时，反射波振幅随入射角增大而略有减小；当砂岩层数为 4 和 8 时，反射波振幅随入射角增加而增大。总之，层系内砂岩层数愈多，砂岩含气与否的 AVA 曲线差别愈大，越容易被检测到。

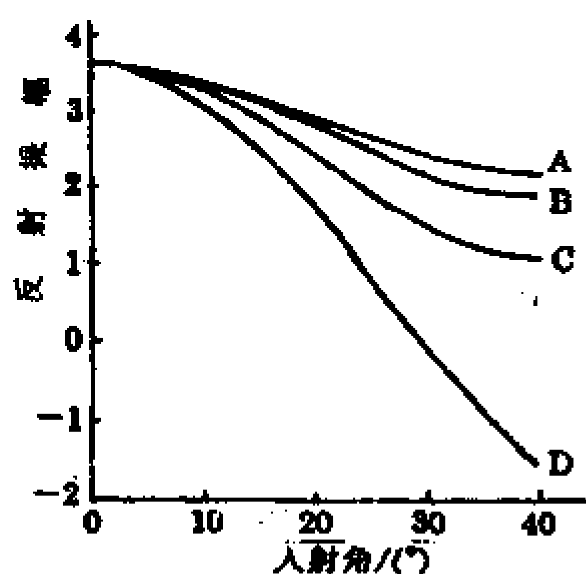


图 4.3.14　不同层数的 AVA 曲线($\sigma=0.1$)

A:层数 = 1; B:层数 = 2;

C:层数 = 4; D:层数 = 8.

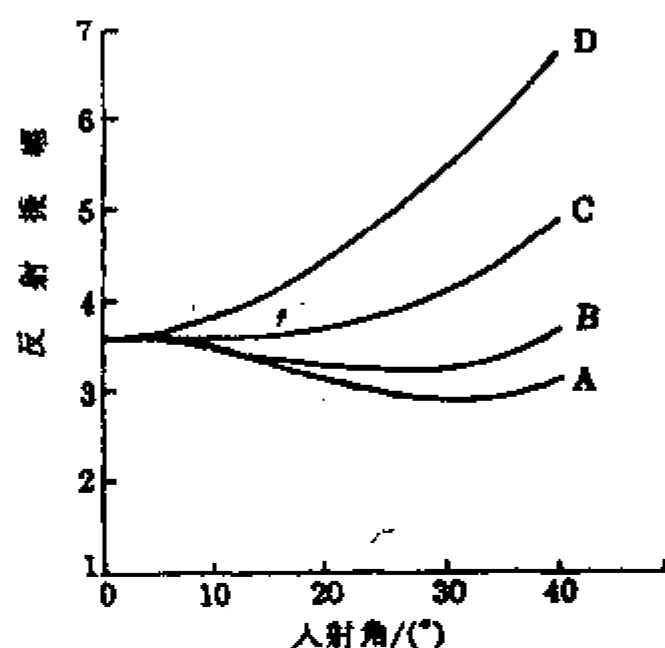


图 4.3.15　不同层数的 AVA 曲线($\sigma=0.4$)

A:层数 = 1; B:层数 = 2;

C:层数 = 4; D:层数 = 8.

图 4.3.16 和图 4.3.17 是固定砂岩层数为 4 层，但各层厚度分别为 0.5、1m 和 2m 时的 AVA 曲线。结果表明，随着砂岩层厚增加，含气砂岩与不含气砂岩的 AVA 曲线差别增大，因

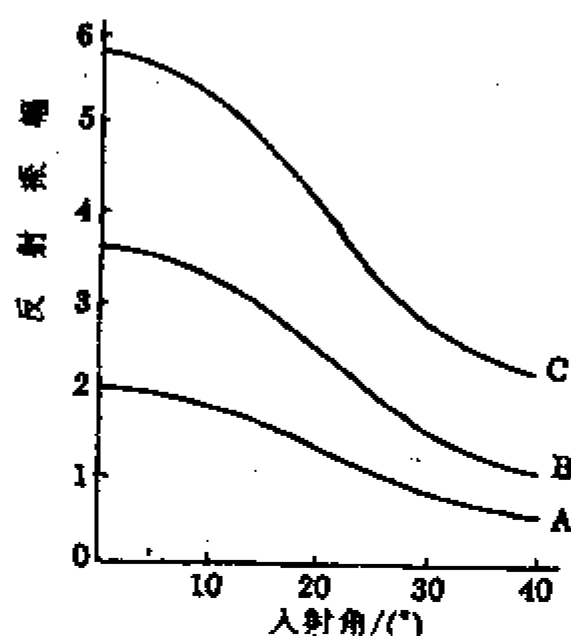


图 4.3.16　多层情况不同层厚的 AVA 曲线

($\sigma=0.1$)

A:0.5m; B:1m; C:2m

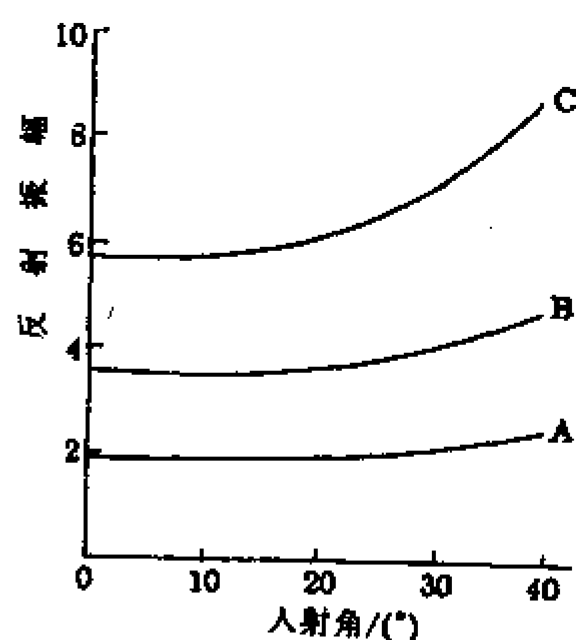


图 4.3.17　多层情况不同层厚的 AVA 曲线

($\sigma=0.4$)

A:0.5m; B:1m; C:2m

而更易被检测到。

③ 某油田多层高速薄储层系的 AVA 曲线

根据某油田的一些声波和密度测井资料提取纵波速度和密度。横波速度则根据常见的泊松比值和纵波速度进行换算。我们计算了深部地层很多层段的实际薄互层模型的 AVA 曲线，并根据它们的特征大致归纳为 4 类。表 4.3.3 是 4 类 AVA 曲线的典型模型数据。

表 4.3.3　　4 类 AVA 曲线的典型模型数据

模型号	类型	总层数	气层数	气层总厚度/m	气层厚度/%
PS0406	1	15	7	17	55
PS0401	2	23	11	32	54
PS0407	3	11	2	4	24
PS0408	4	5	1	3	19

A. 第 1 类(图 4.3.18)

当砂岩泊松比(0.4)大于页岩(0.3)时，反射波振幅随入射角增加而增大；当砂、页岩泊松比相同时，反射波振幅基本上不随入射角而变。当砂岩泊松比(0.2 或 0.1)小于页岩时，反射波振幅随入射角增加而明显减小，且在某入射角处反射波振幅为零，然后变负(即相位相反)。

B. 第 2 类(图 4.3.19)

除不存在反射波振幅为零和反相外，其余特征与第 1 类相同。

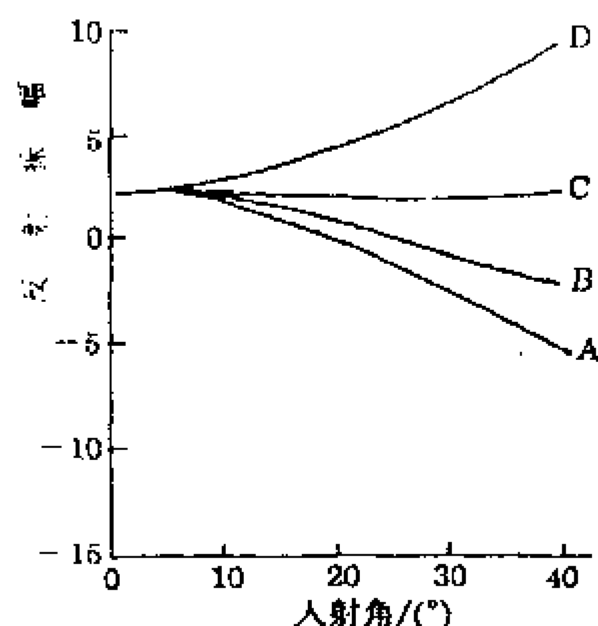


图 4.3.18　第 1 类 AVO 曲线

A:σ=0.1　B:σ=0.2

C: σ=0.3　D:σ=0.4

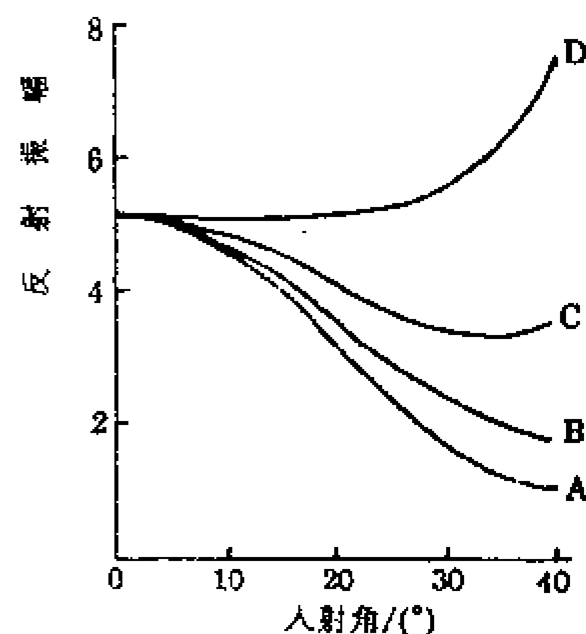


图 4.3.19　第 2 类 AVO 曲线

A:σ=0.1　B:σ=0.2

C: σ=0.3　D:σ=0.4

C. 第 3 类(图 4.3.20)

除当砂层泊松比等于 0.4 时反射波振幅随入射角增加而略有减小然后又增大外，其它

特征与第 2 类相似。

D. 第 4 类(图 4.3.21)

除当砂层泊松比为 0.4 时反射波振幅随入射角增加而缓慢减小外,其它特征与第 2 类相似。

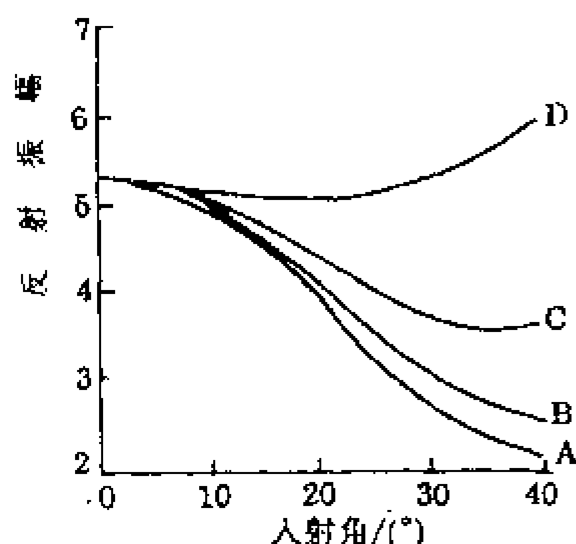


图 4.3.20　第 3 类 AVO 曲线

A:σ=0.1　B:σ=0.2

C: σ=0.3　D:σ=0.4

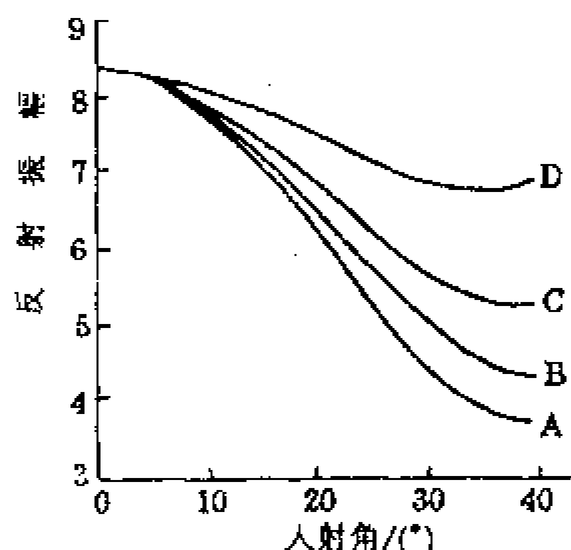


图 4.3.21　第 4 类 AVO 曲线

A:σ=0.1　B:σ=0.2

C: σ=0.3　D:σ=0.4

由表 4.3.2 可见,第 1 类和第 2 类的气层厚度百分比大,而第 3 类和第 4 类的气层厚度百分比较小。因此,当深部薄互层系地层中气层有较大的累计厚度时,含气与否的 AVA 曲线可以区别,但含气时的特征与"亮点"型低速储层不同,应当用反射波振幅绝对值随入射角增加而减小来检测。

4.3.3　关于薄互层情况下 P 波叠加剖面的讨论

由前面关于 P 波叠加剖面的讨论可知,当前都采用适用于计算单界面反射系数的 Zorp-pritz 方程在小入射角和界面两侧弹性差异不大的线性近似公式计算的。这个方法对于薄互层情况是否仍然合适是值得讨论的。为此,我们把图 4.3.6 到图 4.3.21 的 AVA 曲线全部转换为反射波振幅与入射角正弦平方的关系曲线,即 $A\text{-}\sin^2\theta$ 曲线(图 4.3.22～图 4.3.37)。图中实线是数据点(圆点)的连线,虚线是拟合直线。这些图表明,对所列举的薄互层情况,常规的 P 波叠加剖面在大多数情况基本上可近似地看作为法向入射剖面。但是,仔细考虑这些图件后可以发现,在有些情况下的数据点,用较大入射角范围数据拟合的直线斜率比较小入射角数据的小。这表明,如果用不同偏移距采集的数据得到的 P 波叠加的振幅是不同的,且这个差别与层参数等有关。这将影响到 P 波叠加剖面上反射波的振幅和波形,进而影响到根据 P 波叠加剖面进行波形反演的精度和可靠性。

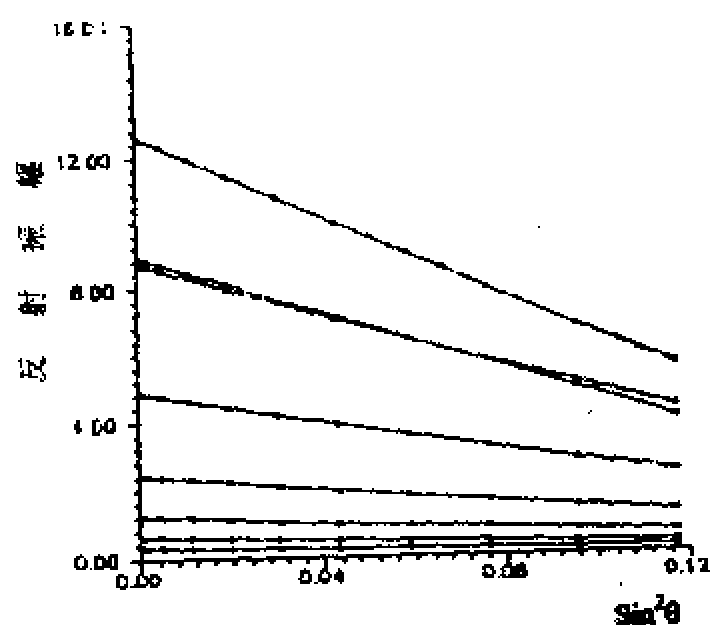


图 4.3.22　单层情况下不同厚度的
直线拟合(PR=0.1)
A:0.5m　B:1m　C:2m
D:4m　E:8m　F:16m
G:32m　H:64m

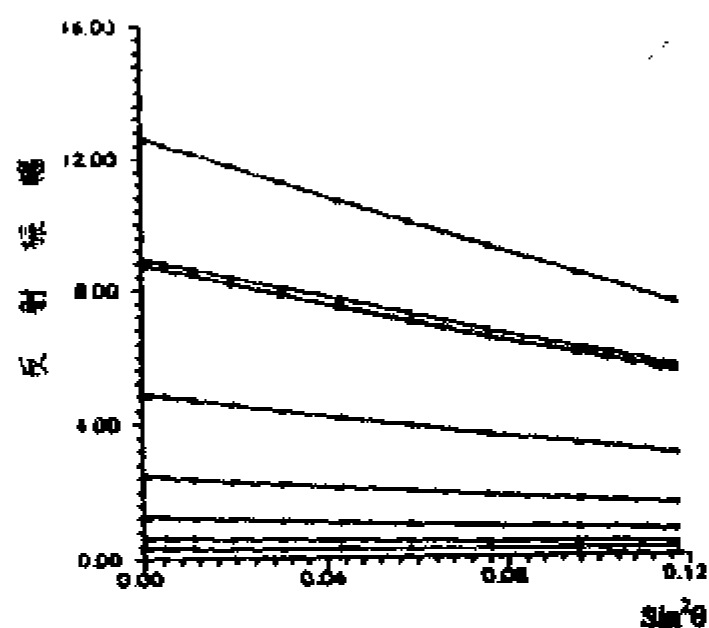


图 4.3.23　单层情况下不同厚度的
直线拟合(PR=0.2)
A:0.5m　B:1m　C:2m
D:4m　E:8m　F:16m
G:32m　H:64m

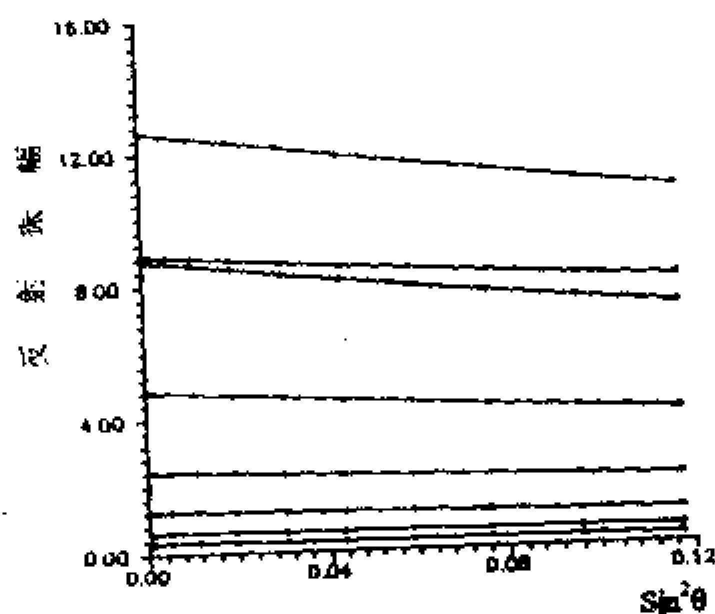


图 4.3.24　单层情况下不同厚度的
直线拟合(PR=0.3)
A:0.5m　B:1m　C:2m
D:4m　E:8m　F:16m
G:32m　H:64m

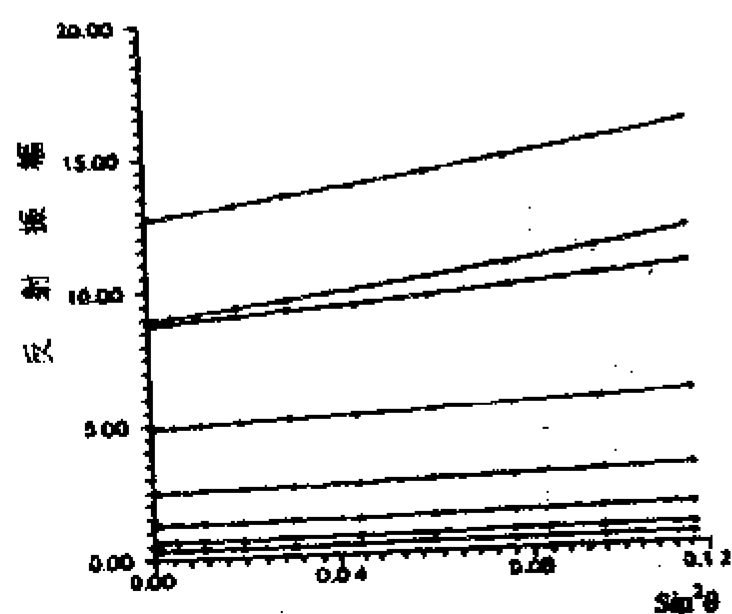


图 4.3.25　单层情况下不同厚度的
直线拟合(PR=0.4)
A:0.5m　B:1m　C:2m
D:4m　E:8m　F:16m
G:32m　H:64m

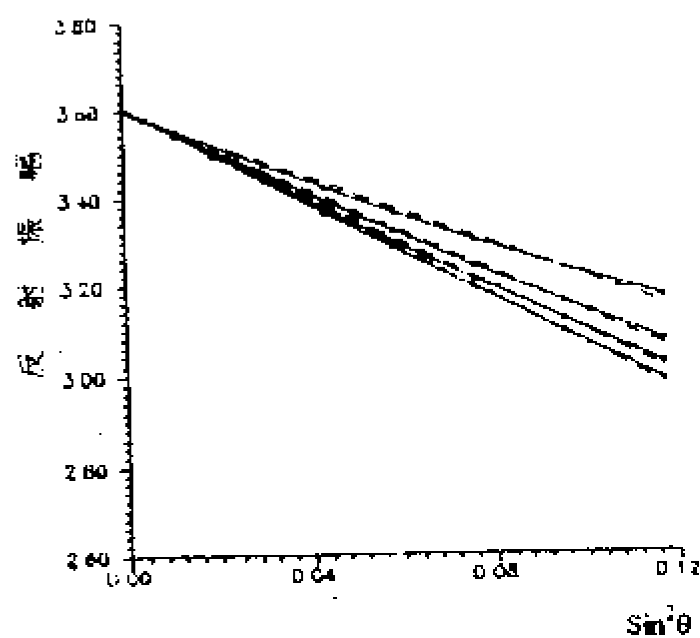


图 4.3.26　不同泊松比直线拟合(气层数 = 1)

A:PR = 0.1　　B:PR = 0.2

C:PR = 0.3　D:PR = 0.4

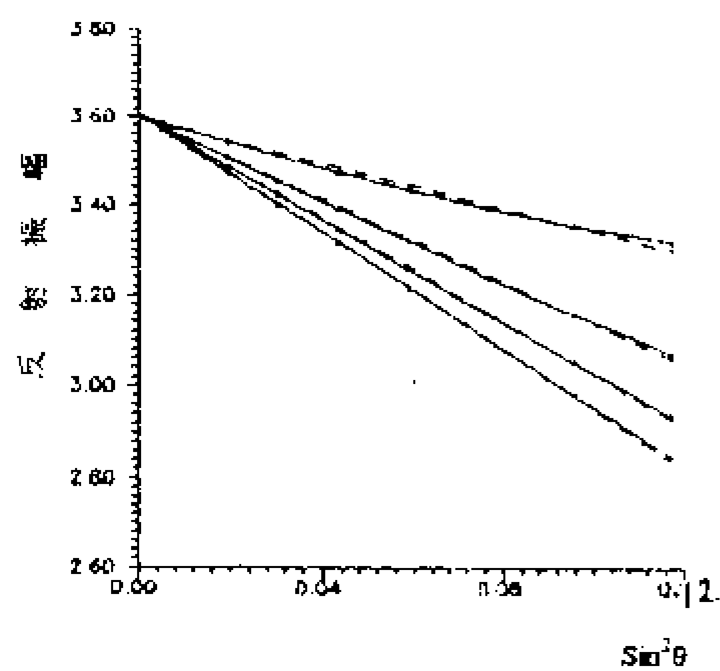


图 4.3.27　不同泊松比直线拟合(气层数 = 2)

A:PR = 0.1　　B:PR = 0.2

C:PR = 0.3　D:PR = 0.4

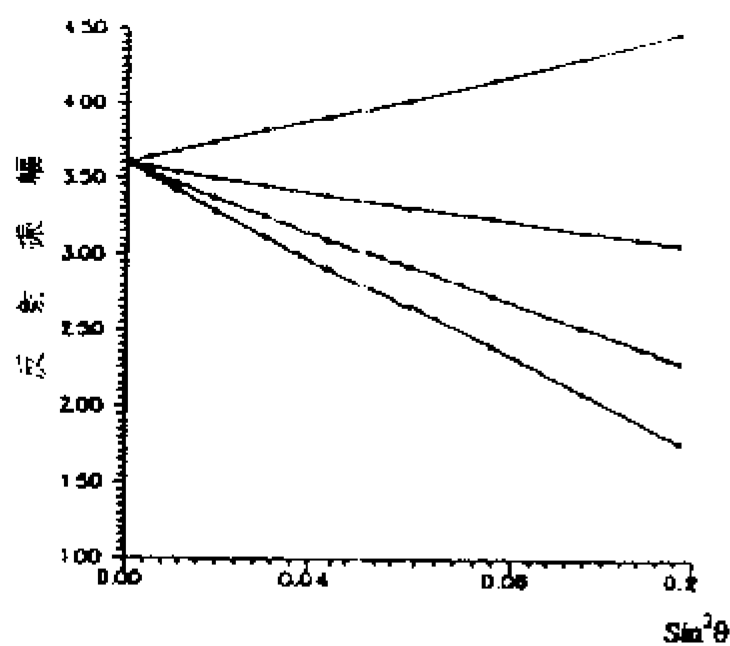


图 4.3.28　不同泊松比直线拟合(气层数 = 4)

A:PR = 0.1　　B:PR = 0.2

C:PR = 0.3　　D:PR = 0.4

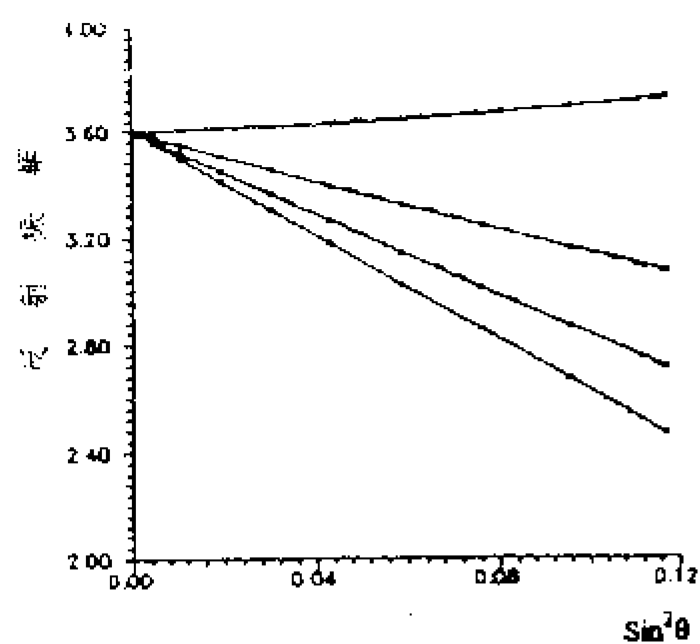


图 4.3.29　不同泊松比直线拟合(气层数 = 8)

A:PR = 0.1　　B:PR = 0.2

C:PR = 0.3　　D:PR = 0.4

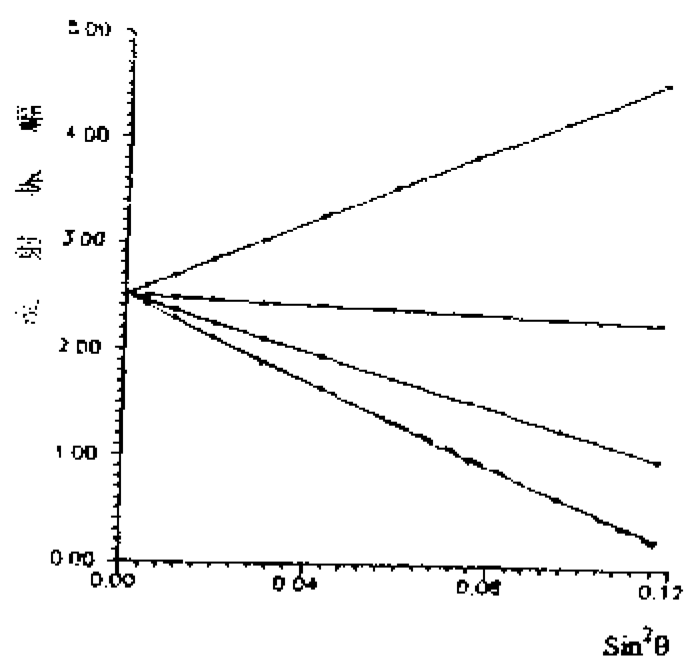


图 4.3.30　不同气层数直线拟合(PR = 0.1)

A:层数 = 1　　B:层数 = 2

C:层数 = 4　　D:层数 = 8

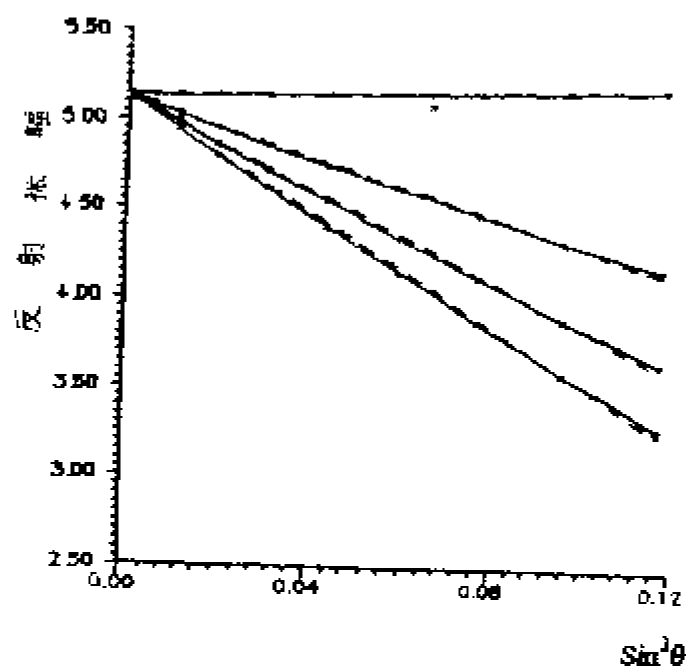


图 4.3.31　不同气层数直线拟合(PR = 0.4)

A:层数 = 1　　B:层数 = 2

C:层数 = 4　　D:层数 = 8

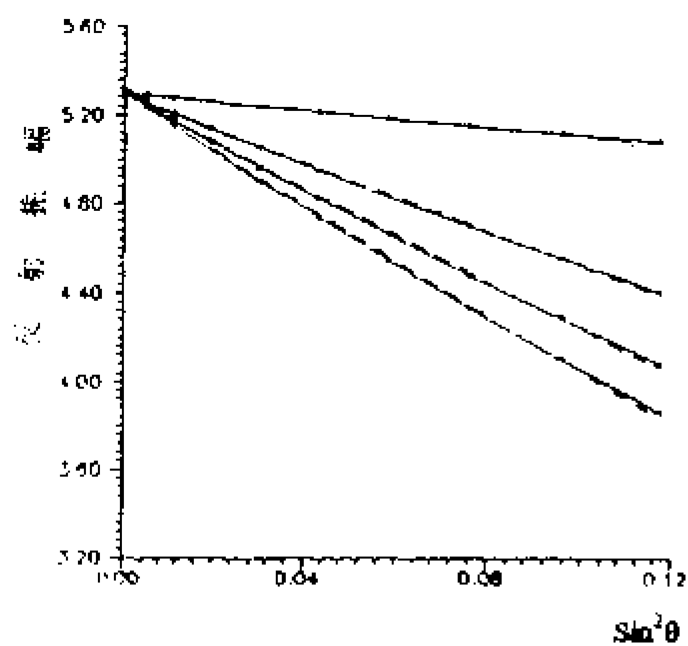


图 4.3.32　多层情况下不同层厚

直线拟合(PR = 0.1)

A:0.5m　B:1m　C:2m

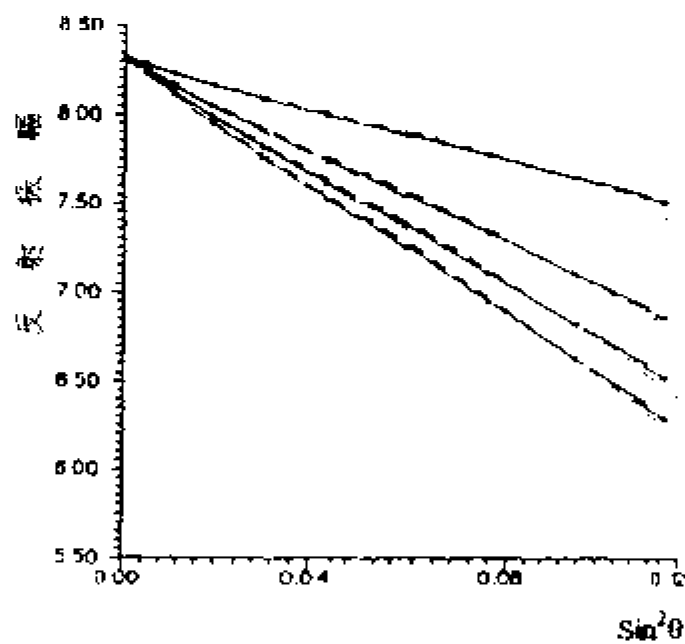


图 4.3.33　单层情况下不同层厚

直线拟合(PR = 0.4)

A:0.5m　B:1m　C:2m

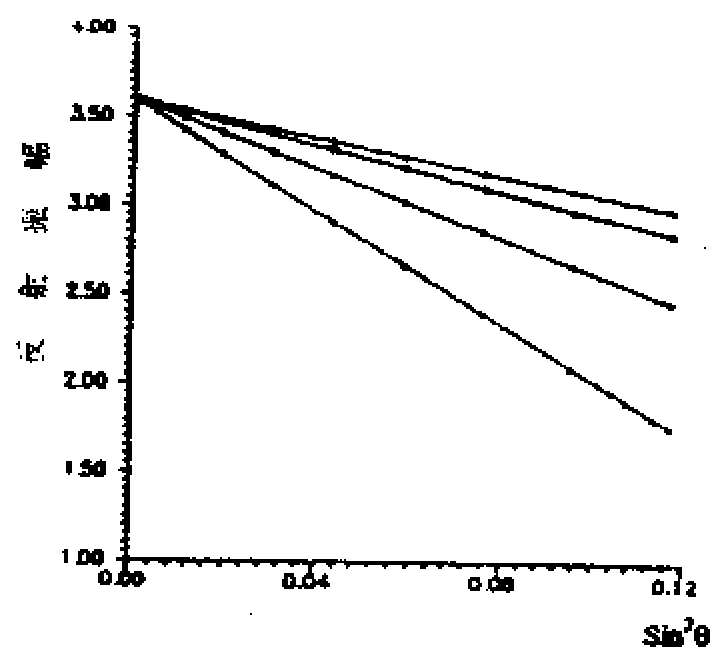


图 4.3.34 第 1 类曲线直线拟合

A:PR=0.1 B:PR=0.2

C:PR=0.3 D:PR=0.4

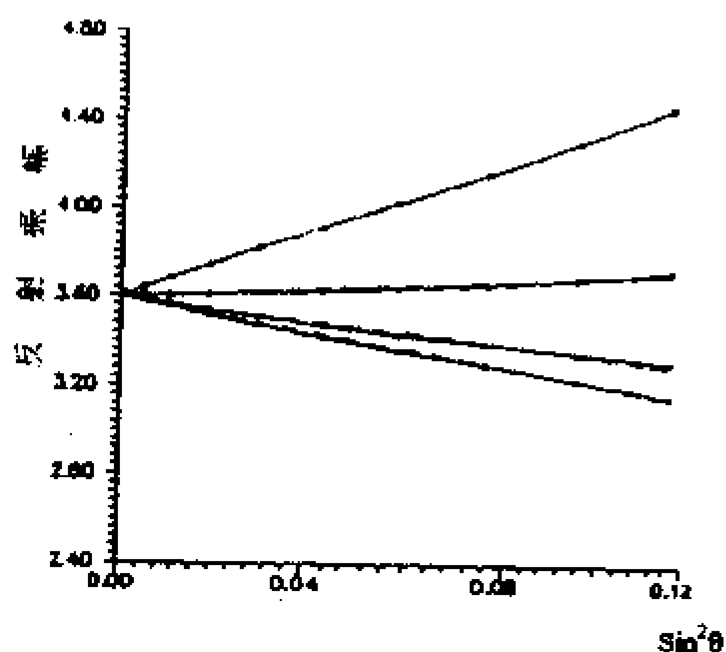


图 4.3.35 第 2 类曲线直线拟合

A:PR=0.1 B:PR=0.2

C:PR=0.3 D:PR=0.4

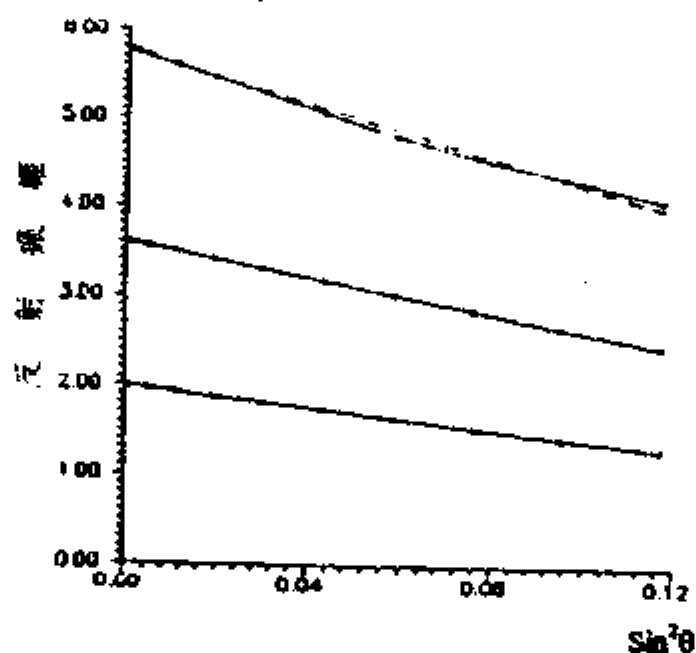


图 4.3.36 第 3 类曲线直线拟合

A:PR=0.1 B:PR=0.2

C:PR=0.3 D:PR=0.4

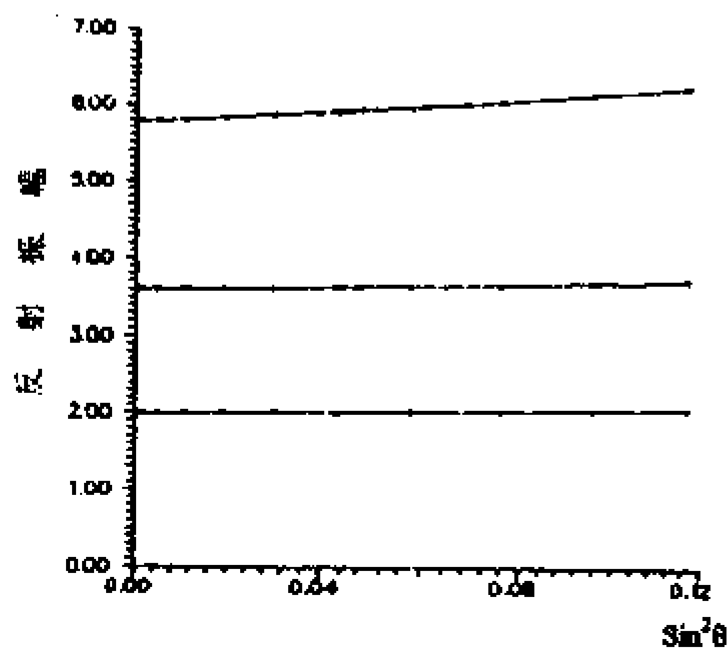


图 4.3.37 第 4 类曲线直线拟合

A:PR=0.1 B:PR=0.2

C:PR=0.3 D:PR=0.4

4.3.4 AVO 技术在寻找油气层中的应用

(1) AVO 处理

AVO 技术的关键是从多次覆盖采集的 CMP 道集上高保真地提取反射波振幅随偏移距(或入射角)变化的信息,因而要求通过地震数据的处理(AVO 处理)很好地压制各种干扰波

和精确地进行其它因素(如球面扩散等)与偏移距有关的振幅校正。

图 4.3.38 是针对某海上油田的实际情况经大量试验后所确定的流理流程。其中,带通滤波和二维滤波是压制干扰波、提高讯噪比的,球面发散和吸收衰减校正是与偏移距有关的校正。下面对一些模块作些说明。

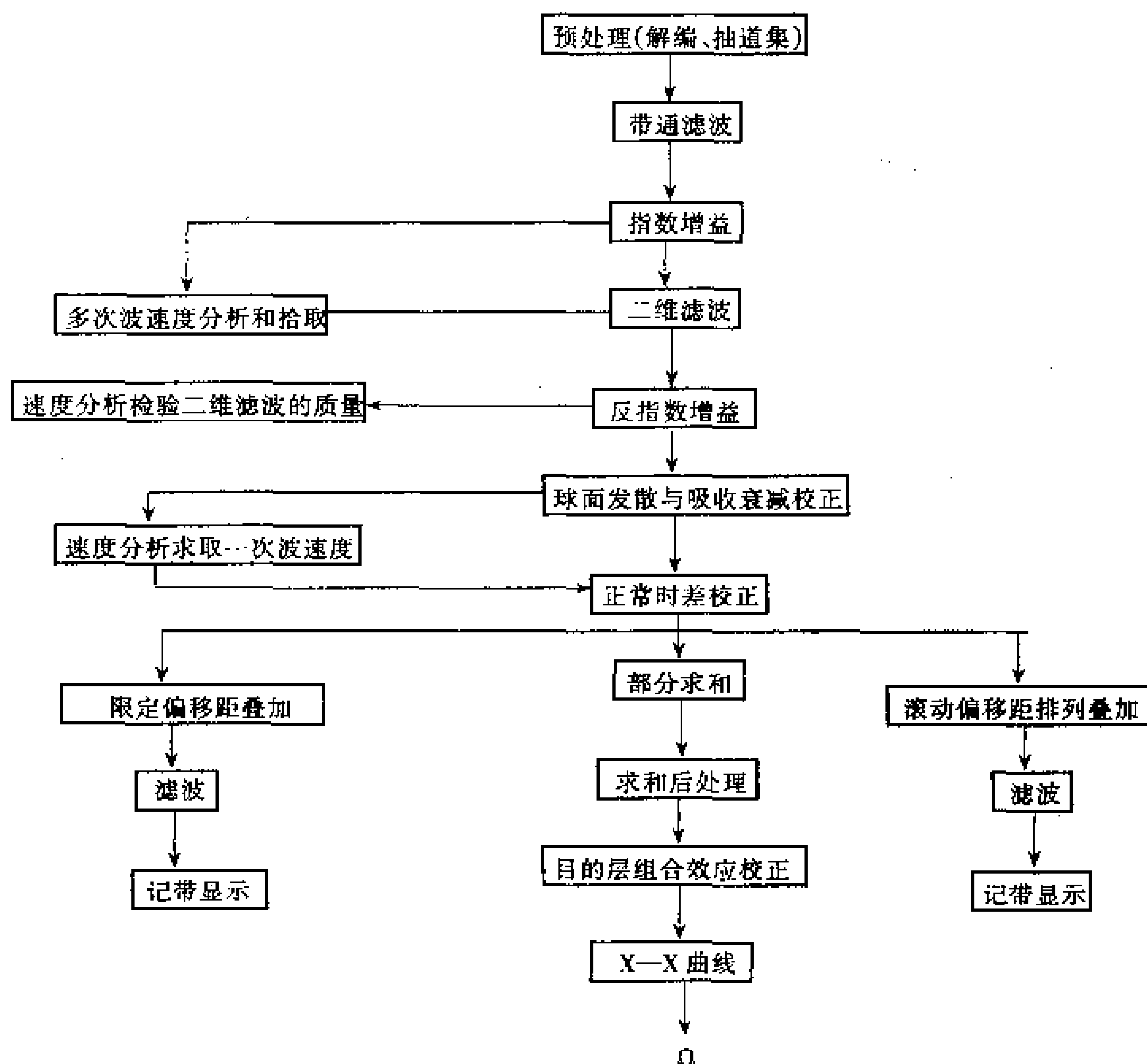


图 4.3.38 AVO 处理流程

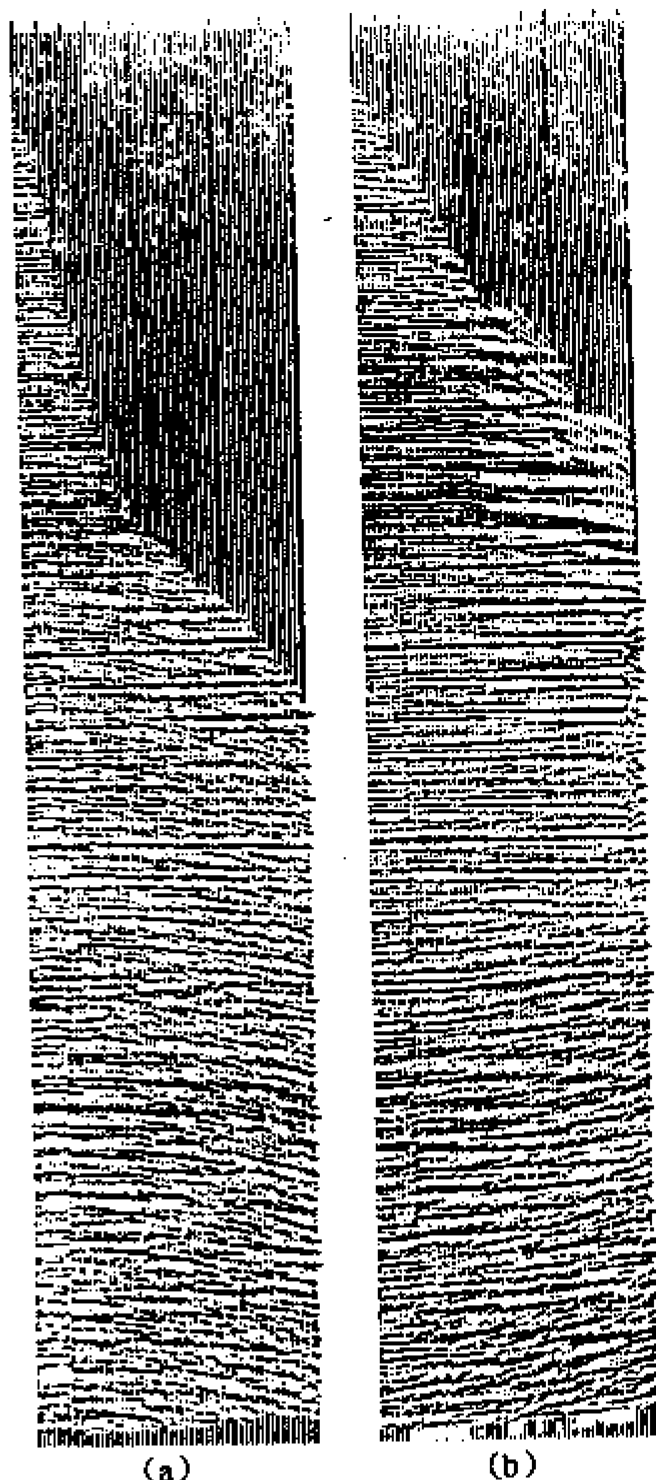
① 二维滤波

海洋地震数据中常存在海水层鸣震型多次波,一般采用二维滤波加以压制。二维滤波处理前需对 CMP 道集上的浅、深层能量进行均衡。经过试验,采用指数增益取得较好的效果,且在二维滤波后可以作反指数增益处理来恢复 CMP 道集原先的振幅状态。

图 4.3.39 是二维滤波前(a)和后(b)的某个经动校后的 CMP 道集。显然,经过二维滤波后,多次波被大大压制。图 4.3.40 是该道集上某目的层的 AVO 曲线。它表明,由于多次波干涉,使 AVO 曲线受到严重畸变,不能用于解释。

② 球面发散校正和衰减校正

球面发散校正要求已知地下剖面结构和分层速度,衰减校正要求已知各层的衰减系数(包括吸收衰减和地层衰减)。这些参数当前都难以精确地获得,因此用公式法分别进行球面发散校正的衰减校正的效果往往不理想。我们采用统计方式同时对球面发散与衰减进行校正。



(a)　　　(b)

图 4.3.39　(a) 动校后的 CMP 道集
(b) 动校和二维滤波后的 CMP 道集

球面发散用衰减对反射波振幅的影响可表示为

$$D(t,a,b)=at^{-1}e^{-bt} \tag{4.3.1}$$

其中，a 是与球面发散有关的待定常数，b 是与衰减有关的待定常数，t 是反射波到达时。假定震源产生的地震波初始振幅为 A_0，则地表接收的反射地震记录可表示为

$$x(t)=A_0 at^{-1}e^{-bt} \tag{4.3.2}$$

对 $x(t)$ 计算平均振幅

$$A(t_i)=\frac{1}{2L+1}\sum_{n=-L}^{L}|x(t_i-n)| \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{4.3.3}$$

或计算均方根振幅

$$A(t_i)=\left[\frac{1}{2L+1}\sum_{n=-L}^{L}x^2(t_i-n)\right]^{1/2} \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{4.3.4}$$

其中，N 是地震道长度，$2L+1$ 是地震子波长度。令

$$u_i=u(t_i)=\ln A(t_i)+\ln t_i \qquad i=1,2,\cdots,N$$

用最小二乘法来拟合实际地震道振幅。令

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\{\ln[A(t_i)D^{-1}]-\ln A_0\}^2$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial a}=0$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial b}=0$，解得

$$a=\frac{1}{A_0}\exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}u_i\sum_{i=1}^{N}t_i^2-\sum_{i=1}^{N}t_i\sum_{i=1}^{N}u_it_i}{N\sum_{i=1}^{N}t_i^2-(\sum_{i=1}^{N}t_i)^2}\right] \tag{4.3.5a}$$

$$b=-\frac{N\sum_{i=1}^{N}u_it_i-\sum_{i=1}^{N}u_i\sum_{i=1}^{N}t_i}{N\sum_{i=1}^{N}t_i^2-(\sum_{i=1}^{N}t_i)^2} \tag{4.3.5b}$$

用 $D^{-1}(=a^{-1}te^{bt})$ 乘以地震道 $x(t)$ 即完成了球面发散和衰减校正。

上述拟合是对每个单道进行的。由于各道信噪比不同，所求出的 a 与 b 都有不同的误差，故在求出 CMP 道集中各偏移距道相应的 $a(x_i)$ 和 $b(x_i)$ 后需进行空间拟合，得到合理的与偏移距有关的球面发散和衰减校正的系数。此外，考虑到球面发散和衰减沿测线的变化，还对各 CMP 道集再次作空间拟合。由图 4.3.41 可见，我们的方法(AVOSCALE)比原先的方法(SCALE)的偏移距补偿效果好得多。

③ 部份求和法

在原始地震资料讯噪比不高时，采用 Ostrander(1984)提出的部份求和法可进一步压制噪音。图 4.3.42a 和 b 是部份求和前、后的某目的层的 AVO 曲线。显然部分求和后的 AVO 曲线更合理。应当指出，部分求和是把几个 CMP 道集上的几个偏移距上的信号相加，故降低了分辨率。所以，当原始资料讯噪比很高时不宜作部份求和。

经过提高讯噪比处理和偏移距振幅校正后的 CMP 道集再经正常时差校正可分别得到

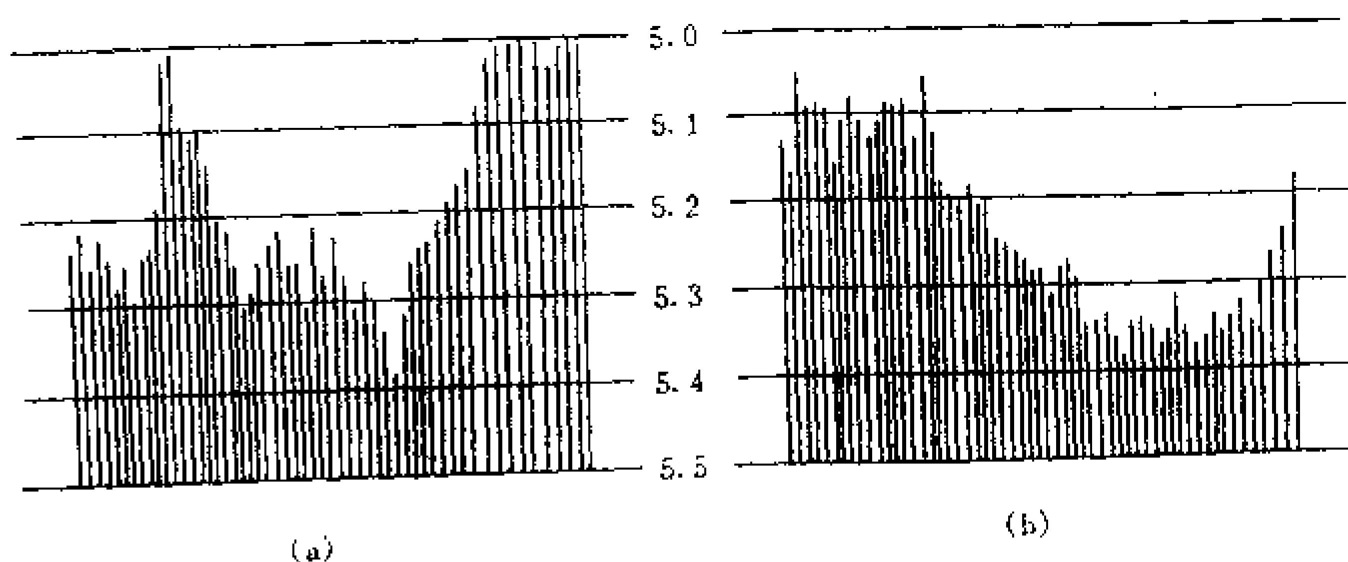


图 4.3.40

(a) 二维滤波前的 AVO 曲线； (b) 二维滤波后的 AVO 曲线

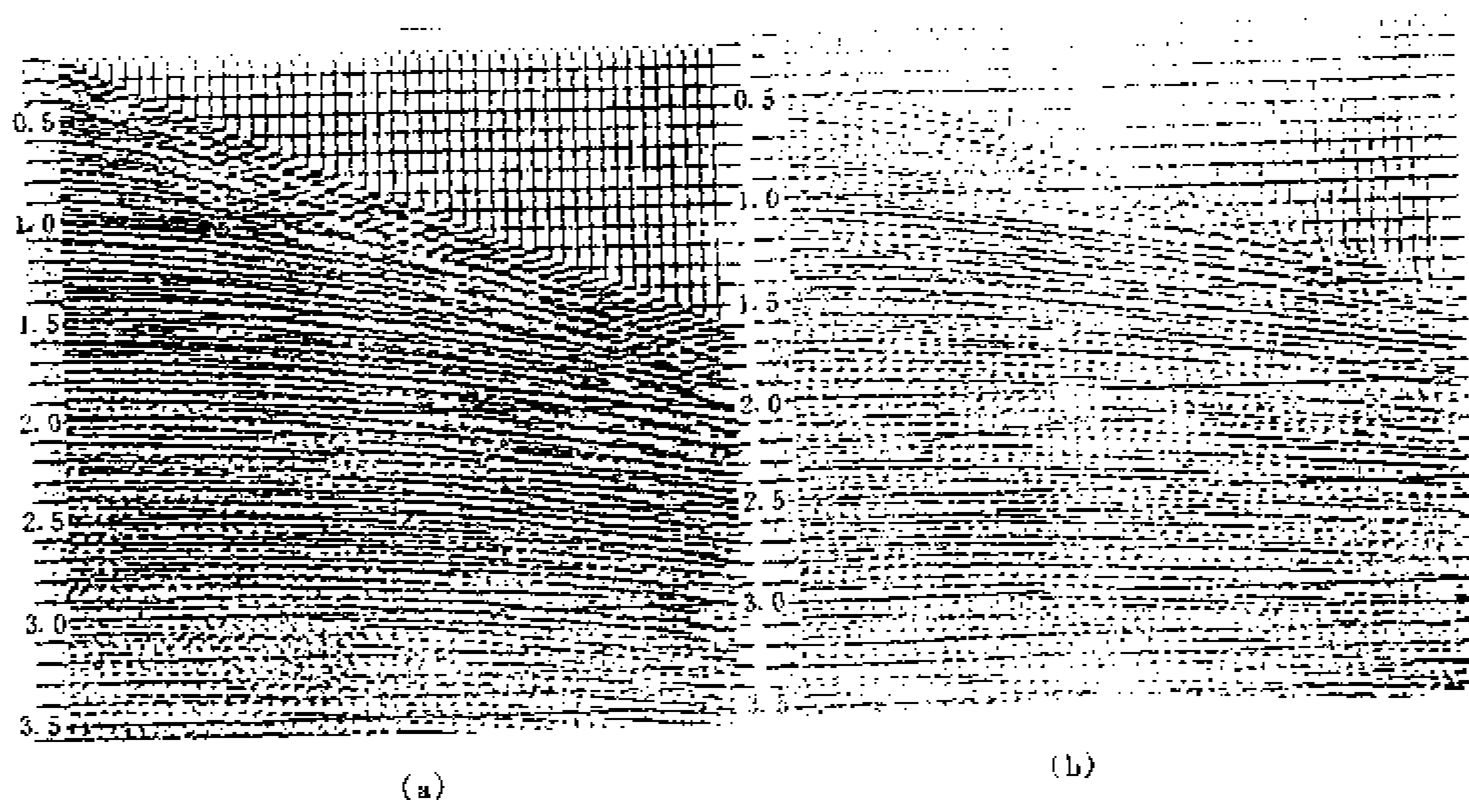


图 4.3.41

(a) SCALE 振幅补偿后的 CMP 道集； (b) AVOSCALE 振幅补偿后的 CMP 道集

限定偏移距叠加剖面、滚动叠加剖面和目的层的 AVO 曲线。滚动叠加剖面是把所有不同偏移距道分成多于 5 段后分别叠加，限定偏移距叠加剖面则分为 3 段后分别叠加；前者可仔细考察反射波振幅随偏移距的变化，但显示剖面很多，不便解释。通常采用近道、中间道和远道的三条限定偏移距叠加来分析各目的层的反射波振幅随偏移距的变化，在此基础上根据需要显示目的层的 AVO 曲线作更精细的研究。

野外采集时常采用检波器组合或震源组合来压制低视速度的干扰波。不同偏移距，不同波至时、不同频率成分的组合效应是不同的，实施组合效应校正必须是空变、时变和频变的，因而十分困难。这里仅以某工区采集因素为例说明组合对 AVO 信息的影响。每个接收点由 24 个检波器等灵敏度组合，组内距为 2.174m，组合基距 50m；震源是 7 点气枪组合，组内距 3.27m，基距 20m；最小炮检距 270m，最大炮检距 2645m。根据地震记录中反射波主频 30Hz 和当地速度资料计算检波器组合效应（图 4.3.43）和震源组合效应（图 4.3.44）。此两图表明，对于波至时小于 3s 的反射波，有必要进行组合效应校正，或在解释 AVO 曲线时予

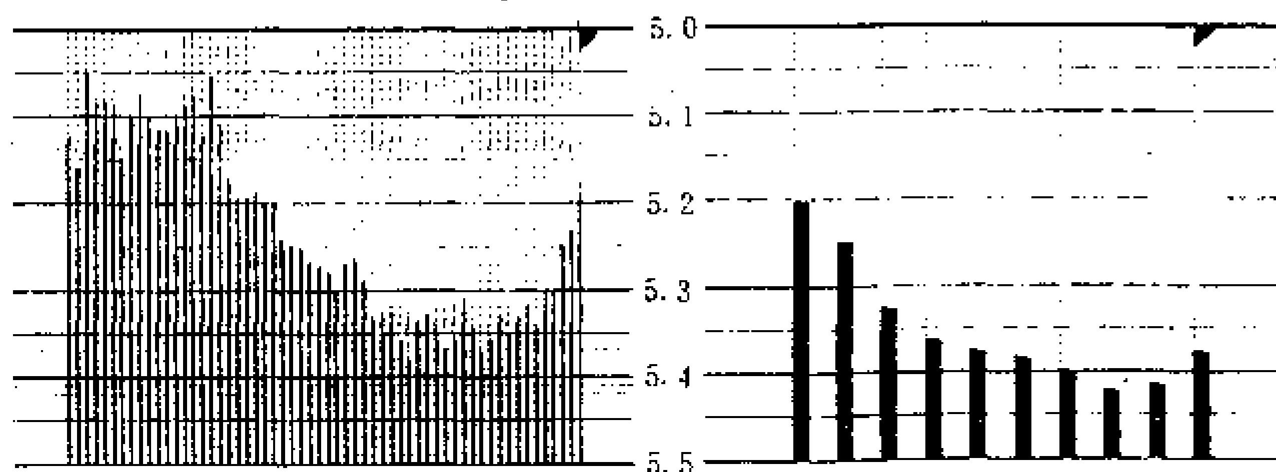


图 4.3.42

(a) 部分求和前的 AVO 曲线； (b) 部份求和后的 AVO 曲线

以考虑。

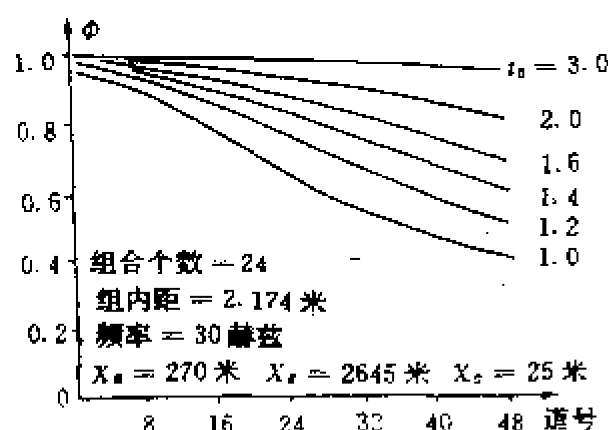


图 4.3.43 检波器组合效应

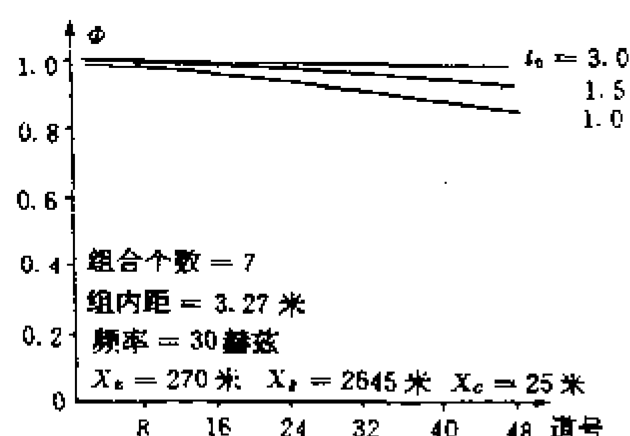


图 4.3.44 震源组合效应

平面反射波理论计算得到的是 AVA 曲线,实际资料处理得到的是 AVO 曲线。为使两者能对比,必须把偏移距换算为入射角。图 4.3.45a 和 b 分别是均匀介质和连续介质两种假设下的换算结果。显然,后者比前者换算的入射角大;且偏移距越大,差别越大。大部份地区的速度随深度变化更符合连续介质或分层连续介质情况。在构造复杂地区,应当采用射线追踪方法来实现换算。

提高分辨率对用 AVO 技术寻找薄油气层很重要。常规数字处理中用反褶积来提高分辨率。但大多数反褶积是单道处理方式,将严重使 AVO 信息畸变,不宜采用。图 4.3.46a 和 b 是脉冲反褶积前和的 AVO 曲线。显然,脉冲反褶积使 AVO 曲线严重畸变。

(2) AVO 曲线的地质解释

在某种意义上说,AVO 异常的地质解释是比提取 AVO 信息更困难的工作。如前所述,界面两侧介质的泊松比差异是产生反射波振幅随偏移距变化的重要因素。但泊松比差异可以由砂岩含油气引起,也可能由岩性差异引起;此外,薄互层的复合反射波振幅受层参数和调谐作用的影响。因此,AVO 技术虽减少了"亮点"技术的多解性,但它本身仍存在多解性,必须综合各种资料对 AVO 异常进行地质解释。这里对"亮点"型薄互层油气层的两个实例用理论记录验证的方法来解释 AVO 曲线。

① A 号实例

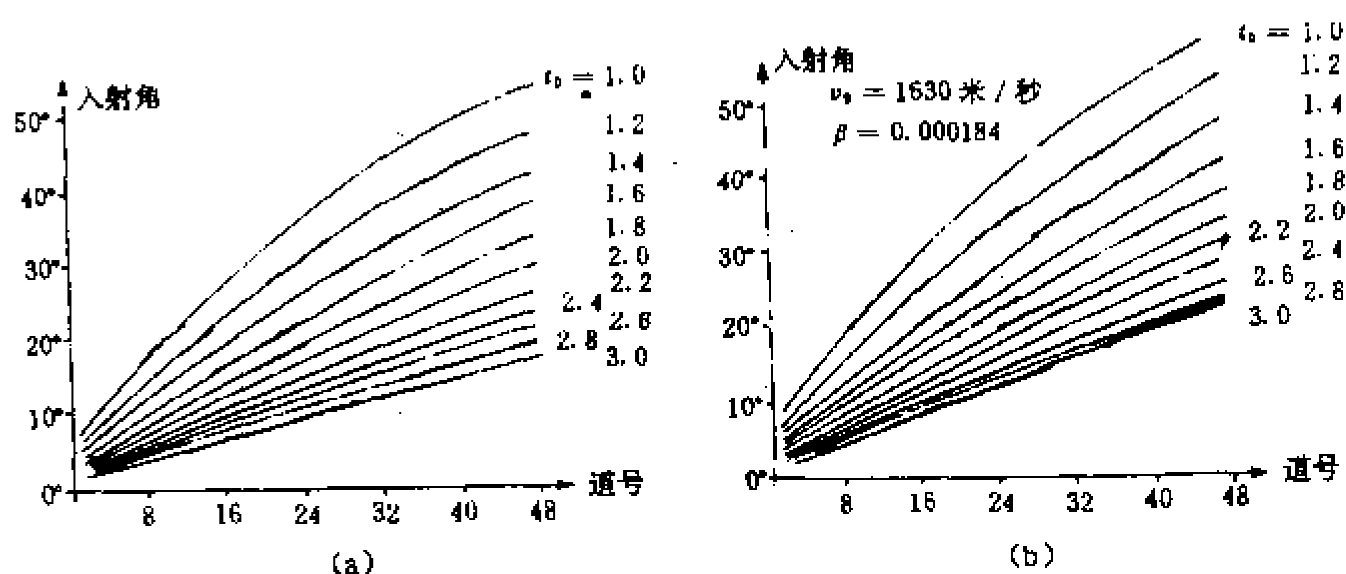


图 4.3.45 偏移距换算入射角曲线

(a) 均匀介质；(b) 连续介质

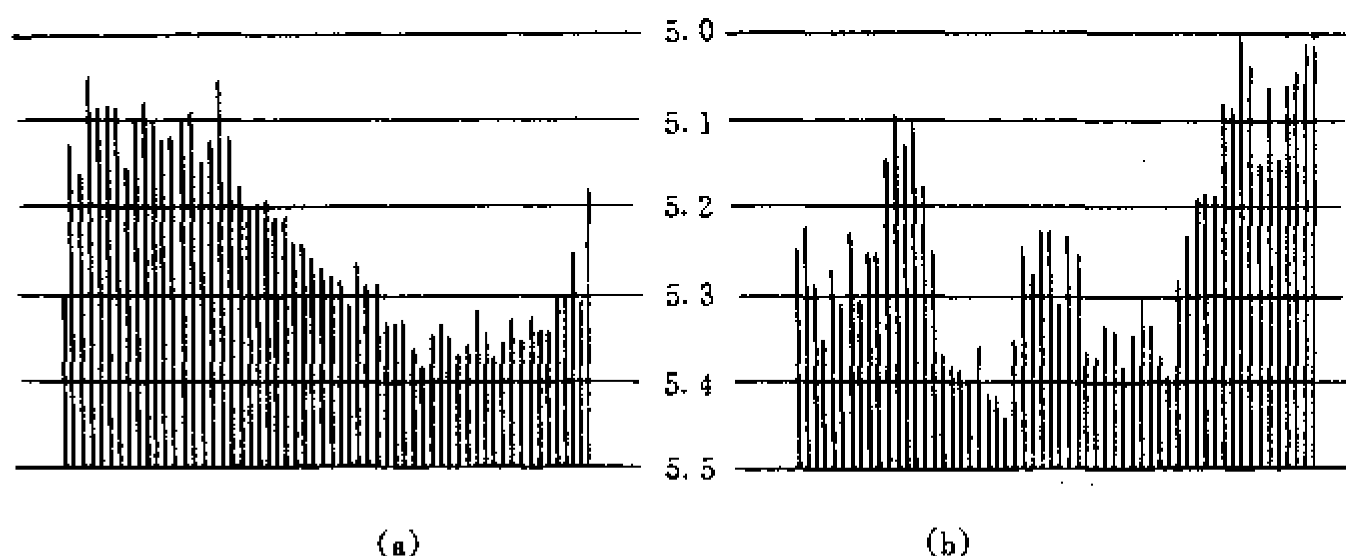


图 4.3.46

(a) 脉冲反褶积前的 AVO 曲线；(b) 脉冲反褶积后的 AVO 曲线

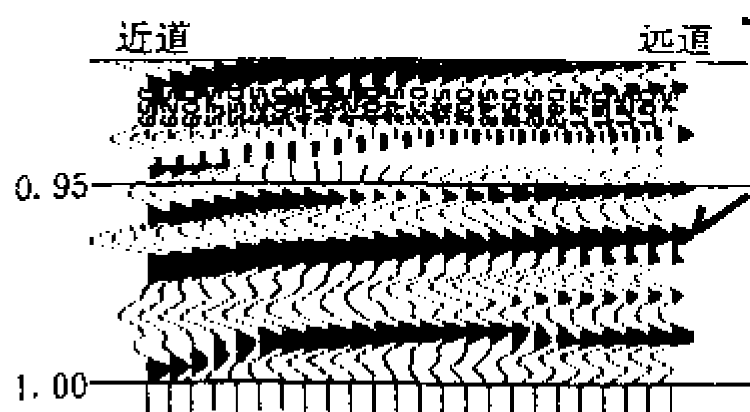


图 4.3.47 A 号实例的井旁 CMP 道集

本实例是浅层油气藏的 24 次覆盖高分辨率地震资料，炮间距 12.5m，道间距 25m，偏移距 25m，最大炮检距 675m，地震反射波主频高达 80Hz。

图 4.3.47 是某占井位置处与已知含气砂岩层相应的 CMP 道集剖面，在 0.97s 附近(用箭头标出)清楚地显示出一个 AVO 异常。为验证它是否确系砂岩含气所致，我们根据钻井和声测井资料提出与 0.97s 反射波相应的薄互层模型，其厚度和纵波速度由声测井数据提取，密度由该工区的经验公式由纵波速度换算得到。由于没有横波速度资料，只能统一假定围岩页岩的泊松比为 0.4，令砂岩泊松比分别为 0.1 与 0.2(含油气)或 0.3 与 0.4(不含油气)，然后由泊松比和纵波速度换算横波速度。

图 4.3.48 是表 4.3.4 所列的 A 号实例地层参数的 4 个泊松比模型的平面反射波理论记录及振幅曲线。入射角从 0°到 28°，角度间隔 2°，共 15 道。由图可见，当砂岩不含气时，复合反射波振幅随入射角增加略有减小或增大；当砂岩含气时，反射波振幅随入射角而增大，且

与图 4.3.47 的 AVO 曲线相似。因而，钻井处道集上 0.97s 反射波的 AVO 异常确由砂岩含气产生的。

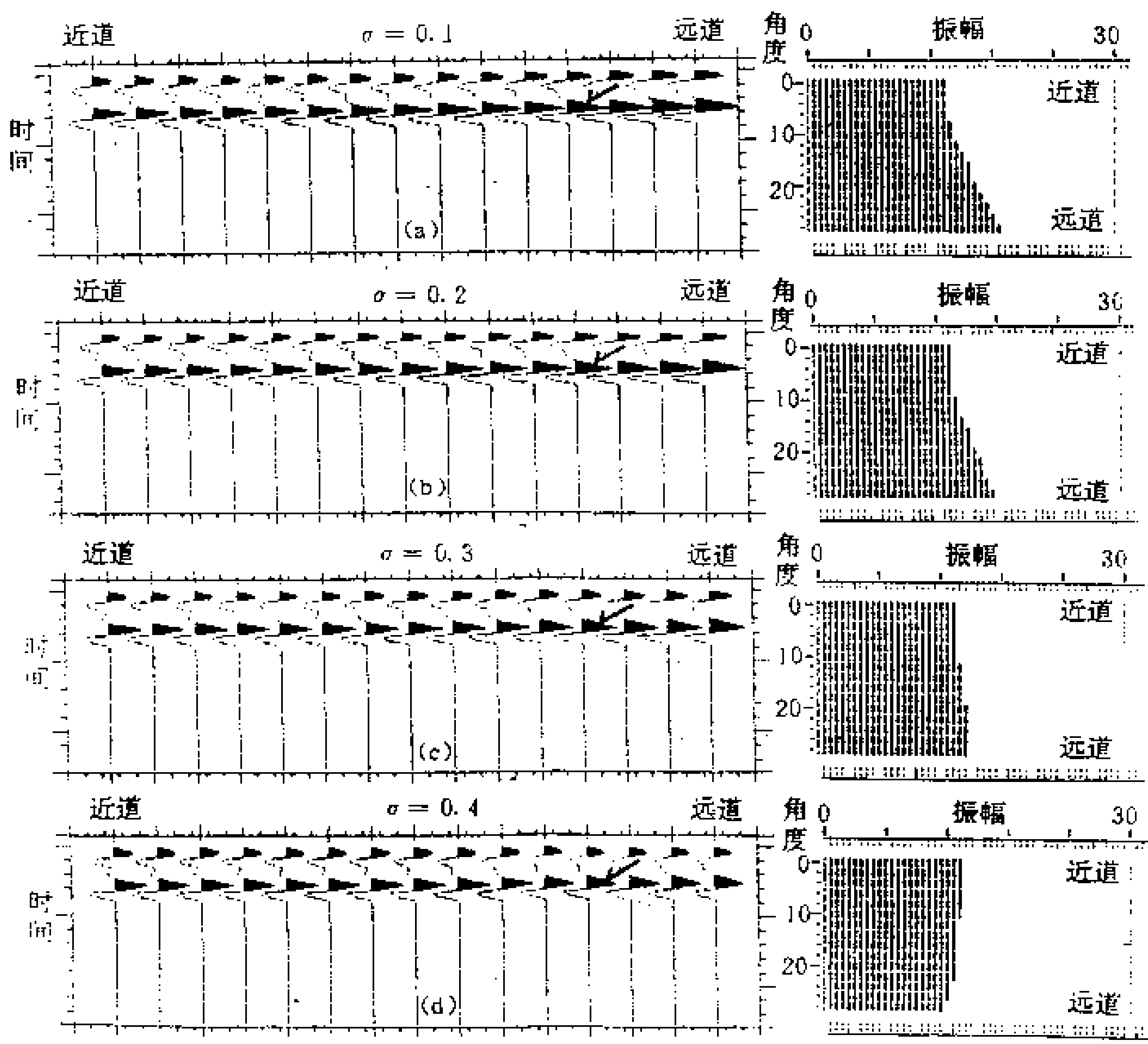


图 4.3.48　与 A 号实例相应的反射波理论记录及振幅曲线

表 4.3.4　　A 号实例的地层参数

岩性	层厚 (m)	密度 (g/cm^3)	纵波速度 (m/s)	横波速度(m/s)			
				σ = 0.4	σ = 0.1	σ = 0.2	σ = 0.3
泥岩		2.04	2083	850			
气砂	9	1.91	1695	692	1130	1038	906
泥岩	4	2.04	2083	850			
气砂	4	1.92	1724	704	1149	1056	922
泥岩	2	1.98	1887	770			
气砂	5	1.92	1724	704	1149	1056	922
泥岩		2.03	2041	833			

为横向追综上述 AVO 异常，我们对通过该钻井的各地震测线分别处理出近道剖面、中道剖面和远道剖面，如图 4.3.49 所示。此图中用箭头标出的 0.97s 附近的反射波振幅随叠加时所用的偏移距范围的增加而增大，表明该剖面上含气砂岩横向可追踪很大距离。

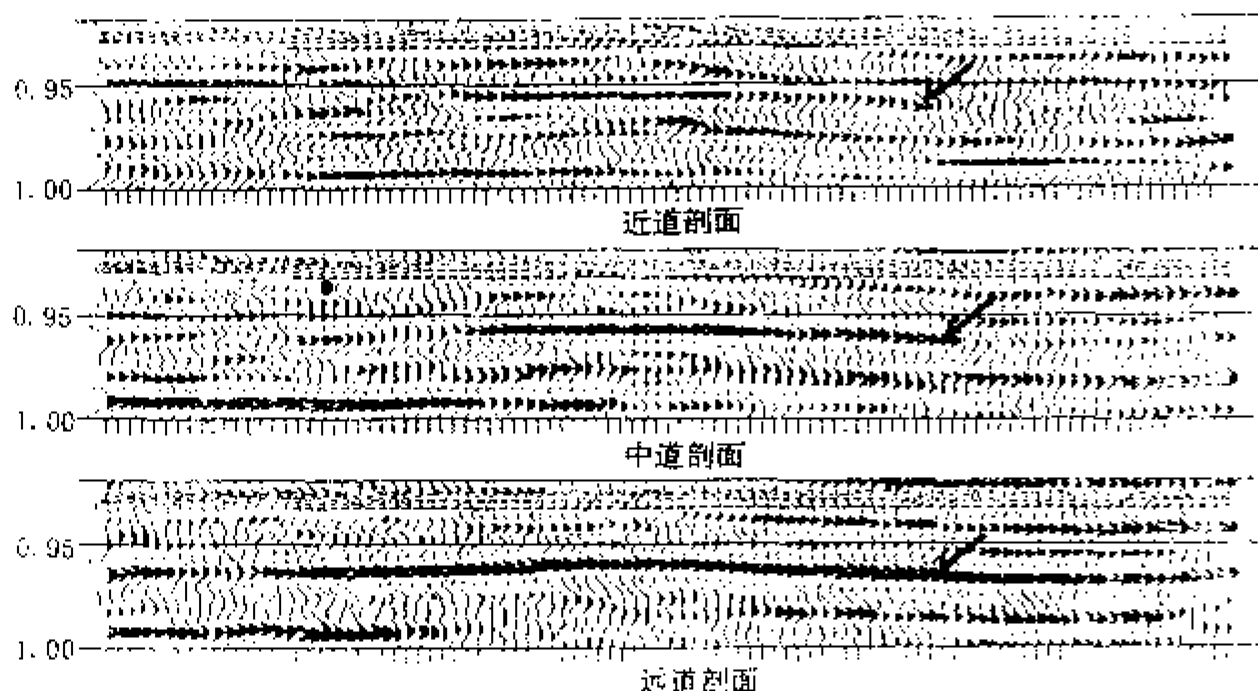


图 4.3.49 A 号实例的不同偏移距透加剖面

图 4.3.50 中用虚线圈定了 AVO 异常范围,它刚好落在用实线且示的砂岩储层顶板构造的顶部范围,使我们确认信 AVO 异常范围圈定了油气边界。

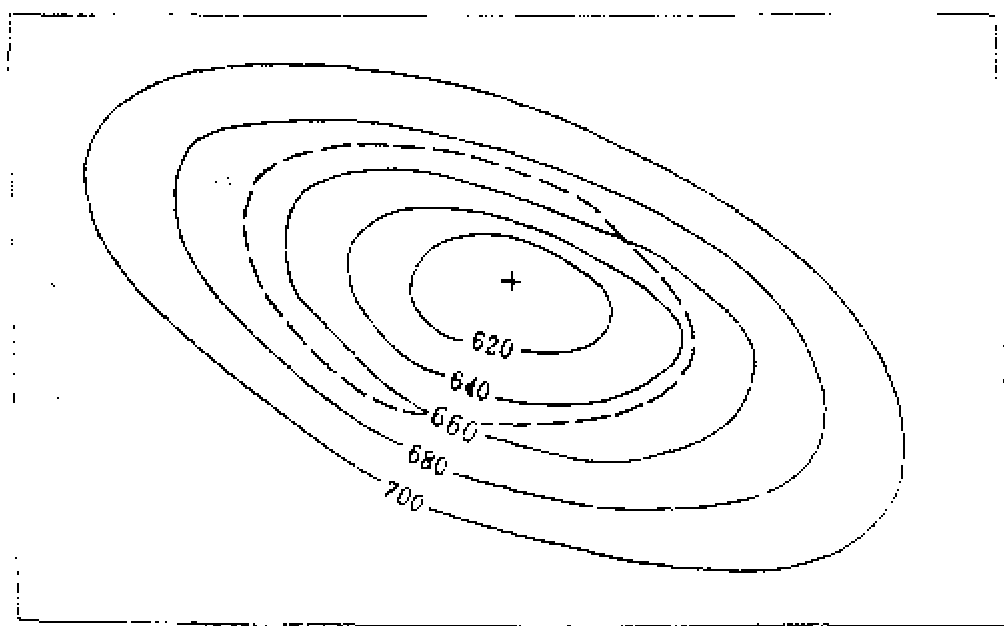


图 4.3.50 A 号实例的 AVO 异常范围

② B 号实例

本实例是深部油气层的 48 次覆盖地震资料,炮向距和道间距均为 25m,偏移距 270m,最大炮检距 2645m,目的层反射波主频 40~50Hz。

图 4.3.51 是某钻井位置的 CMP 道集,在 2.35s 附近用箭头标出一个 AVO 异常,其反射波振幅变化特点是先随偏移距增大而减小,然后又增大,呈"V"字型。经钻井、声波测井和地震剖面的对比解释,认为此反射波与厚度为 20m 的含气砂岩层相应。为验证此 AVO 异常确系此含气砂岩所引起,我们据声测井资料提取表 4.3.5 所列的薄互层系模型。仍如同实例 A 那样计算得到图 4.3.52,其左侧是反射波波形,右侧是反射波振幅随入射角变化曲线。由图 4.3.52b 可见,砂岩不含气时,反射波振幅随入射角增加明显减小;由图 4.3.52a 可见,砂岩含气时的反射波振幅随入射角增大而先减小,后增大,与图 4.3.51 中 2.35s 附近的"V"

字型 AVO 异常形态一致,因而可认为 AVO 异常是含气砂岩引起的。

表 4.3.5　　B 号实例的地层参数

岩性	厚度 (m)	密度 (g/cm³)	纵波速度 (m/s)	横波速度(m/s)	
				$\sigma=0.4$	$\sigma=0.1$
砂质泥		2.22	3920	1600	
泥岩	7	2.13	3330	1359	
砂岩	3	2.25	4170	1702	
泥岩	4	2.2	3790	1547	
砂岩	17	2.25	4110	1678	
砂质泥	6	2.23	4020	1641	
煤	5	2.11	3200	1306	
气砂	21	2.2	3720	1519	2480
砂质泥	3	2.17	3590	1466	
泥岩	3	2.12	3300	1347	
煤		2.04	2800	1143	

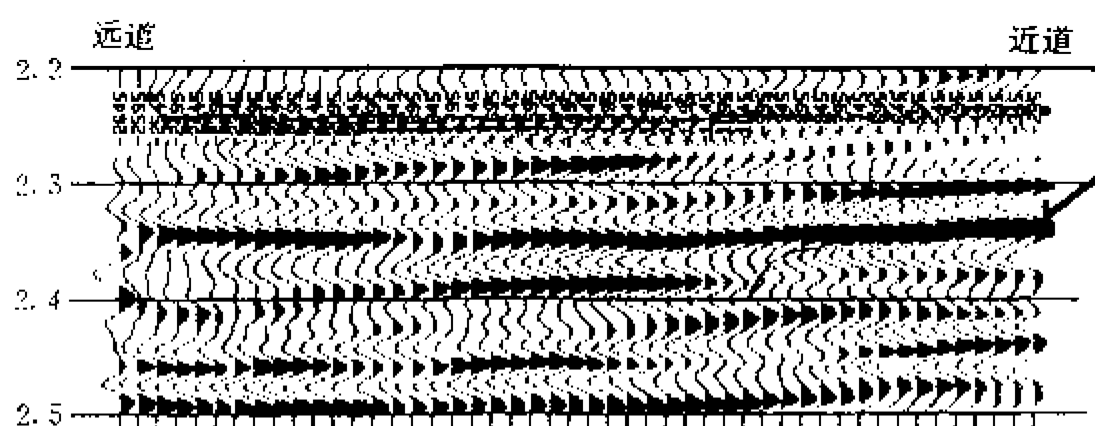


图 4.3.51　B 号实例的井旁 CM 道集

值得指出的是,我们原先在解释声测井资料时遗漏了气砂层上方的薄煤层,提取的是表 4.3.6 所列的薄互层系模型,计算得到的反射波理论记录是图 4.3.52c。此时,含气砂的 AVO 曲线是单调增大的,显然与实际资料不符。这表明,在薄互层情况,影响 AVO 曲线形态的不仅是泊松比,而且还与围岩的分层及其参数有关。换句话说,围岩参数变化也会对 AVO 曲线形态产生重大影响,不容忽视。

图 4.3.53 是 B 号实例通过两口钻井的不同偏移距剖面,箭头所标的 2.35s 附近的反射波振幅在近道剖面上比中道剖面强,而远道剖面又比中道剖面强。但在该剖面左侧,反射波振幅却随偏移距增大呈单调上升,予测是围岩中煤层缺失所致,但仍有含气砂岩。为验证这一预测,布置了 B 井(见图 4.3.53),表明此单调上升的 AVO 异常是约 20m 厚气层引起,且上覆地层未见煤层。图 4.3.54a 是 B 井位处 CMP 道集,图 4.3.54b 是根据 B 井声测井数据提取的薄互层系模型的反射波理论记录,两者符合良好。图 4.3.55 中的实线是 2.35s 附近的目的层反射波相应的砂岩层顶板构造图,虚线是根据该面积上许多地震测线得到的 AVO 异常范围,它亦落在砂体的高部位,据此圈定的油气边界已为钻井所证实。

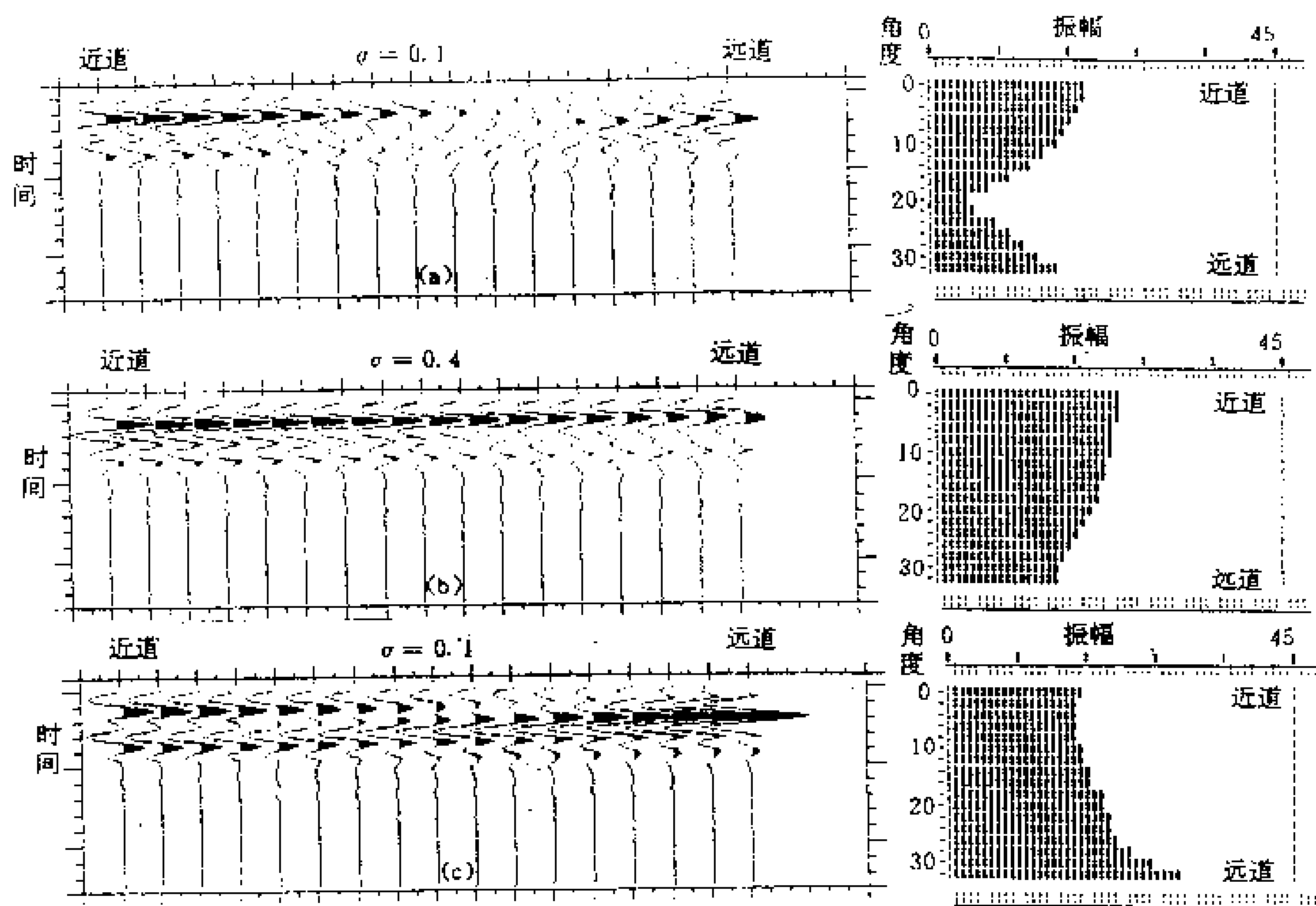


图 4.3.52　与 B 号实例相应的反射波理论记录及振幅曲线

表 4.3.6　　B 号实例的地层参数(抽掉了气砂上覆煤层)

岩性	厚度 (m)	密度 (g/cm^3)	纵波速度 (m/s)	横波速度(m/s) $\sigma=0.4$	横波速度(m/s) $\sigma=0.1$
砂质泥		2.22	3920	1600	
泥岩	7	2.13	3330	1359	
砂岩	3	2.25	4170	1702	
泥岩	4	2.2	3790	1547	
砂岩	17	2.25	4110	1678	
砂质泥	11	2.23	4020	1641	
气砂	21	2.2	3720	1519	2480
砂质泥	3	2.17	3590	1466	
泥岩	3	2.12	3300	1347	
煤		2.04	2800	1143	

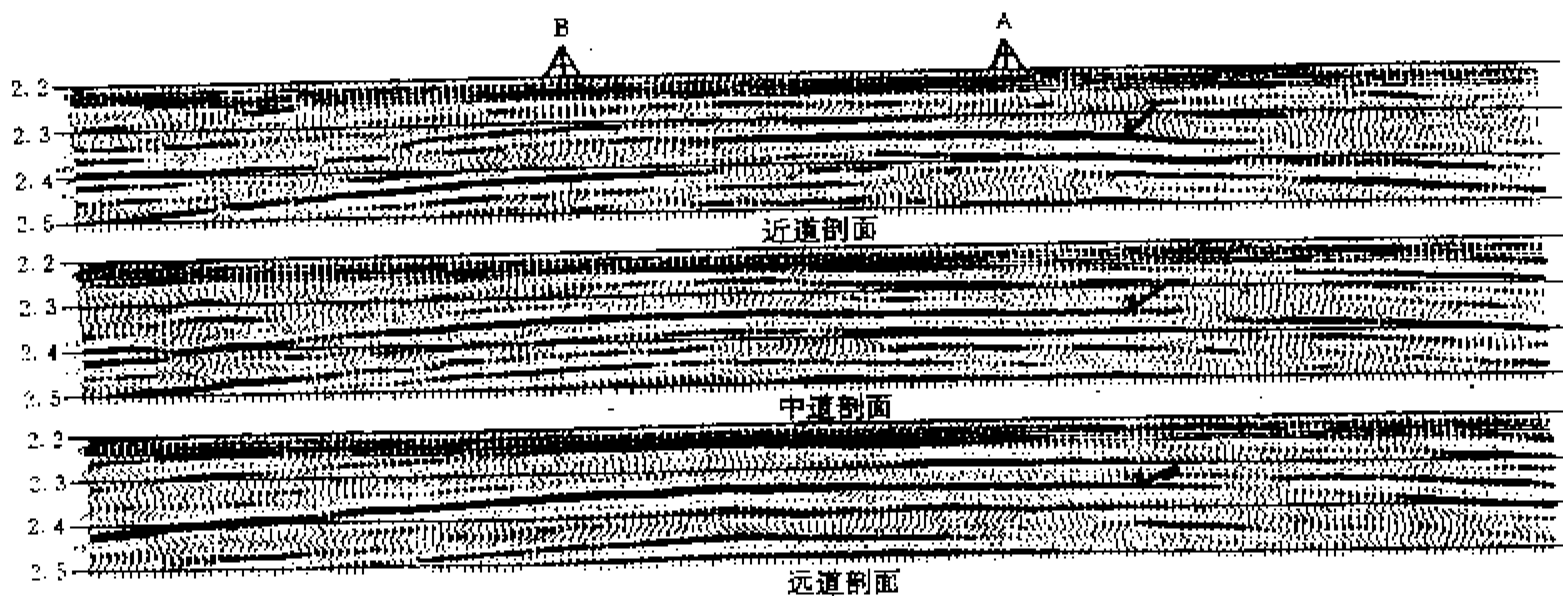
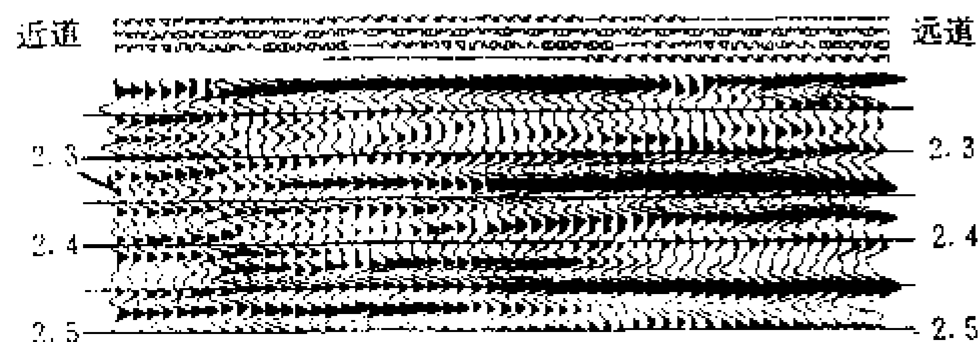
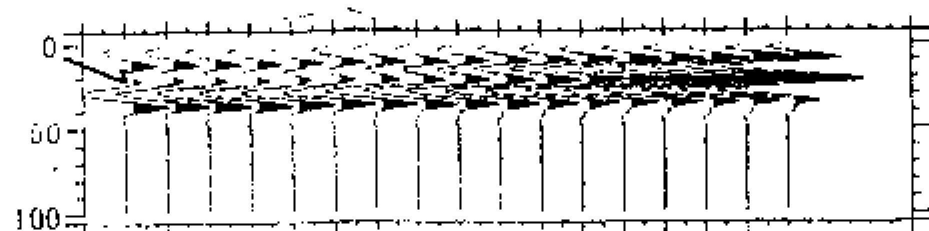


图 4.3.53　B 号实例不同偏移距叠加剖面



(a)



(b)

图 4.3.54 B井位处 CMP 道集(a)和薄互层层系模型合成记录(b)

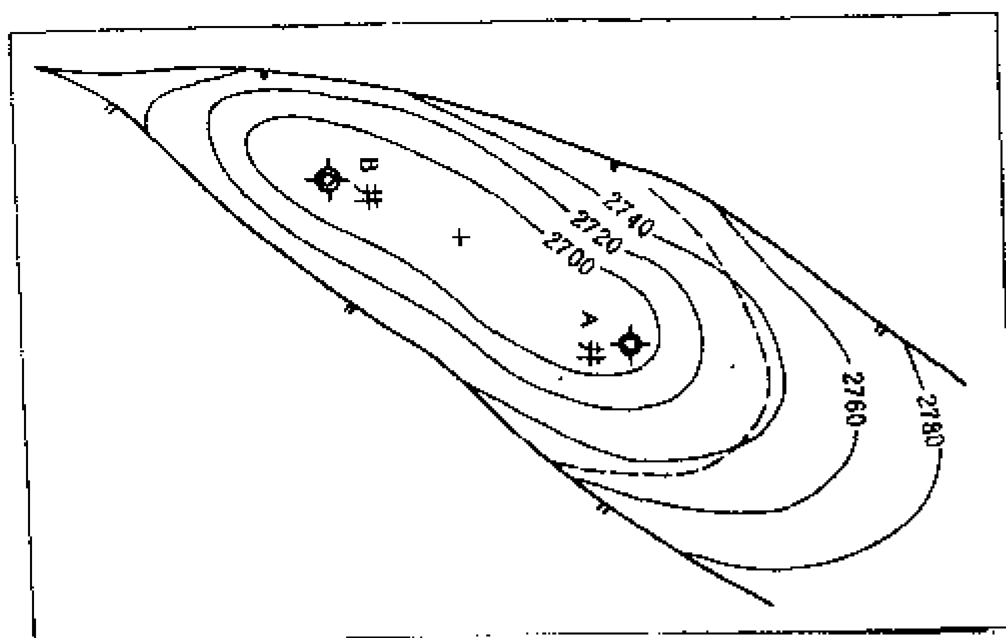


图 4.3.55 B 号实例的 AVO 异常范围

第4章 参 考 文 献

1. 李庆忠,1993,走向精确勘探的道路——高分辩率地震勘探系统工程剖析,石油工业出版社.
2. 俞寿朋,1993,高分辩率地震勘,石油工业出版社.
3. 吴如山,(美)安艺敬一主编;李裕澈,卢寿德等译,1993,地震波散射与衰减(上),地震出版社.
4. 格劳尔等著,1987,地震岩性学,石油工业出版社.
5. 徐仲达,屠浩敏,邬庆良,1991,平面波反射系数与 AVO 技术,石油物探 No.3, 1—21
6. 徐仲达,邬庆良,屠浩敏,彭影彪,1993,AVO 技术在寻找薄油气层中的应用,石油物探,No.3, 1—13

7. 徐仲达,张登辉,1995,中原油田高速薄储层反射波振幅与偏移距的关系,同济大学学报,Vol.23,增刊,236—242

8. Banik N.C., Lerche, I., and Shuey, R.T., 1985, Stratigraphic filtering, Part I: Derivation of O'Doherty-Anstey formula: Geophysics, 50, 2678 - 2774

9. Ben-Menahem, A; and Singh, S.J., 1981, Seismic waves and Source, Spring-Verlag, New York, 840—915

10. Bortfeld, R., 1961, Approximations to the reflection and transmission coefficients of Plane longitudinal and tranverse waves: Geophysical prospecting, Vol.9, No.4

11. Frayer, G.J., 1978, Reflectivity of the Ocean Botton at Low frequency, J.Acous. Soc. Am. 63(1)

12. Görich, V., and Müller, G., 1987, Apparent and intrinsic Q: the one-dimensional case, J. Geophy. 61, 46—54

13. Kennett, B.L., 1975, The effect of attenuation on seismograms, Bull. Seism, Soc. Am, 65, 1643 - 1651

14. Kjartansson, E., 1979, Constant Q wave propagation and attenuation. J. Geophys. Res, 84, 4737 - 4748

15. Knopoff, L., 1964, Q, Rev. Goophy. 2, 625-659

16. Menke, W., and Dubendorff, B., 1985, Dicriminating intrisic and apparant attenuation in Layered rock, Geophy. Res. Lett. 12, 721 - 724

17. O'Doherty, R.F., and Austey, N.A., 1971, Reflection on amplitudes, Geophys. prosp. V.19, 430 - 458

18. Schoenberger, M., and Levin, F.K., 1974. Apparent attenuation due to intrabed multiples, Geophysics, V.39, 278 - 291

19. Ostrander, W.J., 1984, Plane - wave reflection coefficients for gas sands at nonnormal angles of incidence, Geophysics, Vol.49, No.10, 1637 - 1648

20. Schoenberger, M., and Levin, F.K., 1978, Apparent attenuation due to intrabed multiples, Ⅱ, Geophysics, 43, 730 - 737

21. Shuey, R.T., 1985, A simplification of the Zoeppritz equations, Geophysics, Vol, 50, No.4, 609 - 614

22. Spencer, T.W., Edwards, C.M., and Sounad, J.R., 1977, Seismic wave attenuation in nonresolvable cyclic stratificatin, Geophysics, Vol. 42, No.5, 939 - 949

23. Thomson, W., 1950, Transmission of elastic waves through a stratified Solid medium, J. Appl. phys. 21, 89 - 93

24. Jrorey, A.W., 1962, Theoretical seismograms with frequency and depth dependent obsorption. Geophysics, Vol. 34, 516 - 528

第5章　地球物理场反向外推与界面成像

5.1　前言

这一章的主要内容是讨论地震波和电磁波成像问题,也就是通常所称的偏移问题。有关这方面的内容已经有了大量的专著和译著出版。作者也于七年前写过一本专著(马在田,1989)。但是,自那以后,有关反射波成像问题又有了新的发展,特别是在三维地震观测数据的偏移方面已有很大的进展。实用的三维一步叠后偏移,包括三维一步叠后深度偏移都已有良好的处理方法和相应的软件,这些成果无论在地质效果和计算机应用效率方面都比原来的两步法要优越。在叠前时间偏移和深度偏移方面这几年有重要发展。另外,由于多分量地震观测的实验,要求对多分量地震反射成像的方法进行研究。在这方面我们也取得了一些成果。最近发展起来的电磁波偏移方法也很引人注目。因此,在这一章中将近几年来的新进展进行一个总结。也是对过去各种书籍中论述很少的那些内容进行充实。因此,这一章并不对全面的反射成像做论述。初学者可以参阅其它书籍。本章突出两个重点,一个重点是对近5年来在偏移成像方面的新进展进行论述,第二个重点是以我们的研究成果为主,同时介绍其它学者专家的优秀成果。具体地说,本节讨论四个内容,第一是叠后三维一步法时间和深度偏移成像问题;第二是叠前三维时间和深度偏移成像问题;第三是多分量地震记录的偏移成像问题;第四电磁波场的偏移成像问题。

在具体讨论各种方法原理与计算问题之前,我们还想谈一谈有关反射地震成像的研究现状和未来的发展问题。因为大约在十年前,很多人认为,偏移成像的问题都已解决了,至少是在理论上的问题都解决了,余下的问题是实用问题了。实际上偏移理论从70年代中期转到以波动方程为基础上来之后,对偏移的各种可能的理论准备似乎都进行过研究。无论是叠后偏移,还是叠前偏移,无论是时间偏移,还是深度偏移,到80年代中期,几乎都讨论过了。并且在实用中取得了非常大的成功。但是后来的实践证明,认为偏移成像理论研究已经到顶的想法是不符合实际客观规律的。事实上最近十年来,偏移方法和计算技术仍在不断地发展,其发展的趋势并不亚于此前的十年。这主要表现在三维地震工作的广泛开展,对三维地震偏移成像的计算方法和实现软件的要求越来越高。在复杂地质情况的地区,例如美国墨西哥湾的地区的构造成像,我国的古潜山内幕和多断裂地区,一般的水平叠加效果不好,影响到叠后偏移不能把复杂地质情况搞清楚。这样就涉及到先偏移后叠加的叠前偏移研究的发展。由于叠前地震波的射线穿过复杂地质体时路径的多变,因此,就要求建立一个具有控制性的速度模型。这样,建立在水平层状基础上的叠后偏移的速度模型就不能满足叠前偏移的需要。为此,与叠前偏移,特别是叠前深度偏移同时研究控制性的速度模型就非常必要了。如何建立能够使叠前深度偏移达到最佳成像的控制速度模型,基本上是从先验模型出发,通过偏移迭代来建立。在这方面有不少方法和计算的问题。因为迭代过程就是反复进行偏移速度分析的过程。所以计算工作量甚大。如何能够找到快速进行射线追踪的方法就提到议事日程中来了。这里,三维射线的追踪还有许多计算方法问题要加以解决。

此外,由于多分量地震观测的开展,对这样的地震数据如何进行偏移成像也提出来了。我们知道,在多分量地震记录的每个分量上都有不同的波型存在,其中既有纵波的反射,也

存在横波的反射。对多分量记录的偏移成像问题有两种观点。一种是直接用各个分量的记录进行全波场偏移成像，设想用弹性波振动的本构方程和运动方程联合进行逆时外推实现纵、横波同时偏移成像(Kuo,1983;牟永光,1983)。但是，这种方案，实现起来困难很多，况且这时要求准确地知道纵波速度和横波速度。而这些速度是难以予先正确给出的。它们也是要根据观测的实际地震记录才能求取的。不做波场分离，也就不能求出这些速度。另一种观点是对各个分量记录进行波场分离，取得单一波型的记录后再分别进行偏移处理。这就是对多分量地震记录在偏移前先进行波场分离，然后分别处理各种类型的反射波的偏移成像问题。在各向同性的条件下可以实现与单分量纵波地震偏移方法相当的各种偏移处理。其中较难的是转换波的偏移处理。在这方面，本书提出了自己的一些方法，它们在一定的条件下与纵波的偏移处理是等价的。

还有各向异性介质条件下的反射地震成像问题也提出来了。目前还没有用于实际。因为首先要确定各向异性系数。这又是一个需要研究的问题，特别是在复杂的地质情况下，各向异性的测定就是一个研究的大问题。

展望未来，反射地震的成像问题仍然是一个需要深入开展研究的课题。因为地球内部成像是一个永久性的问题，而且会越来越精细。目前的横向分辨率，偏移过程的振幅和波形的保真度还要改善，因为垂向分辨率及岩性、岩相、孔隙度、裂隙密度乃至流体含量等都是必须在保真度很高的偏移成像的基础上进行研究的。所以，在未来，当然，今天已经开始，振幅-频率-波形的高保真度的偏移方法必定是今后的研究重点。电磁波偏移解决地电分界面和分层电阻率问题已提到议事日程。

5.2 三维叠后时间偏移和深度偏移

在《地震成像技术》(马在田,1989)一书中曾专门有一章论述三维偏移。在那里，论述三维偏移的内容，主要是理论上的。能够实用的当时只有两步法和15°方程的有限差分法。当然用F-K方法和积分法可以进行三维偏移。但用有限差分法进行仍然是大家追寻的目标。这是80年代初、中期的事。以后国内外学者、专家(王振华,1991; D. Hale, 1991; Jin Shengwen, 1993; 金胜汶, 1995)陆续推出可实用的三维一步法偏移。这些三维一步法偏移在计算精度上远优于两步法。在计算效率上也不比两步法差，用机时间相对少。但是，直至1993年使用者还认为三维一步法的偏移结果并不比两步法高明，用机时间比两步法多很多(熊翥,1993)。我想这是某种方法或软件的问题，而非三维一步法偏移问题。因为我们已经从理论上证明了，两步法只有在常速介质，即均匀介质中，它才与一步法偏移等价。速度有任何变化都是不允许的。在倾角为45°的情况下相对速度$\triangle v/v=0.01$，即1%的误差时，引起偏移成像时间的相对误差等于1%。在变速介质中，进行45°倾角的反射偏移，速度随深度变化的比值$\triangle v/v$远远超过10%以上。因此，在大倾角情况下，两步法肯定是不能正确偏移的。

随着一步法三维叠后偏移的成功，叠后三维深度偏移的问题也提出来了。这个问题在80年代初就提出来了。深度偏移的必要性首先是Hubral提出了成像射线的观点(Hubral, 1978)，在Hubral之后，K. Larner提出了深度偏移的思路(Larner, 1980, Sherwood, 1980)。深度偏移之所以必要，是由于反射波射线经过倾斜界面的折射后使成像射线到达地面时不位

于反射点的正上方，而是向倾斜界面的上倾方向移动。移动的大小服从射线的 Snell 定律，与界面倾角的大小和层速度值的变化有关。因此，时间偏移可以认为是使衍射波成像，因为反射波成像可以看做是衍射波成像的叠加结果，深度偏移除了完成使衍射成像的作用外，在成像过程中还要不断地根据速度场模型进行地震波射线的折射校正。因此，深度偏移多一项处理步骤。

关于时间偏移与深度偏移对速度模型的适应性问题，也就是说在什么条件下时间偏移的结果是正确的？有人认为时间偏移总归不如深度偏移正确。这是不确切的。如果速度模型满足时间偏移的要求，则时间偏移和深度偏移一样正确。深度偏移方程在一定条件下可以退化为时间偏移方程。这时二者的结果完全一致。这个条件就是速度模型。我们过去谈偏移一般不谈它应当满足什么样的速度模型。是不是有意隐瞒？不是的，是认识的问题。现在我们可以告诉大家，要想时间偏移取得正确的结果，它的速度模型（偏移成像的界面以上的速度）只能是水平层状的，或者每层在水平方向是逐渐缓慢变化的。至于被偏移界面的倾角大小可以是任意的。如果这个条件不满足，如在水平方向上速度有剧烈的变化，这对应地质上的大断层，盐丘边缘，古潜山界面，则它们下面的反射用时间偏移将不能得到正确的结果。这时只能用深度偏移。因此，不是任何情况下都需要进行深度偏移的。不过，在复杂地质区域做深度偏移是十分必要的。

5.2.1 三维叠后时间偏移

和二维情况一样，三维偏移的步骤分为两步，第一步是将地面的三维水平叠加后的反射波场向上行波的反方向外推到地下的各个深度上。延拓到产生反射波的最深层的深度上为止。第二步是从各个深度上的波场中提取偏移成像的波场值，组成偏移成像剖面。由于第二步的工作只是在第一步的延拓波场中提取成像点之值，工作较单一，且工作量很少，故在讨论三维偏移方法和计算过程时常常将其忽略，而重点讨论地震波场反向外推问题。但是，第二步的工作是不能不做的。不进行第二步工作就不能完成偏移成像的目的。

首先讨论三维地震波场反向外推的问题。对单分量纵波反射的自激自收的地震波或水平叠加后的地震记录，可用下列波动方程表示

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{4}{v^2(x,y,z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5.2.1}$$

上式中时间 t 的二阶导数前的系数是根据爆炸反射面的观点由 1 变为 4 的（Lowenthal, 1976)。(5.2.1)方程当给出初值条件 $u|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ 和 $\partial u/\partial z|_{Z=0}=\psi(x_0,y_0,t)$ 则提出的 Cauehy 问题是适定的，可求出古典解。实际上这是一个描述波离源向外传播的物理过程。这个过程是可以实现并被观测到的。

我们从偏移的观点提出的问题是，用(5.2.1)式求波场的反向传播，而给定的边界条件是地面上观测的波场，即 $u(x,y,z=0,t)=\psi(x,y,t)$。这样的边值问题是不适定的，也不是能实现的物理过程。但是，这个问题的解是有物理意义的。为了解这个问题，计算地球物理学家从实践中找到了两种方法，以解决这样的实际问题。第一个就是将方程中所含有的两个方向的行波的方程分离开来。在我们的情况下就是把方程式(5.2.1)分解为上行波和下行波。我们感兴趣的是上行波，即反射波的传播方程，其在频率波数域的表示式为

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\mathrm{i}\omega}{v}\left[1-\frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2+k_y^2)\right]^{1/2} \tag{5.2.2}$$

这个方程经过 Pade 展开并做反傅氏变换回到时间－空间域可得到任意阶的(5.2.1)式的逼近方程。在浮动坐标系中(Claerbout, 1976)上式表示为(马在田,1993)

$$\sum_{j=1}^{r}a_j\left(\frac{\partial^n u}{\partial t^l\partial x^k\partial z}+\frac{\partial^n u}{\partial t^l\partial y^k\partial z}\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial^n u}{\partial t^m\partial x^q}+\frac{\partial^n u}{\partial t^m\partial y^q}\right)=0 \tag{5.2.3}$$

式中　n 为方程的最高阶数；

$j=1,2,3...,r$　($r=n+1/2$,当 n 为奇数时;$n=n/2$,当 n 为偶数时);

$l=n-1,n-3,n-5,\cdots,r$;

$k=0,2,4,\cdots,r$;

$j=1,2,3,\cdots,s$　$(s=n-r)$;

$m=1,3,5,\cdots$　(当 n 为奇数时)或 $m=0,2,4\cdots$　(当 n 为偶数时);

$q=2,4,6,\cdots$;

a_j 和 b_j 为系数。

由(5.2.3)式高阶逼近的波动方程与地面观测地震记录组成的边界条件形成一个特别的边值问题。此时求解的目的是反向外推出下半空间(取 $+z$ 方向)的波场。这类问题的适定性尚无理论证明。但通过实际计算已取得很好的收敛性和稳定性。用理论和实际数据均已证明这样的计算问题是可解的。在计算地球物理中称之为地震波场的深度外推,可用于反射波界面成像。

另外还有一种波场反向外推的计算问题,是用(5.2.1)式的三维波动方程和地面的地震反射记录 $\psi(x,y,z=0,t)$的边界条件组成的求解问题。如果我们将这个问题化为 $t=t_{max}$ 时的初值问题,即取 $u(x,y,z=0,t)|_{t=t_{max}}=\psi(x,y,z=0)$或 $u(x,y,z\neq0,t)|_{t=t_{max}}=0$,和 $\partial u(x,y,z=0,t)/\partial t|_{t=t_{max}}=\partial\psi/\partial t$。进行逆时方向的波场外推计算,则此时相当于以 t_{max} 为时间原点向 t 减小方向的初值问题求解。因此,这类问题的提法是适定的。实际的计算表现为收敛性和稳定性良好。这样的求解问题称之为逆时波场外推,也可用于反射波界面成像。

1. 阶数分裂法三维叠后时间偏移的算法

三维叠后偏移方法有多种具体计算方案。其中比较好的方法,我们认为是单程波的分裂方法。单程波的分裂方法有两类,一类是阶数分裂法,一类是降阶法。

(1) 三阶分裂方程的计算方法

用阶数分裂后的三阶微分方程做波场延拓计算,可用于三维叠后地震数据的偏移成像处理。当我们计算二阶分裂方程时,所用的差分格式在时间 t 和深度 $z(\tau)$上为两层,在 x 和 y 方向上为三层的隐格式。三阶方程中差分格式在时间上也需三层。因为对时间有二阶导数。在差分格式建立前,我们将 z 变为 τ,则用 $\partial/Oz=(2/v)(\partial/\partial\tau)$,则分裂后的三阶微分方程为(马在田,1989)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2\partial\tau}+av^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau}+bv^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{5.2.4}$$

对上式中空间二阶导数项,我们采取一种递归技巧表示(Claerbout, 1985)为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=\frac{\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}}{1+\beta\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}\right)} \tag{5.2.5}$$

将(5.2.5)式代入(5.2.4)式中,得

$$\left[1+\beta\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2\partial\tau}+a_1 v^2\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$+b_1 v^2\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{5.2.6}$$

式中　a_1 和 b_1 为系数;δ_{xx}和δ_{yy}表示 x 和 y 方向上的二阶差分。

令离散值的顺序表示为

$$u_{i,j}^{n,k}=u(i\Delta x,j\Delta y,n\Delta\tau,k\Delta t)$$

则各个导数的差分表示式为

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial z}=\frac{1}{\Delta\tau}\cdot\frac{1}{\Delta t^2}[u_{i,j}^{n+1,k+1}-2u_{i,j}^{n+1,k}+u_{i,j}^{n+1,k-1}-u_{i,j}^{n,k+1}+2u_{i,j}^{u,k}-u_{i,j}^{n,k-1}] \tag{5.2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\Delta t}(u_{i,j}^{n+1,k+1}-u_{i,j}^{n+1,k-1}+u_{i,j}^{n,k+1}-u_{i,j}^{n,k-1}) \tag{5.2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{1}{\Delta\tau}(u_{i,j}^{n+1,k}-u_{i,j}^{n,k}) \tag{5.2.9}$$

将(5.2.7)式,(5.2.8)式和(5.2.9)式代入(5.2.6)式中,得

$$\frac{1}{\Delta t^2\Delta\tau}[I-\beta(T_x+T_y)](u_{i,j}^{n+1,k+1}-2u_{i,j}^{n+1,k}+u_{i,j}^{n+1,k}+u_{i,j}^{n+1,k-1}-u_{i,j}^{n,k+1}$$
$$-2u_{i,j}^{n,k}-u_{i,j}^{n,k-1})+\frac{a_1 v^2}{\Delta\tau^2}\left(\frac{T_x}{\Delta x^2}+\frac{T_y}{\Delta y^2}\right)(u_{i,j}^{n+1,k}-u_{i,j}^{n,k})-\frac{b_1 v^2}{4\Delta t}\left(\frac{T_x}{\Delta x^2}+\frac{T_y}{\Delta y^2}\right)$$
$$(u_{i,j}^{n+1,k+1}-u_{i,j}^{n+1,k-1}+u_{i,j}^{n,k+1}-u_{i,j}^{n,k-1})=0 \tag{5.2.10}$$

式中　$T_x=(-1,2,-1)$差分算子;$I=(0,1,0)$单位算子;$T_y=(-1,2,-1)$。

上式进一步整理后,得

$$[I+(\alpha_x-\beta)T_x+(\alpha_y-\beta)T_y](u_{i,j}^{n+1,k+1}-u_{i,j}^{n,k+1})=[I-(\alpha_x+\beta)T_x-(\alpha_y+\beta)T_y]$$
$$(u_{i,j}^{n,k-1}-u_{i,j}^{n+1,k+1})+2[I-(\gamma_x+\beta)T_x-(\gamma_y+\beta)T_y]\cdot(u_{i,j}^{n+1,k}-u_{i,j}^{u,k}) \tag{5.2.11}$$

式中　$\beta=1/6$;

$$\alpha_x=b_1 v^2\Delta t\Delta\tau/4\Delta x^2;$$
$$\alpha_y=b_1 v^2\Delta t\Delta\tau/4\Delta y^2;$$
$$\gamma_x=a_1 v^2\Delta t^2/\Delta x^2;$$
$$\gamma_y=a_1 v^2\Delta t^2/\Delta x^2。$$

将(5.2.11)式中的系数矩阵写成因子分解形式后,可表示为

$$[I+(\alpha_x-\beta)T_x][I+(\alpha_y-\beta)T_y](u_{i,j}^{n+1,k+1}-u_{i,j}^{n,k+1})$$
$$=[I-(\alpha_x+\beta)T_x][I-(\alpha_y+\beta)T_y](u_{i,j}^{n,k-1}-u_{i,j}^{n+1,k+1}$$
$$+2[I-(\gamma_x+\beta)T_x][I-(\gamma_y+\beta)T_y](u_{i,j}^{n+1,k}-u_{i,j}^{n,k}) \tag{5.2.12}$$

用(5.2.12)式代替(5.2.11)式的条件是丢弃$(\beta-\alpha_x)(\beta-\alpha_y)T_xT_y$ 项,这是一个四阶精度项,

对差分方程的二阶精度无影响。但是,用(5.2.12)式进行波场反向外推要比用(5.2.11)式方便得多。实际上(5.2.11)式基本无法运算。本项偏移方法的计算步骤如下。

第一步,计算 $f_{i,j}^{(1)} = u_{i,j}^{n,k-1} - u_{i,j}^{n+1,k+1}$ 和

$f_{i,j}^{(2)} = 2(u_{i,j}^{n+1,k} - u_{i,j}^{n,k})$

第二步,计算 $Q_{i,j}^{(1)} = [I-(\alpha_y+\beta)T_y]f_{i,j}^{(1)}$和

$Q_{i,j}^{(2)} = [I-(\gamma_y+\beta)T_y]f_{i,j}^{(2)}$

第三步,计算 $P_{i,j}^{(1)} = [I-(\alpha_x+\beta)T_x]Q_{i,j}^{(1)}$和

$P_{i,j}^{(2)} = [I-(\gamma_x+\beta)T_x]Q_{i,j}^{(2)}$

第四步,计算 $R_{i,j}^{n,k} = P_{i,j}^{(1)} + P_{i,j}^{(2)}$

第五步,计算 $u_{y\,i,j}^{n,k} = R_{i,j}^{n,k}/[I+(\alpha_y-\beta)]T_y$

第六步,计算 $u_{x\,i,j}^{n,k} = u_{y\,i,j}^{n,k}/[I+(\alpha_x-\beta)]T_x$

最后结果为 $u_{i,j}^{n+1,k-1} = u_{x,i,j}^{n,k} + u_{i,j}^{n,k+1}$

用一个三阶三维分裂方程,可获得45°以下倾角的构造的正确偏移。如果合理地改变系数,适应的倾角范围还可大。如果地质构造的倾角超过45°,通过改变系数仍不能得到好的偏移结果时,还可以进行第二个45°方程的串联外推地震波场。此时,能适应的地层倾角可达到70°。如果要用二阶分裂方程处理具有70°倾角的地质构造的偏移问题,则需要四个二阶分裂方程的串联使用,即在每个延拓步长上连续使用四个二阶方程的波场外推计算。因此,使用三阶分裂方程在计算效率上会比使用二阶分裂方程有明显提高。

(2) 降价法

下面来谈谈另外一种解三阶分裂方程的方法。三阶方程(5.2.4)式写成频率－波数域的形式可表示为

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \mathrm{i}\omega \frac{\frac{bv^2}{\omega^2}(k_x^2+k_y^2)}{1-\frac{av^2}{\omega^2}(k_x^2+k_y^2)}\tilde{u} \tag{5.2.13}$$

现在我们令

$$\tilde{Q} = \frac{bv^2(k_x^2+k_y^2)}{\omega^2 - av^2(k_x^2+k_y^2)}\tilde{u} \tag{5.2.14}$$

则(5.2.13)式可写为

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = -\mathrm{i}\omega\tilde{Q} \tag{5.2.15}$$

再将(5.2.15)式和(5.2.14)式经过傅立叶反变换回到时间－空间域,则得到下面的联合方程组

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \tag{5.2.16a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + av^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + bv^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{5.2.16b}$$

在同一延拓层$\triangle\tau$内联合求解波场u,即可实现三阶分裂方程的波场反向外推计算。计算的顺序,理论上是先计算(5.2.16a)求出中间波场Q后,再用(5.2.16b)计算出本延拓深度上的波场u。但是,实用上是先用(5.2.16b)式求出u后再计算全过程。

有关差分方程的建立和算法阐述如下。离散化后的波场表示为

$$u_{i,j}^{n,k}=u(i\Delta x,j\Delta y,n\Delta\tau,k\Delta t)$$

用 δ_{xx}表示 x 方向的二阶差分，δ_{yy}表示 y 方向上的二阶差分，δ_{τ} 表示 τ 方向向前一阶差分，δ_{t} 表示时间上的向前一阶差分，$\delta_{\tau t}$表示对 τ 的一阶差分和对 t 的一阶差分。仍然采用 24 点中心差分格式，差分中心点为$(i,j,n+(1/2),k+(1/2))$，(5.2.16a)的差分方程为

$$Q_{i,j}^{n+\frac{1}{2},k}=Q_{i,j}^{n+\frac{1}{2},k+1}-\frac{\Delta t}{2\Delta\tau}[u_{i,j}^{n+1,k+1}-u_{i,j}^{n,k+1}+u_{i,j}^{n+1,k}-u_{i,j}^{n,k}] \tag{5.2.17a}$$

(5.2.16b)的差分方程可表示为

$$\frac{1}{\Delta\tau\Delta t}\delta_{\tau t}u_{i,j}^{n+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}+av^2\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}\right)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$$
$$+bv^2\left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2}+\frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2}\right)Q_{i,j}^{n+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}=0$$

引入差分算子 $I=(0,1,0)$和 $T=(-1,2,-1)$，则上式可表示为

$$(I-\alpha_xT_x-\alpha_yT_y)(u_{i,j}^{n+1,k+1}+u_{i,j}^{n,k})-(I+\alpha_xT_x+\alpha_yT_y)$$
$$\times(u_{i,j}^{n+1,k}+u_{i,j}^{n,k+1})+(I+\gamma_xT_x+\gamma_yT_y)Q_{i,j}^{n+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}=0 \tag{5.2.17b}$$

式中

$$\alpha_x=av^2\Delta\tau\Delta t/\Delta x^2;$$
$$\alpha_y=av^2\Delta\tau\Delta t/\Delta y^2;$$
$$r_x=(4b/a)\alpha_x;$$
$$r_y=(4b/a)\alpha_y。$$

为了实际计算的方便，我们在系数项中分别加入 $\alpha_x\alpha_yT_xT_y$ 差分算子项和 $r_xr_yT_xT_y$ 差分算子项。这些加进去的差分算子项具有 4 阶计算精度，因此不影响计算结果的精度，而计算上的方便则是显而易见的。

从(5.2.17b)式可求出计算延拓波场的三维公式为

$$u_{i,j}^{n+1,k}=\frac{(I-\alpha_xT_x)(I-\alpha_yT_y)}{(I+\alpha_xT_x)(I+\alpha_yT_y)}(u_{i,j}^{n,k}+u_{i,j}^{n+1,k+1})$$
$$+\frac{(I+\gamma_xT_x)(I+\gamma_yT_y)}{(I+\alpha_xT_x)(I+\alpha_yT_y)}Q_{i,j}^{n+1/2,k+1/2}-u_{i,j}^{n,k+1} \tag{5.2.17c}$$

(5.2.17c)式又是可以用维数分裂法进行计算的公式。上式与(5.2.17a)联合求解。求解开始时由于没有下一个深度层的波场值 $u(\Delta\tau)$，因此，无法用(5.2.17a)式求出 Q。为此，要用(5.2.17c)式先求出 $u(\Delta\tau)$之值。此时由于 Q 未知，故只好令其为零。这样(5.2.17c)式实际上就变成一个 15°方程。用 15°方程求出第一个深度上的波场值 $u(\Delta\tau)$，则用(5.2.17a)求出适用于这一层的辅助波场值 Q。理论上，求出 Q 后还应当用(5.2.17c)式再求波场 u，这才是我们要计算的结果。但是，这样一来，工作量就会增加。如果不这样做，两个差分方程的中心就不重合，这会引起误差。这就是该方法的不足之处。一般情况下还是可以采用的，特别是延拓层间隔不大时误差不会太大。本方法的优点与上面方法相比，在同一倾角和精度要求一样的条件时计算速度相对快些。因此，我们在实际应用中取得了良好的效果。比两步法三维偏移的效果有明显的优越性。图 5.2.1 是一步法三维叠后偏移剖面和两步法三维叠后偏移剖面的比较。图 5.2.1a 是用美国 Western Geoghysical 公司的两步法三维偏移软件处理后的剖面。图 5.2.1b 是用上述优化系数后的三阶方程的替换函数的求解方法得到

的一步法三维偏移后的同一条地震剖面。从二者对比中可以看到,一步法三维偏移的剖面,无论从信噪比、衍射波的收敛,还是从地质构造现象的清楚、明确程度来分析,一步法远比两步法三维偏移要优越得多。图 5.2.2 是这两种方法的三维偏移数据体的一个三维切片的对比图。图 5.2.2a 是两步法偏移的时间切片图。图 5.2.2b 是一步法偏移时间切片图。从两个时间切片图的对比也可以看出,二者在构造和断层处的清晰度方面的差异。

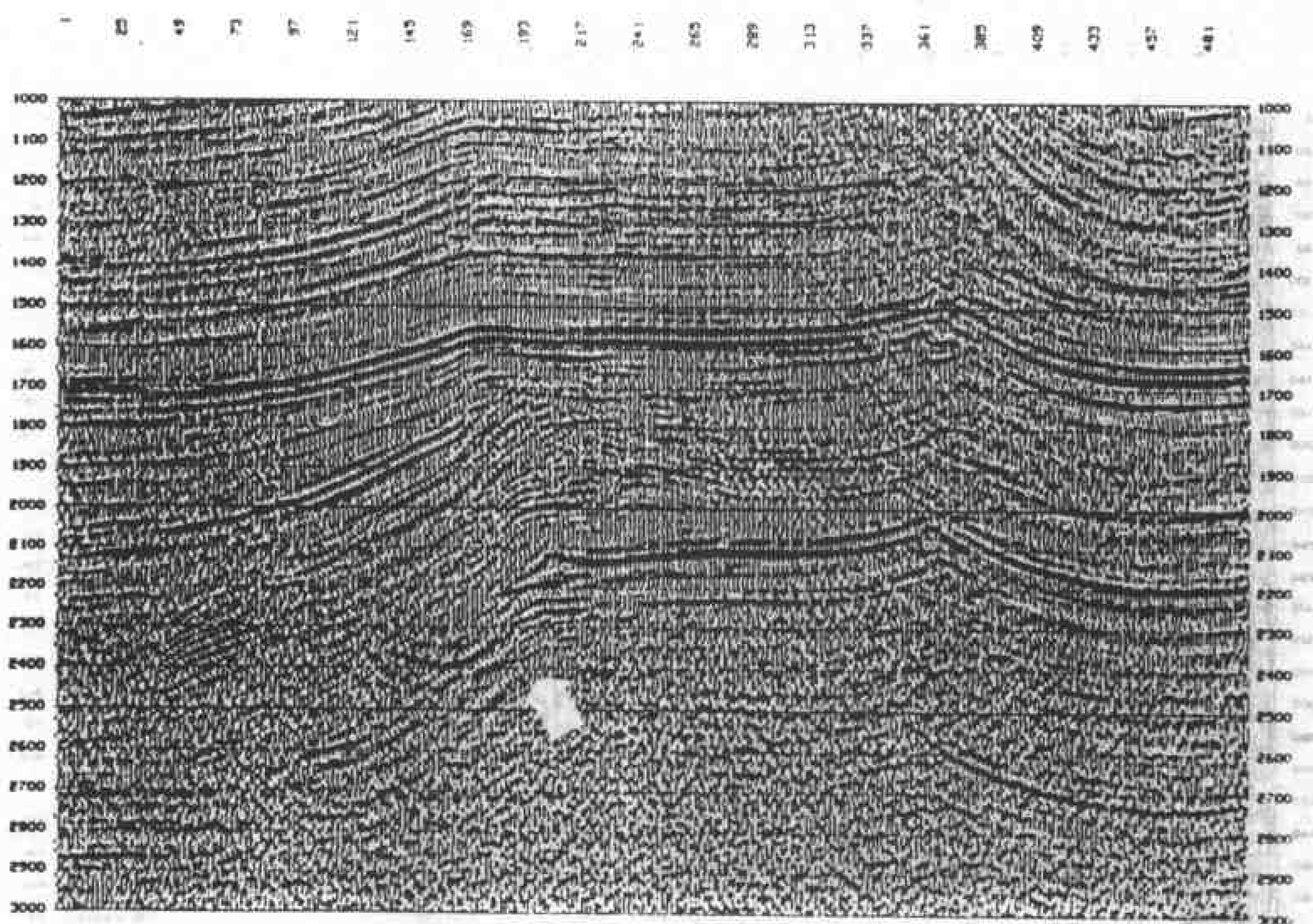
2. 全倾角叠后三维时间偏移方法

上面阐述的叠后三维偏移的方法都是建立在单程波基础上的。它们都有倾角限制问题,虽然已经可以实现任何大的倾角的偏移问题,但要求较多的计算机工作量。因此,研究无倾角限制的三维偏移方法仍然是吸引人的。所谓全倾角就是在偏移的波场反向外推中使用原始的纵波波动方程,而不是它的上行波逼近式。当然,这在理论上是否行得通无法事先推断,而是从实践中提出并在应用时验证的方法。这些方法今天从理论上来分析,它们能够进行地震波场的稳定外推也是符合数学上基本要求的。这就是通过坐标变换把双曲型偏微分方程变成类抛物型的偏微分方程,使求解问题变为适定的,或者用波动方程的原形式,同时将它变为逆时的初值问题,因而也是适定的。下面介绍这两类方法

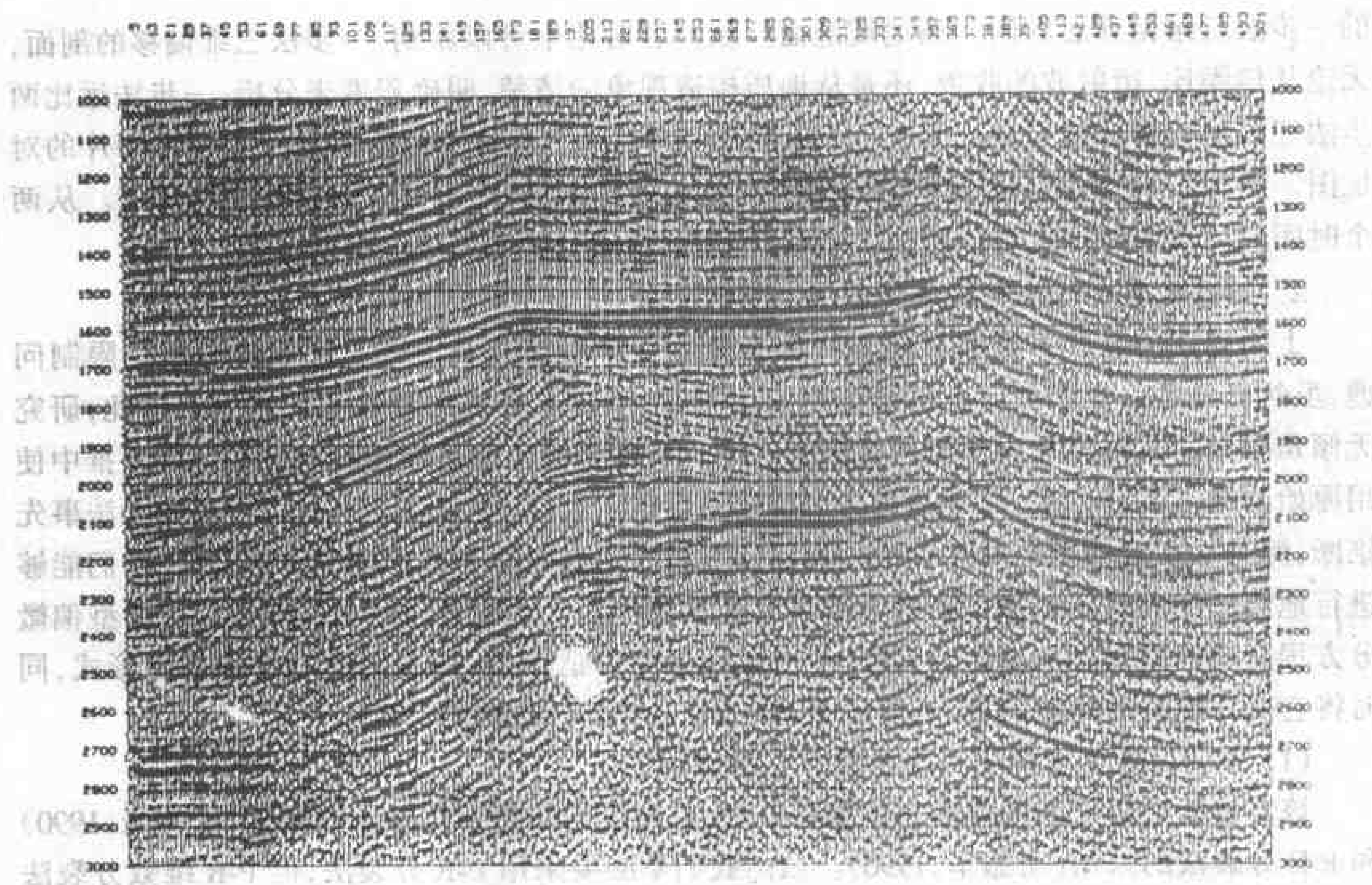
(1) 方向导数法全倾角一步法叠后三维偏移

该方法能够用于实际叠后三维偏移处理,首先应当归功于方向导数概念(张关泉,1990)和 P-R 分裂法的采用(王振华,1990)。虽然我们不必要采用 P-R 分裂法,但 P-R 维数分裂法的引入还是有一定的历史功绩的。

我们知道,在 Claerbout 浮动坐标系中,三维波动方程表示为



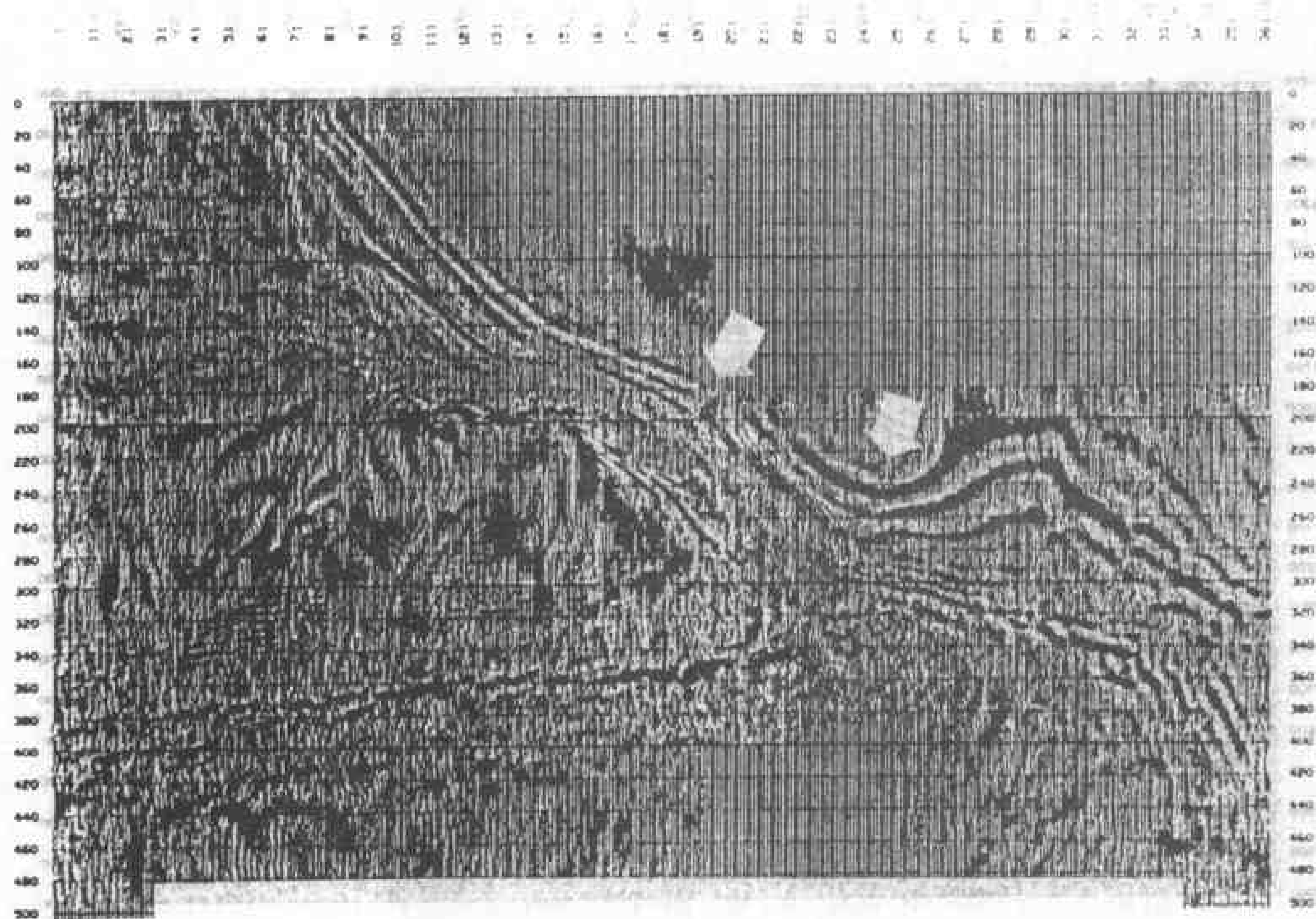
(a)



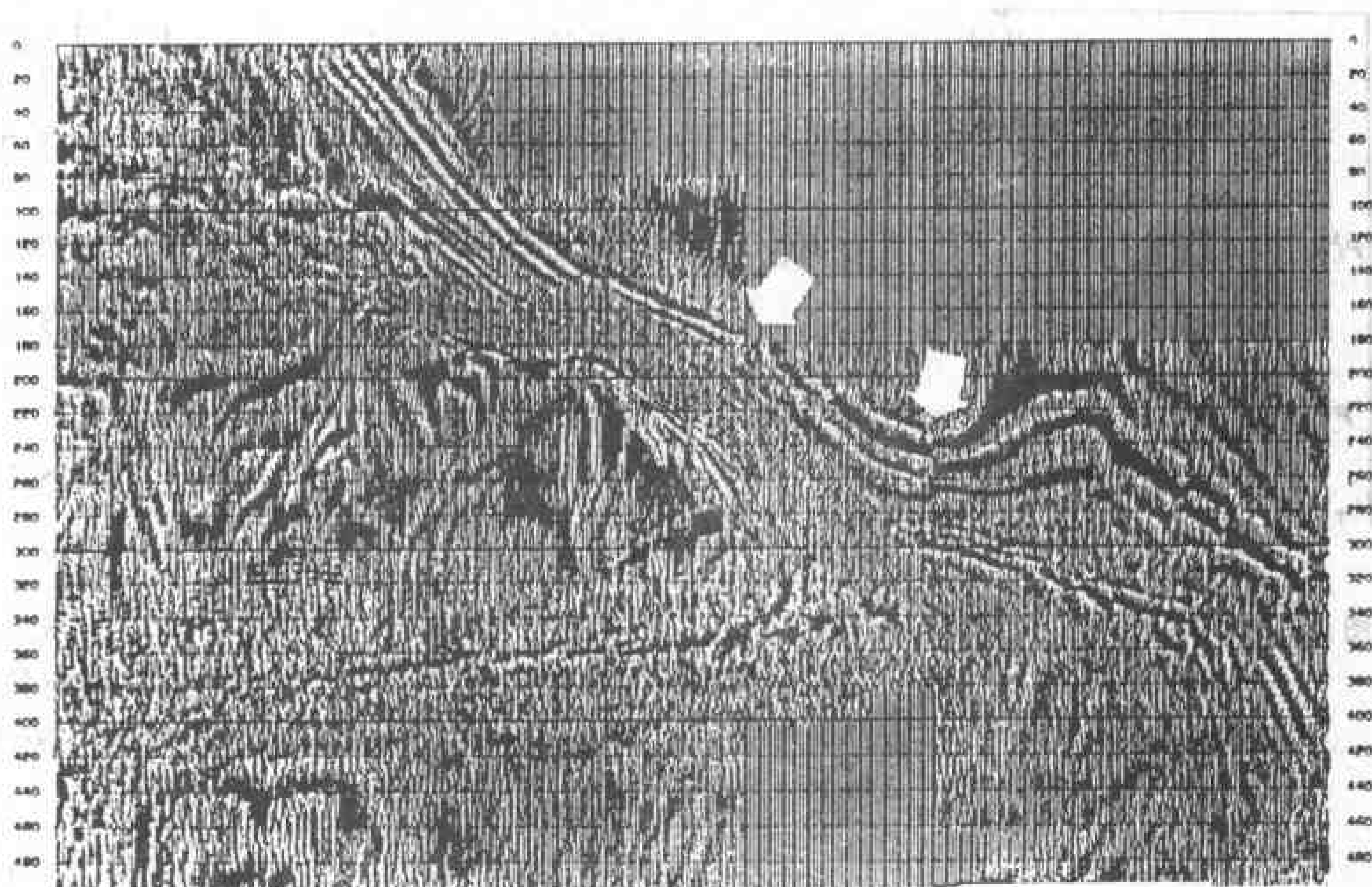
(b)

图 5.2.1 三维叠后偏移剖面图的对比

(a) 两步法三维偏移；(b) 一步法三维偏移



(a)



(b)

图 5.2.2 三维叠后偏移时间切片图

(a) 两步法三维偏移；(b) 一步法三维偏移

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{v^2}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \tag{5.2.18}$$

若略去 $\partial^2 u/\partial \tau^2$ 项，即可得 15°偏移方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{v^2}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \tag{5.2.19}$$

这个方程在波场向深度方向外推计算中是稳定和收敛的，也就是数学上是适定的问题。由此，我们可以设想，如果将(5.2.18)式化为(5.2.19)形式，则是可以稳定计算的。这个问题在二维偏移中已被提了出来，并找到了 45°坐标变换法(李志明，1988)。李志明的 45°坐标变换法虽然能使方程稳定计算，且无倾角限制，但计算量增加一倍。因此，对实用来说是不够理想的。而方向导数法既能使(5.2.18)式变为 15°方程那样的形式，又可以使计算量保持在用 15°方程的水平。因此，采用这个方法对实际地震反射资料进行处理非常方便。

如果我们引入方向导数，即

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{5.2.20}$$

则(5.2.18)式可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t' \partial \tau} + \frac{v^2}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \tag{5.2.21}$$

它与(5.2.19)式在形式上是一致的。但坐标系已经不同了。在新的坐标系中 $\Delta\tau$ 的大小不

变，只是差分网格向 $+\tau$ 方向倾斜，这个倾斜度为 $\Delta t/2\Delta\tau$，如图 5.2.3 所示。

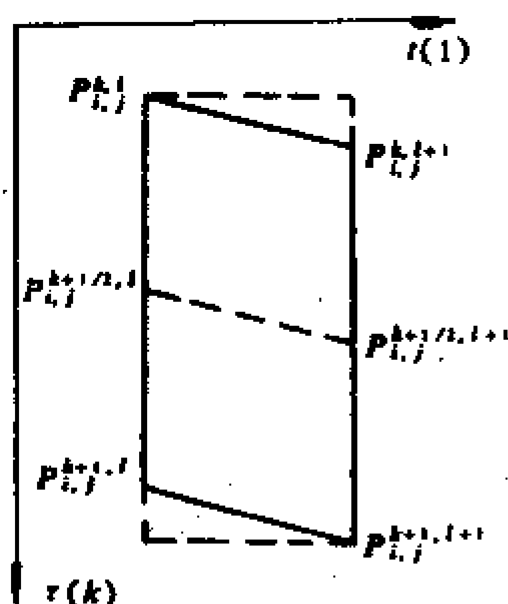


图 5.2.3 采用方向导数后的平行四边形的差分网格（$\beta=\Delta t/2\Delta\tau$）

这时各个网格点的坐标表示为

$$u_{i,j}^{n+1,k+1}=u\left[i\Delta x,\ j\Delta y,\ \left(n+\frac{1+\beta}{2}\right)\Delta\tau,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right] \tag{5.2.22a}$$

$$u_{i,j}^{n+1,k}=u\left[i\Delta x,j\Delta y,\left(n+\frac{1-\beta}{2}\right)\Delta\tau,\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right] \tag{5.2.22b}$$

$$u_{i,j}^{n,k+1}=u\left[i\Delta x,j\Delta y,\left(n-\frac{1-\beta}{2}\right)\Delta\tau,\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right] \tag{5.2.22c}$$

$$u_{i,j}^{n,k}=u\left[i\Delta x,j\Delta y,\left(n-\frac{1+\beta}{2}\right)\Delta\tau,\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right] \tag{5.2.22d}$$

在这样的网格中(5.2.21)式可以对深度 τ 进行维数分裂。同样也可以对时间 t 进行维数分裂，二者的分裂结果是一样的。这时(5.2.21)式可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'\partial\tau}+\frac{v^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{5.2.23a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'\partial\tau}+\frac{v^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{5.2.23b}$$

分裂后的两方程差分格式是大家所熟知的，因为它们是两个 15°方程的形式。我们将 $\partial^2 u/\partial\tau\partial t'$ 用差分表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'\partial\tau}=\frac{1}{\Delta t\Delta\tau}\left(u_{i,j}^{n+1,k+1}-u_{i,j}^{n+1,k}+u_{i,j}^{n,k+1}-u_{i,j}^{n,k}\right) \tag{5.2.24}$$

而 $\partial^2/\partial x^2$ 用 $\delta_{xx}/\Delta x^2$ 表示和 $\partial^2/\partial y^2$ 用 $\delta_{yy}/\Delta x$ 表示，因此求得(5.2.23)式的差分方程的计算式为

$$u_{i,j}^{n+1,k}=\frac{I-\alpha_y T_y}{I+\alpha_y T_y}\left(u_{i,j}^{n,k}+u_{i,j}^{n+1,k+1}\right)-u_{i,j}^{n,k+1} \tag{5.2.25a}$$

式中　$T_y=(-1,2,-1)$差分算子。

最终的结果用下式求出

$$u_{i,j}^{n+1,k}=\frac{I-\alpha_x T_x}{I+\alpha_x T_x}\left(u_{y\,i,j}^{n,k}+u_{i,j}^{n+1,k+1}\right)-u_{y\,i,j}^{n,k+1} \tag{5.2.25b}$$

式中

$$T_x=(-1,2,-1)$$
$$\alpha_x=v^2\Delta t\Delta\tau/32\Delta x^2;$$
$$\alpha_y=v^2\Delta t\Delta\tau/32\Delta y^2。$$

这样，就可以进行维数上的分裂计算。不过计算中所用的差分网格为斜形的平行四边形，如图 5.2.4 所示。

本方法除了差分网格需要斜形的之外，其它计算都与 15°方程相当。因此效率是比较高

的。但有两个较大的缺陷。第一,由于我们只知道 $\tau=0$ 上的地面记录,并不能给出初始斜网格上的波场值。因此,常常要用其它方法外推一步再内插求得。如果用15°方程外推一步,则用本方程编制的软件即可使用。但是,这对大倾角来说仍是有误差的。很多人认为这不影响精度,理由是浅层界面比较平缓。这种观点是不正确的。因为,延拓计算不只是对浅层,深层大倾角地层的反射经过15°方程延拓这一步精度就降低了。所以,这是一个不可弥补的缺陷。另一个缺陷就是倾斜网格对同一延拓层来说速度是变的,要通过变速安排来解决,不如垂直网格那样方便。所以说这个缺陷是可以弥补的。

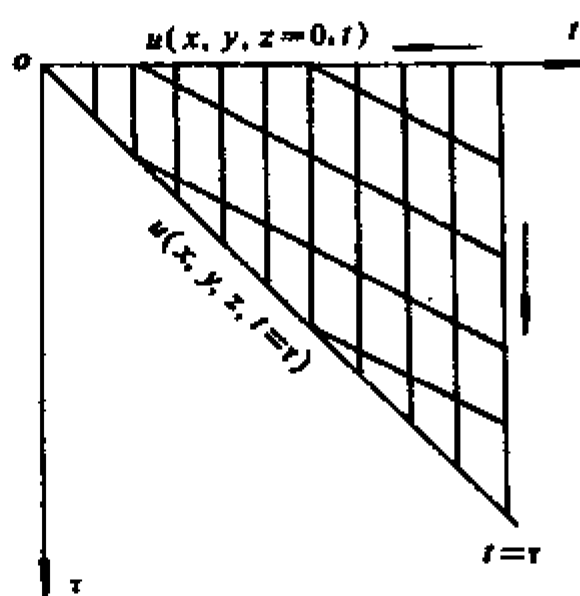


图 5.2.4 方向导数法的差分网格

尽管有上述不足,用一步法进行三维偏移的结果,还是比两步法的三维偏移结果好。如图5.2.5所示,其中的图a为两步法偏移结果,图b是用方向导数的一步法进行三维偏移的结果。两图相比,方向导数一步法三维偏移的剖面上的断层反射归位是清楚而合理的,位置是准确的。

(2) 时间方向分裂的叠后三维偏移

我们叙述过的阶数分裂法是在深度 z 方向上的分裂。现在我们为了使用纵波方程本身,又想使计算方便,我们想将方程(5.2.18)式在时间方向上进行分裂,组成方程组进行实际计算。关于时间步上的二维波动方程的分裂方法原理已有介绍(马在田,1989),现在我们对(5.2.18)式进行时间上的分裂,可得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \tau}+\frac{v^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{5.2.26a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \tau}+\frac{v^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{5.2.26b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \tau}=0 \tag{5.2.26c}$$

上面三个方程可以分别计算,前一个方程计算输出的结果作为下一个方程数据的输入。第三个方程的计算结果即为该延拓层的最终计算结果。(5.2.26a)和(5.2.26b)的差分方程与(5.2.25a)和(5.2.25b)完全一致。(5.2.26c)的差分式为

$$u_{i,j}^{n,k}=u_{i,j}^{n+1,k+1}-\frac{1-\gamma}{1+\gamma}(u_{i,j}^{n+1,k}-u_{i,j}^{n,k+1}) \tag{5.2.27}$$

式中 $u_{i,j}^{n,k}=u(i\Delta x,j\Delta y,n\Delta\tau,k\Delta t)$;

$\gamma=\Delta t/2\Delta\tau$。

此方法与上述方法最明显的不同之处是,反向外推时要沿时间层作逆时外推,也就是大家常说的逆时偏移。因为只有逆时外推,计算过程才是稳定的。这与我们前面讨论的适定性有关。

本方法经过实际地震资料处理(孙建国等,1995),证明具有较好的实用效果。本方法与方向导数法相比较,它无须借助其它方法完成第一步延拓层的计算。因此说本方法在理论上是完善的。它不失为是一种有效的全倾角时间偏移的算法。

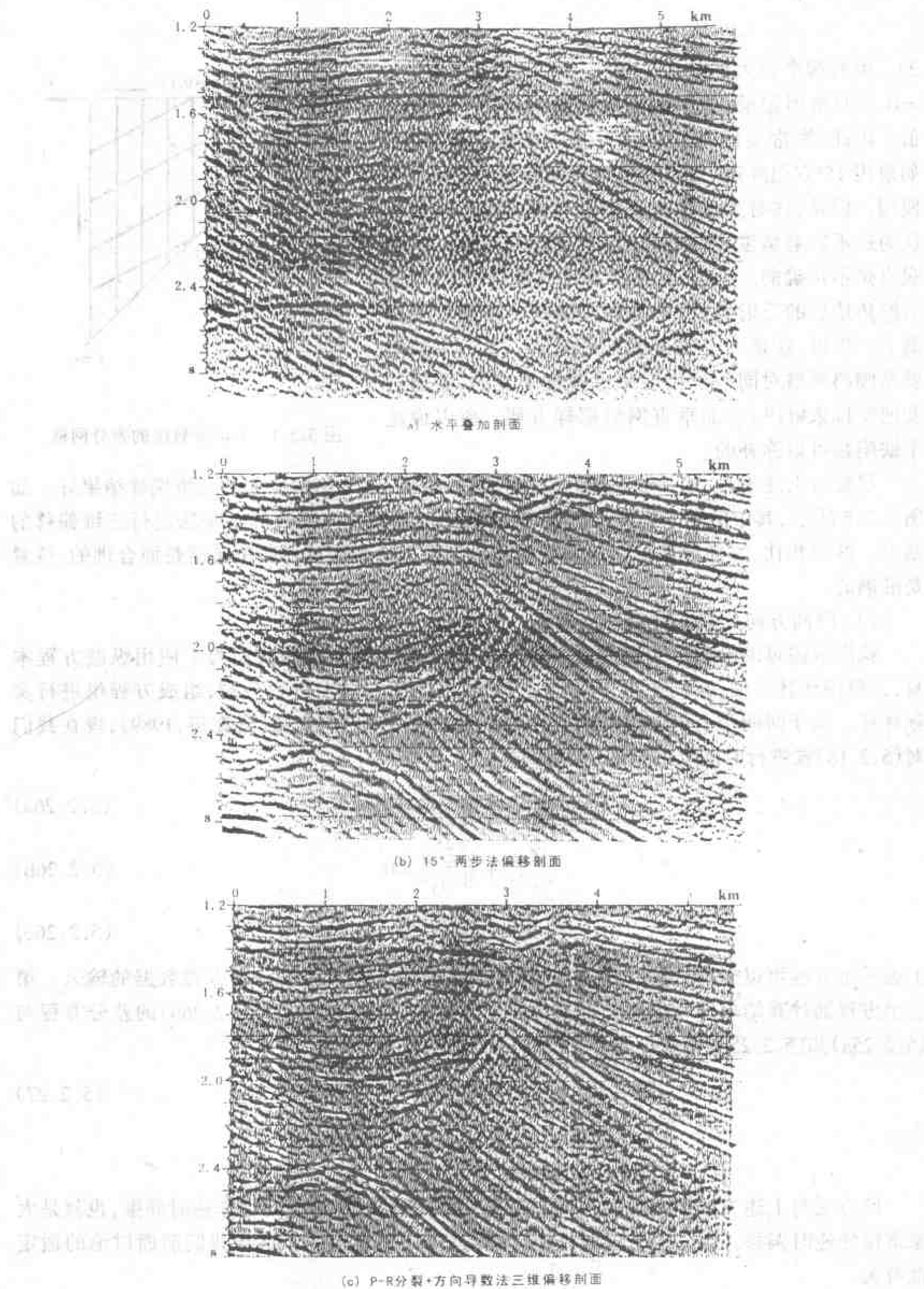


图 5.2.5　叠后三维偏移后的剖面对比图

(a) 用两步法偏移；(b) 方向导数一步法偏移；(c) P-R 分裂 + 方向导数法偏移剖面

5.2.2 叠后三维深度偏移方法

叠后三维深度偏移在90年代开始面向实用，国内外计算地球物理学家推出了不少的三维深度偏移方法。但能够用于实际并获得良好地质效果的并不多。不少方法经不住时间和实践的考验而失去价值。而且，不是所有的时间偏移方法都能够用来做深度偏移的。因为深度偏移要求方程是自我完善的，不能借助他种方法进行某种波场值的计算。另外三维深度偏移用的差分格式必须是中心对称的，任何偏心的差分格式都是得不到好的偏移结果的。再有，深度偏移中的速度模型应当是基本准确的，比时间偏移要求严格。否则深度偏移的结果会比时间偏移还差，使人误以为方法不正确。这些观点都是我们经过实践获得的。因此，上一节所述的各种时间偏移方法经实用证明可用于三维深度偏移的方法只有阶数分裂法。其它方法，包括逆时的全倾角偏移方法，都难以用于三维深度偏移中。

由于，三维深度偏移要求偏移算子的空间对称性要好，同时要求有较高的计算效率，所以有的人提出用显式空间对称的偏移算子进行三维深度偏移(Hale，1991；Sollid，1994)。我们试验用隐式的空间对称的偏移算子，取得了良好的三维偏移效果。下面介绍这两种深度偏移方法。

1．隐式外推算子的叠后三维深度偏移方法

我们经过了多种方案的研究试验，最后采用三阶分裂方程作为三维深度偏移的主要方法。

我们知道，在原坐标系下的三维三阶分裂方程(马在田，1989)为

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} - av^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + bv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{5.2.28}$$

当然，我们也可用三维二阶分裂方程做三维叠后深度偏移，但考虑到计算量较多，因此，我们选用三维三阶分裂方程。

为了使(5.2.28)式方程计算的方便，我们还是采用浮动坐标系中的方程进行计算。此时，坐标变换的参考速度在三维工区只采用一个速度随深度变化的函数 $v(z)$，而不再是空变的了。因为只有这样才能在偏移后用它换算为深度，即用统一的深度比例因子进行波场外推。这样的浮动坐标系只有时间坐标的改变，即取

$$t' = t + \int_0^z \frac{dz}{v(z)}$$

其它坐标不变。进行浮动坐标变换，则方程(5.2.28)式表示为

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t'^2 \partial z} + \left(\frac{1}{v(z)} - \frac{1}{v}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t'^3} + \left(\frac{3v}{4} - \frac{v^2}{4v(z)}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{v^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

令 $\tau = 2z/v(z)$，有 $d\tau = 2dz/v(z)$，则上式可写为

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t'^2 \partial \tau} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v(z)}{v}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t'^3} + \frac{b}{2}\left(v(z)v - v^2\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t'} - av^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{5.2.29}$$

对(5.2.29)式进行按深度 τ 再分裂，可表示为两个方程组成的方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{v(z)}{v}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{5.2.30a}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t'^2 \partial \tau} + \frac{b}{2}(v(z)v - v^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t'} + av^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \tag{5.2.30b}$$

式中　$v = v(x, y, z)$。

(5.2.30b)式称为衍射项，它和前面的三维时间偏移的三阶分裂方程是同一个方程，只是方程的系数不同而已。(5.2.30a)式称为折射项。

(1) 计算折射项的差分法

(5.2.30a)式取下列点进行差分计算

$$u_{i,j}^{n+1,k+1} = u(i\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta\tau, (k+1)\Delta t);$$
$$u_{i,j}^{n+1,k} = u(i\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta\tau, k\Delta t);$$
$$u_{i,j}^{n,k+1} = u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta\tau, (k+1)\Delta t);$$
$$u_{i,j}^{n,k} = u(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta\tau, k\Delta t)。$$

由此四个节点组成差分方程为

$$\frac{1}{2\Delta\tau}(u_{i,j}^{n+1,k+1} - u_{i,j}^{n+1,k} + u_{i,j}^{n,k+1} - u_{i,j}^{n,k}) + \left(1 - \frac{v(z)}{v}\right) \times \frac{1}{2\Delta t}(u_{i,j}^{n+1,k+1} - u_{i,j}^{n+1,k} + u_{i,j}^{n,k+1} - u_{i,j}^{n,k}) = 0 \tag{5.2.31}$$

上式可以写为

$$(1-r)(u_{i,j}^{n+1,k} - u_{i,j}^{n,k+1}) = (1+r)(u_{i,j}^{n,k} - u_{i,j}^{n+1,k+1}) \tag{5.2.32}$$

式中　$r = (1 - v(z)/v(x,y,z))(\Delta\tau/\Delta t)$

上式可以正向递推计算，也可以反向递推计算，这取决于参考速度取最大值，还是取最小值。因为它们与计算稳定性有关。当参考速度 $v(\tau)$ 取同一深度层的横向变化的速度值中的最大值时 $r \leqslant 0$。$(1+r)/(1-r) \leqslant 1$，此时递推公式应当是

$$u_{i,j}^{n+1,k} = u_{i,j}^{n,k+1} + \frac{1+r}{1-r}(u_{i,j}^{n,k} - u_{i,j}^{n+1,k+1}) \tag{5.2.33}$$

反之，递推公式应当是

$$u_{i,j}^{n+1,k+1} = u_{i,j}^{n,k} + \frac{1-r}{1+r}(u_{i,j}^{n,k+1} - u_{i,j}^{n+1,k}) \tag{5.2.34}$$

以上二式的计算结果应当是等价的。但是，在速度一般是随深度增加的情况下，取负值更好些。

(2) 计算折射项的时移法

(5.2.30a)式的计算就是求满足此方程的左端式

$$B(\tau, t) = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{v(z)}{v}\right)\frac{\partial u}{\partial t}$$

的差分表达式。现在我们分析两个离散点 $u(x, y, z+\Delta\tau, t)$ 和 $u(x, y, \tau, t+\Delta t)$ 处的波场值的 Taylor 展开(Ma Z.,1992)，有

$$u(x, y, \tau+\Delta\tau, t) = u(x, y, \tau, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\Delta\tau + O(\Delta\tau^2) \tag{5.2.35}$$

和

$$u(x, y, \tau, t+\Delta t) = u(x, y, \tau, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{5.2.36}$$

将以上二式相减，得

$$u(x,y,\tau+\Delta\tau,t)-u(x,t,\tau,t+\Delta t)=\frac{\Delta\tau}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+O(\Delta\tau^2+\Delta t^2) \quad (5.2.37)$$

忽略高次项后，令 $\Delta t=b\Delta\tau$，则上式可表示为

$$\frac{2}{\Delta\tau}[u(x,y,\tau+\Delta\tau,t)-u(x,y,\tau,t+\Delta t)]=\frac{\partial u}{\partial\tau}-b\frac{\partial u}{\partial t}$$

现在，我们若使 $b=1-v(z)/v(x,y,z)$，则上式的右端项就是原一阶偏微分方程 $B(\tau,t)$。由于 $B(\tau,t)=0$，故得

$$u(x,y,\tau+\Delta\tau,t)=u(x,y,\tau,t+b\Delta\tau) \quad (5.2.38)$$

由(5.2.38)式可以看出，从已知深度 τ 上各点的波场值 $u(x,y,t)$，可以将各个点的振幅在时间上移动一个 $b\Delta t$ 时间，即可求出延拓到 $\tau+\Delta\tau$ 深度上的波场值。也就是外推波场不用经过差分运算，仅做简单的时间移动即可完成。波场值移动的方向与取最大或最小速度值作为浮动坐标的参考速度值有关。这一点与差分法是一致的。实用的结果，有时不如差分法好。其原因在于移动值不位于整样点上，而一般采用线性插值，造成误差，由于延拓层很多，误差积累达到一种很大的值，造成效果不好。而差分法本身包含了插值运算，它比线性插值要好。如果把时移法的插值方法改用 Spline 法，效果一定会变好。

上述叠后三维偏移方法已用于实际资料处理，并取得了良好的地质效果。如图 5.2.6 为某地区三维叠后深度偏移前后的地震剖面对比图。图 5.2.6a 是三维深度偏移处理前的一条叠加剖面图。从这个图上看不出任何可用于地质解释的图像。中间段上反射同相轴相互交叉，地下是背斜还是向斜无人能够做出可信的解释。经过三维深度偏移之后，地下构造等地质现象就比较明朗了。在中段既不是背斜，也不是向斜，而是右边为一斜坡，左方向是一组前积沉积。这个三维叠后深度偏移结果比三维时间偏移要好(图 5.2.6b)。

2. 显式外推算子的叠后三维深度偏移方法

对三维偏移的方法来说，不但要求它的精确度，而且要求高效率。众所周知隐式外推算子精度高，计算稳定，但相对来说效率不高。而显式外推算子计算精度不高，稳定性有限制，但计算效率高。因此，对显式外推算子来说，如何提高精度和稳定性是关键的技术。在这方面 Hale(1991)用了 McClellan 变换进行三维偏移。该方法精度有提高，特别是 45°方向上有很好的改善。但计算量仍很大。下面介绍快速而有效的褶积方法，进行外推计算的显式二阶微分算子(Sollid. et. al, 1994)。

根据相位移方法(Gozdag, 1978)地震波场的深度外推的频率－波数域的深度外推式为

$$\tilde{u}(\omega,\hat{k}_x,\hat{k}_y,z+\Delta z)=\tilde{w}(w,\hat{k}_x,\hat{k}_y,\Delta z)\tilde{u}(w,\hat{k}_x,\hat{k}_y,z) \quad (5.2.39)$$

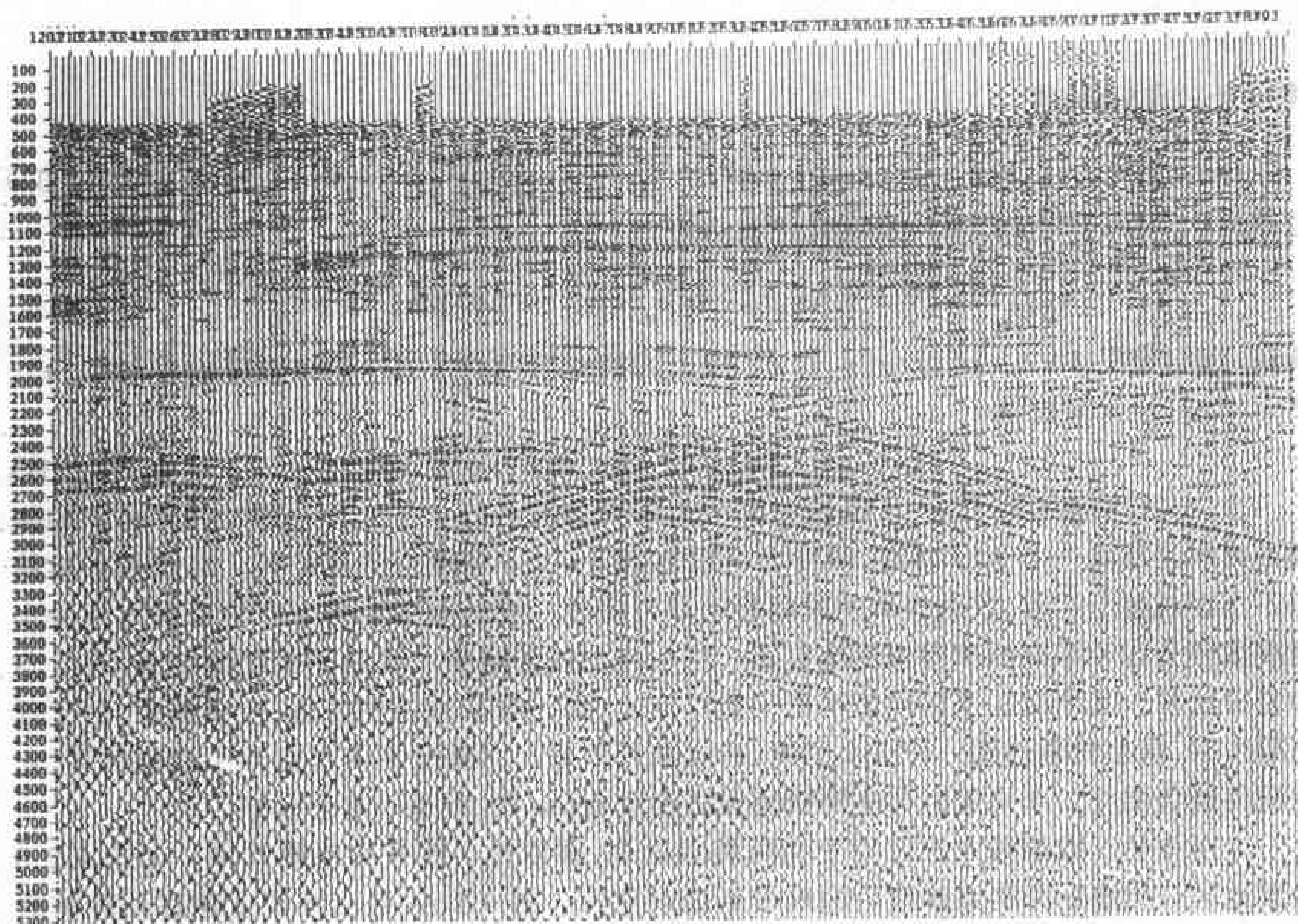
式中 $\tilde{w}$ 为相位移算子，它表示为

$$\tilde{w}(\omega,\hat{k}_x,\hat{k}_y,\Delta z)=\exp\left\{i\Delta z\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-\hat{k}_x^2-\hat{k}_y^2\right]\right\} \quad (5.2.40)$$

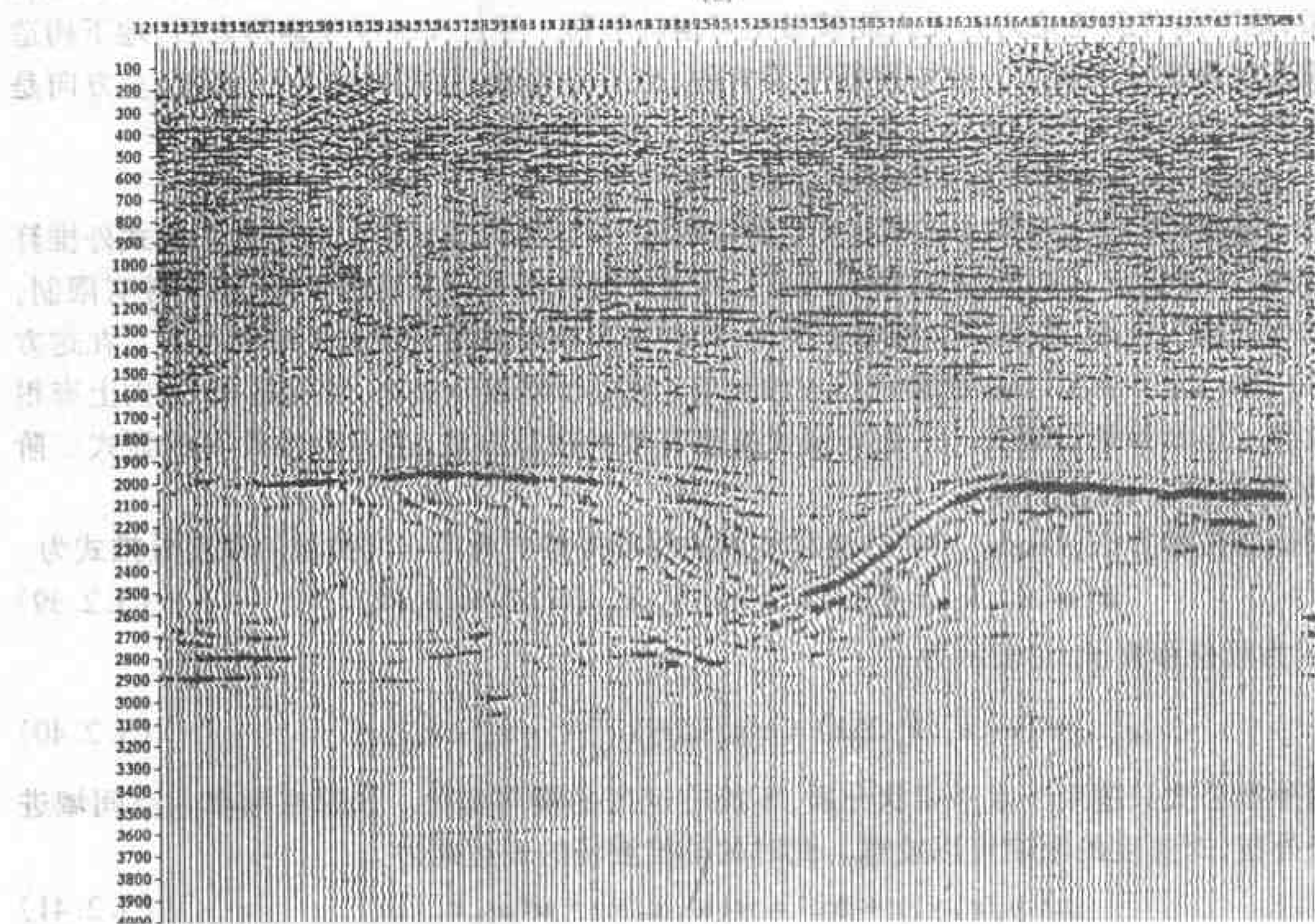
上面的外推公式只适用于水平层状介质，不能有速度的横向变化。如果在频率－空间域进行波场外推，对速度的限制可以放宽。此时的外推波场的表达式为

$$u(\omega,x,y,z+\Delta z)=w(\omega,x,y)*u(\omega,x,y,z) \quad (5.2.41)$$

式中 * 号表示沿纵测线和横测线方向上的二维褶积，w 是相位移算子(5.2.40)式的反傅氏变换。速度的空变由 w 的空变来体现。实用中可用一个空变的褶积算子 f 来实现。f 通过使它的傅氏变换逼近精确的相位移算子(5.2.40)来优化。在进行算子设计时用纵、横测线



(a)



(b)

图 5.2.6 叠后三维深度偏移剖面图

(a) 三维叠加剖面；(b) 叠后三维深度偏移剖面

上的样点距 Δx 和 Δy 来规格化，即令

$$k_x = \hat{k}_x \Delta x \quad 和 \quad k_y = \hat{k}_y \Delta y \tag{5.2.42}$$

使纵、横测线上的采样间隔相等。实用中可以在纵、横测线上不等间隔采样。相位移函数又可写为

$$\tilde{w}(k_\omega, k_x, k_y) = \exp\left\{ \mathrm{i} r k_\omega \left[1 - 2\left(\frac{k}{k_\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} \tag{5.2.43}$$

式中 $r = \Delta z / \Delta x$；

$k_\omega = \omega \Delta x / v$ 为规格化的波数；

$k = [(k_x^2 + k_y^2)/2]^{1/2}$。

上述 k，k_x，k_y 和 k_ω 都在$[0, \pi]$区间定义。

相位移算子(5.2.42)式可以展开为水平规格化波数 k_x 和 k_y 的幂级数为

$$\tilde{w}(k_\omega, k_x, k_y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{i} r k_\omega \left[1 - 2\left(\frac{k}{k_\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \right\}^n \frac{1}{n!} \tag{5.2.44}$$

为了设计深度外推算子，必须使算子的频率－波数域表达式 $F(k_\omega, k_x, k_y)$逼近上述相位移算子。在这种条件下经过数学的运算（Sollid，1994；Soubaras，1992；Holberg，1987)得深度外推算子 $h(x, y, t)$的傅氏变换为

$$F(k_\omega, k_x, k_y) = 2\sum_{n=0}^{N} f_n H_n(k_\omega, k_x, k_y) \tag{5.2.45}$$

式中 f_n 为复系数；

N 是算子半长度。

上式中函数 H_n 是用 Chebyshev 多项式的递推公式计算出来的。Chehyshev 多项式的递推式已知为

$$\cos(nk) = 2\cos(k)\cos((n-1)k) - \cos((n-2)k)$$

取 $\cos(k) = H(k)$

所以有 $H_n = 2HH_{n-1} - H_{n-2} \quad n \geqslant 2$

但 $H_0 = 1$ 和 $H_1 = H$

根据 Soubaras H 数可表示为

$$H(k_\omega, k_x, k_y) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{2}[D(k_\omega, k_x) + D(k_\omega, k_y)] \tag{5.2.46}$$

式中 $D(k)$是对 k^2 的近似，是对称脉冲响应滤波器的频率响应；

$\beta_0 = (D_{max} + D_{min})/(D_{max} - D_{min})$；

$\beta_1 = -2/(D_{max} - D_{min})$。

D_{max}和 D_{min}是 $D(k)$的最大值和最小值。对 $D(k_x)$来说，它为一组 $\cos(lk_x)$的加权求和，可表示为

$$D(k_\omega, k_x) = 2\sum_{l=0}^{L} P_l(k_\omega)\cos(lk_x) \tag{5.2.47a}$$

对 $D(k_y)$来说，它同样可表示为

$$D(k_\omega, k_2) = 2\sum_{l=1}^{L} P_l(k_\omega)\cos(kk_y) \tag{5.2.47b}$$

式中 p_l 是实系数；

L 是算子的半长度。

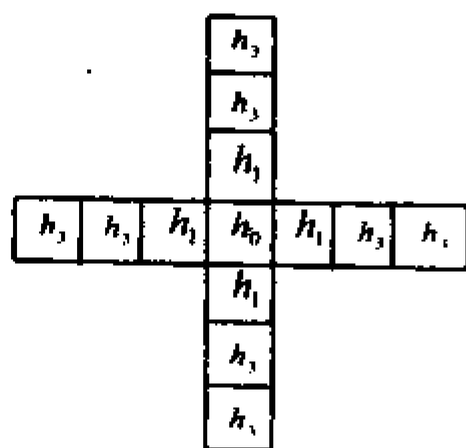


图 5.2.7 深度外推算子 $h(x,y)$，半长度 $L=3$，(根据 Soubaras)

它们的反变换 $d(x)$ 和 $d(y)$ 是空间二阶微分算子。因此，H 是空间褶积算子 h 的频率响应。h 由对应纵、横测线方向的两个微分算子组成的。算子是十字型的，如图 5.2.7 所示。未知系数 f_n 和 p_l 可用最小平方优化方法求出。计算时先用(5.2.47)式用最小平方法求出算子系数 p_l，然后用另外的最小平方过程优化计算复系数 f_n。这两个优化过程就是使目标函数

$$I=\sum_{k_x=0}^{k_\omega}\|D(k_\omega,k_x)-k_x^2\|^2$$

为最小时求 p_l。求系数 f_n 时使目标函数

$$J=\sum_{k=0}^{k_\omega/\sqrt{2}}\|F(k_\omega,k)-\bar{\omega}(k_\omega,k)\|^2$$

为最小。对于 $k\leqslant k_\omega/\sqrt{2}$ 时，振幅响应的曲线跳动应充分小，以保证高精度和稳定地外推。根据给定的精度和最大的传播角度来选择算子半长度 N

在实际计算中波场外推式(5.2.7)式现在写为

$$u(\omega,x,y,z+\Delta z)=f(k_\omega,x,y)*u(\omega,x,y,z) \tag{5.2.48}$$

式中

$$f(k_\omega,x,y)=\sum_{n=0}^{N}f_n(k_\omega)h_n(x,y) \tag{5.2.49}$$

它与 McClellan 变换的递推式相似。因子半长度 N 的个数与最大规格化波数 $k_{\omega\max}$ 有关。表 1 列出 L 与 $k_{\omega\max}$ 的关系。

$k_{\omega\max}/\pi$	0.17	0.36	0.50	0.62	0.72	0.82	0.90
L	1	2	3	4	5	6	7

这种显式外推算子在空间上的响应是对称的，特别是在 45°方向也应当与在 x 和 y 方向相一致。这是不少三维偏移算子所不及的。图 5.2.8 是这里所叙的可变长度的二阶微分算子的三维偏移脉冲响应水平切片图($z=350$m)和 McClellan 变换的三维偏移脉冲响应的水平切片图的对比图。二者相比，前者优于后面，后者除了 0°,90°,180°,270°方位附近外，其它各个角度上存在明显的频散现象。对偏移成像中的振幅保真明显不利。

5.2.3 地震偏移的其它问题

地震偏移成像问题，经过最近十年的研究与发展，已经基本上解决了和正在解决三维偏移，叠前深度偏移和多分量地震记录的偏移诸问题。但是，偏移中仍然有些问题尚未解决，如真振幅偏移问题和各向异性介质中的地震偏移问题。对于上述问题，我们在此做些概括介绍。

1. 真振幅偏移

反射波由于在地面和反射面之间的传播而被模糊。偏移就是要去掉这些传播效应。地震能够搞清的细节是半波长，更小的细节是不能解决的。但这并不意味着小比例尺的介质

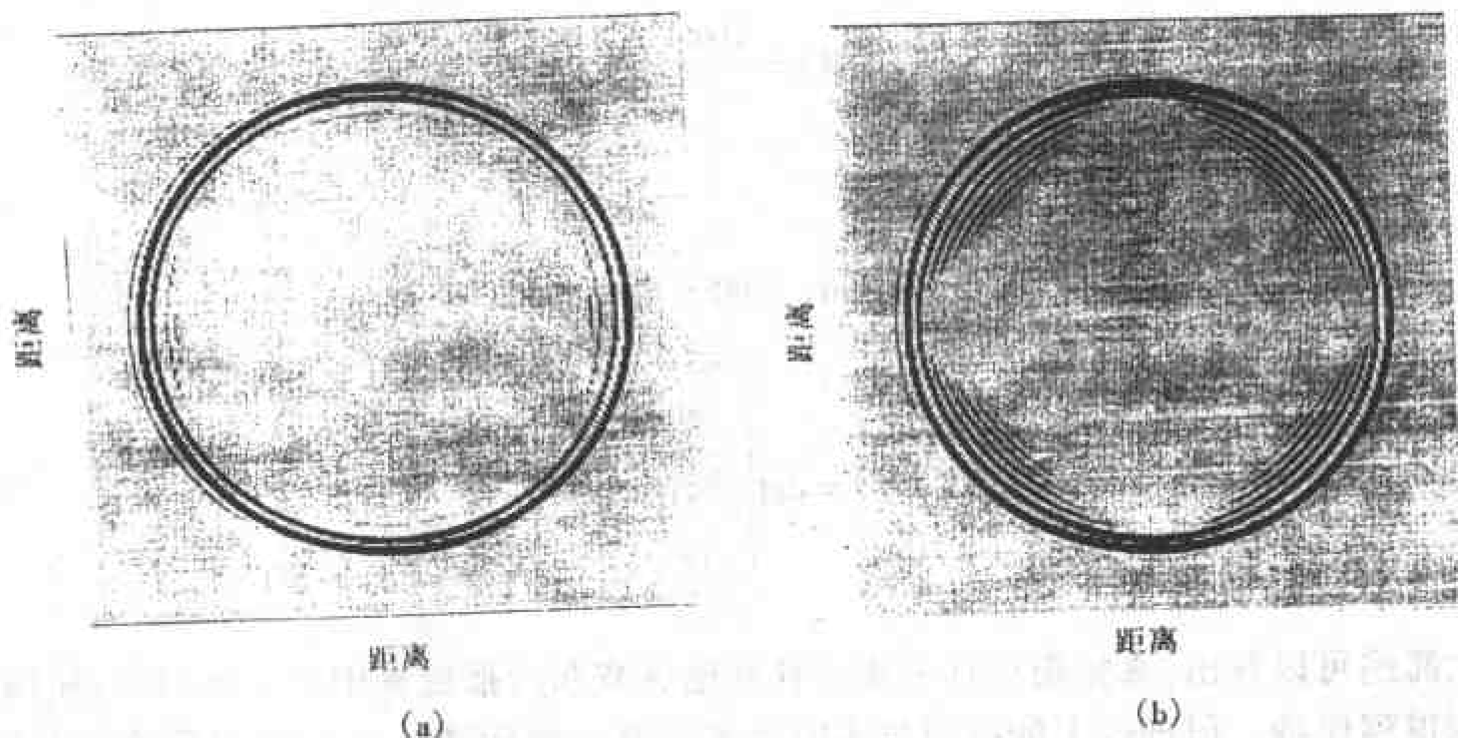


图 5.2.8 不同的显式三维深度外推二阶微分算子的脉冲响应水平切片图（$z = 350\mathrm{m}$）

(a) 可变长度的二阶微分算子；(b) 改进的 McClellan 变换的三维深度外推算子

参数可以忽视。通过一维介质的充分研究已经表明，层间的多次散射可能很严重地影响着地震波场的可见传播特征，其主要的影响与角度有关的频散现象。当前的宏观模型对此不予考虑。因此，这种影响在偏移中也被忽略了。这会导致成像波形频散和错误的振幅随入射角的变化(AVA)。

要进行真振幅偏移，就是要对几何扩散和反射系数随入射角的变化和透射损失等进行补偿。真振幅偏移公式与叠前深度偏移公式相似，但真振幅核项与积分加权项不相同。反射点 M 的成像积分式为(Tyget et al.，1966)

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\iint_A \mathrm{d}^2\xi K_{DS}(\xi, M)\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t}\bigg|_{t=\tau_D(\xi;M)} \tag{5.2.50}$$

式中 M 为反射点坐标；

ξ 为地面点坐标；

$\tau_D(\xi;M) = \tau[S(\xi), M] + \tau[(M, G(\xi)]$；

$\tau[S(\xi), M]$从炮点 $S(\xi)$到反射点 M 的走时；

$\tau[M, G(\xi)]$从反射点 M 到地面点 $G(\xi)$的走时。

真振幅核为

$$K_{DS}(\xi;M) = \frac{2h_b(\xi;M)}{m_D^2(\xi;M)}L_{SM}L_{MG} \tag{5.2.51}$$

式中

$$m_D(\xi;M) = \frac{\partial\tau_D(\xi, r, z)}{\partial z} = [s(SM) + s(MG)]\hat{n}_z$$

$\hat{n}_z$是垂直方向的单位向量；

$S(SM)$和 $S(MG)$为 SM 段和 MG 段的慢度。

r 为反射点 M 的水平面上的径向坐标。

在单一界面情况下 $m_D(\xi, M)$求出为

$$m_D(\xi;M)=\frac{2\cos(\alpha_M)\cos(\beta_M)}{v_M}$$

式中　α_M 和 β_M 为入射角和反射角；

　　　v_M 为速度。

$h_B(\xi;\ M)$表示为 Beylkin 行列式(Beylkin, 1985; Bleistein, 1987)

$$h_B(\xi;M)=\det\begin{pmatrix}\nabla_r\tau_D(\xi;M)\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\nabla_r\tau_D(\xi;M)\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_2}\nabla_r\tau_D(\xi;M)\end{pmatrix}\tag{5.2.52}$$

从以上简述可以看出,真振幅偏移主要是补偿地震波在传播过程中的各种损失,使偏移后的振幅能得到保持。但理论上的推导与实际计算还有一段距离。今后应当理论结合实际,研究真振幅或相对振幅保持的各种偏移方法和具体算法。

2. 各向异性介质中的偏移方法

90 年代以来,关于各向异性的偏移问题已经提到研究项目中来了。因为对地震成像的精度要求越来越高,这首先就要有精确的偏移速度。速度的各向异性在偏移成像中地质界面位置的确定有重要作用。研究表明(Larner, 1993),在横向各向异性介质中的偏移误差,对陡倾角反射来说是很大的,如果我们偏移中忽略横向各向异性问题。用各向同性的偏移算法处理横向各向同性(TI)介质的数据会产生平反射面的错误地置位,甚至漏掉陡构造(Martin et al, 1992)。

认识到考虑各向异性的重要性,一些学者已经提出了各向异性介质的偏移算法。Uren 等人(1990)提出了 TI 介质中二维 ω-k 域的偏移算法,Sena 等(1993)发展了在弱 TI 介质中用 Green 张量表述的克希霍夫二维叠前深度偏移方法,Alkhalifah (1993)提出了用高斯射束法进行二维各向异性叠前偏移的算法 Kitchenside(1993)发展了二维 TI 介质中 ω-x 域向下外推的隐式和显式计算方法。我们在这里介绍 Uzeategui(1996)的在 ω-x 域用显式外推算子对垂直轴对称的 TI 介质进行偏移的方法。关于这种方法用于均匀介质的偏移方法,前面已经讨论过。两相比较,可以看出它们之间的不同之处。

对于 TI 介质或 VTI 介质(垂向对称的 TI 介质)来说,可以用非均匀各向同性的显式滤波算子方法进行 ω-x 域的偏移,但现在应当把水平波数和相函数看成是传播角度的函数。基本思想是找到一个滤波器,它在 ω-x 域能与 VTI 介质的波场向下外推算子相匹配。就是滤波器 $w(k_x,\omega)$的傅氏变换与外推算子 $D[k_x(\theta),\omega]$相逼近。$D[k_x(\theta),\ \omega]$如下式:

$$D[k_x(\theta),\omega]=\exp\left\{\mathrm{i}\frac{\Delta z}{\Delta x}\left[\left(\frac{\omega\Delta x}{v_p(\theta)}\right)^2-k_x^2(\theta)\right]^{1/2}\right\}\tag{5.2.53}$$

式中　$v_p(\theta)$ 是相速度;

　　　$k_x(\theta)$ 是相位角 θ 上的水平波数。

$k_x(\theta)$与相速度 $v_p(\theta)$有下列关系:

$$\frac{k_x(\theta)}{\Delta x}=\frac{\omega\sin(\theta)}{v_p(\theta)}\tag{5.2.54}$$

在 VTI 的情况下外推滤波因子的傅氏变换可表示为

$$\widetilde{W}(k_x,\omega)=\sum_{m=0}^{M-1}C_m(\omega)B_m[k_x(\theta)]\approx D[k_x(\theta)]$$

式中

$$B_m[k_x(\theta)]=(2-\delta_{mo})\sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}}(2-\delta_{l0})\cos\left(\frac{2\pi ml}{N}\right)\cos[k_x(\theta)l] \quad (5.2.55)$$

δm_0 和 δl_0 是 Kronecker δ 函数。

这时外推滤波因子与各向同性介质中的外推滤波因子(Hale, 1991)的差别是水平波数 k_x 通过 $v_p(\theta)$ 与 θ 角有关。$B_m[k_x(\theta)]$ 要对 θ 进行 Taylor 展开，得

$$\begin{aligned}\widetilde{W}[k_x(\theta),\omega]&=\sum_{m=0}^{M-1}C_m(\omega)\left[B_n(0)+\frac{B_m^2(0)\theta^2}{2!}+\frac{B_m^4(0)\theta^4}{4!}+\cdots+\frac{B_m^{2M}(0)\theta^{2M}}{(2M)!}\right]\\&=D(0)+\frac{D^2(0)\theta^2}{2!}+\frac{D^4(0)\theta^4}{4!}+\cdots+\frac{D^{2M}(0)\theta^{2M}}{(2M)!}\end{aligned} \quad (5.2.56)$$

式中 $D^{(2l)}(0)$ 和 $B_m^{(2l)}(0)$ 表示向下外推算子和基函数在 $\theta=0$ 时的 $2l$ 阶导数。

由此得出求系数 $C_m(\omega)$ 的线性方程组为

$$\sum_{m=0}^{M-1}C_m(\omega)B_m^{(2l)}(0)=D_{(0)}^{(2l)} \quad (5.2.57a)$$

$$B_m^{(2l)}(0)=(2-\delta_{m0})\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)\cos[nk_x(\theta)]^{(2l)} \quad (5.2.57b)$$

由上面两式组成的方程组可用来计算滤波系数 $C_m(\omega)$。已知在均匀介质中的滤波因子系数 $h_l(\omega)$ 的计算式(Hale, 1991)为

$$h_l(\omega)=\sum_{m=0}^{M-1}C_m(\omega)b_{ml} \quad (5.2.58)$$

式中 $b_{ml}=(2-\delta m_0)\cos(2\pi ml/N)$。

将求出的 $C_m(\omega)$ 代入上式，即得 VTI 介质中的外推因子。用此外推因子可对 VTI 这样的各向异性介质的反射波进行偏移处理。对更复杂的各向异性介质的偏移问题尚在研究中。

5.3 叠前时间偏移和深度偏移

叠前偏移的提出已经有 20 年了。它在叠后波动方程偏移初步成功之后，就被提了出来。当时提出的原因，是因为常规水平叠加在界面非水平时，动校正后不能同相叠加，使叠加效果不理想。在简单的地质情况下，有倾角地层的水平叠加，可以通过使用一种叠加速度 $v_s=v/\cos\varphi$ 来达到同相叠加的目的。其中 v_s 就是叠加速度，v 表示此反射层以上的平均速度或均方根速度，φ 为地层倾角。就这样延续了很多年。后来发现在同一个深度上有两种倾角的地层的反射波要进行共中心点叠加时，就无法选用适当的叠加速度，因为它们需要不同的叠加速度，才能进行最好的叠加。如此，就提出了先偏移后叠加的问题。这样，既可以同相叠加，也可以用同样的速度进行偏移。偏移到位后再叠加。但是，往往由于叠前的记录信噪比太低，速度又不准，则叠前偏移的结果就不理想，做到同相叠加还有一定的难度。另外，做叠前偏移计算工作量太大，往昔的计算机无法承受这样的计算工作。因此，叠前偏移迄今还未得到广泛的应用。不过，由于近年在墨西哥湾盐丘下找到了大油田的刺激，使叠前深度偏移研究成为一种热点，谈论叠前深度偏移成为一种时尚。但目前真正能用的叠前深

度偏移方法和软件并不多，而且同一种方法也不是对于各种地质区域都能成功的。特别是叠前三维深度偏移，好的算法和软件更是处在探索之中。因此，这里介绍的叠前偏移方法和计算技术都不是很成熟的。但把我们所掌握的有关方法写出来，对大家进一步研究或许是有益的。叠前偏移基本上可分为叠前时间偏移，叠前深度偏移和叠前部分偏移(DMO)。

5.3.1 叠前时间偏移

由于叠前偏移对速度模型的要求比叠后偏移高，同时要求空间上能够变速度。在计算效率上也要求应有一定的实用性。因此，叠前偏移一般采用积分法和有限差分法。我们在此主要讨论这两种方法。同时，对于叠前部分偏移即 DMO 将做专门讨论。所以在这一节我们只讨论叠前时间偏移的方法和计算问题。

1. 有限差分法叠前时间偏移

叠前偏移，顾名思义是将多次覆盖的地震记录在进行叠加前实现偏移处理，使每个地震道上的反射波返回到各自的反射点上去，然后把同一反射点的波叠加起来。这样就实现了先叠加后偏移不能实现的共反射点叠加。实现叠前偏移一直是大家的愿望。但是，它与叠后偏移相比，在实现上有很大难度。故尚未进入地震资料处理的日常工作中去。

(1) 二维叠前时间偏移

叠前偏移的几何原理

大家知道，在均匀介质中，炮检距为 $2h$ 的反射波走时为 t_h 的反射点的可能位置的轨迹是个以震源点和接收点为焦点的椭圆，椭圆的公式为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{5.3.1}$$

式中　$a=(1/2)vt_h$；

$b=[(v^2t_h^2-4h^2)/4]^{1/2}=(1/2)v_2t_n^2$。

t_n 是用速度 v 进行正常时差校正后的时间。(5.3.1)式用 t_n 表示的公式为

$$\frac{4x^2}{v^2t_n^2+4h^2}+\frac{4z^2}{v^2t_n^2}=1 \tag{5.3.2}$$

t_n 虽然经过了动校正，当地层有倾角的情况下，它不等于 t_0，因为 t_n 与零炮检距地震道上的反射时间 t_0 存在下列关系：

$$t_n=\left(t_0^2-\frac{4h^2\sin^2\phi}{v^2}\right)^{1/2} \tag{5.3.3}$$

在一般情况下 $t_n<t_0$，只有在 $\varphi=0$ 时 $t_n=t_0$。因此，把非零炮检距的地震反射波用动校正的方法将 t_h 校正为 t_n，然后用叠后偏移方法进行反射波归位成像，其偏移结果是不正确的。因为叠后偏移的几何原理是用动校正后的 t_n 时间画圆弧，即认为反射点轨迹位于圆弧上，该圆弧由下式表示：

$$\frac{4x^2}{v^2t_n^2}+\frac{4z^2}{v^2t_n^2}=1 \tag{5.3.4}$$

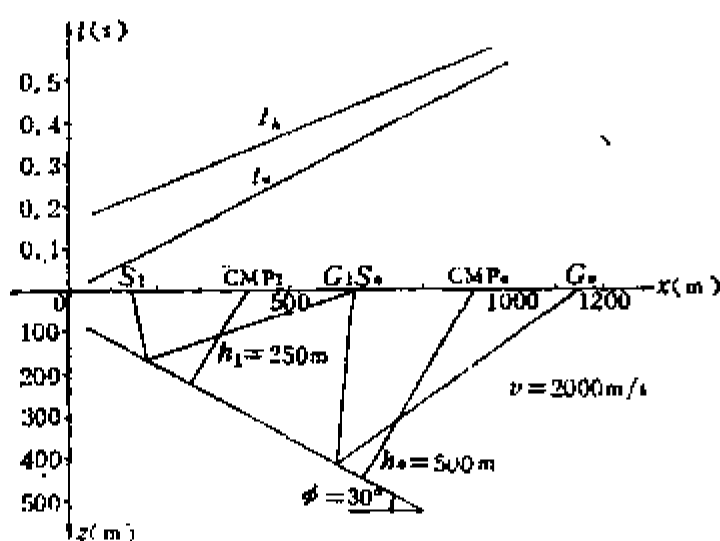
(5.3.2)式和(53.4)式的区别在于 h。如 $h=0$ 则上式相同。但是，如果我们希望在 $h\neq0$ 情况下也用某种圆弧进行几何做图，我们可以将(5.3.2)式写为

$$x'^2 + z^2 = \frac{v^2 t_n^2}{4} \tag{5.3.5}$$

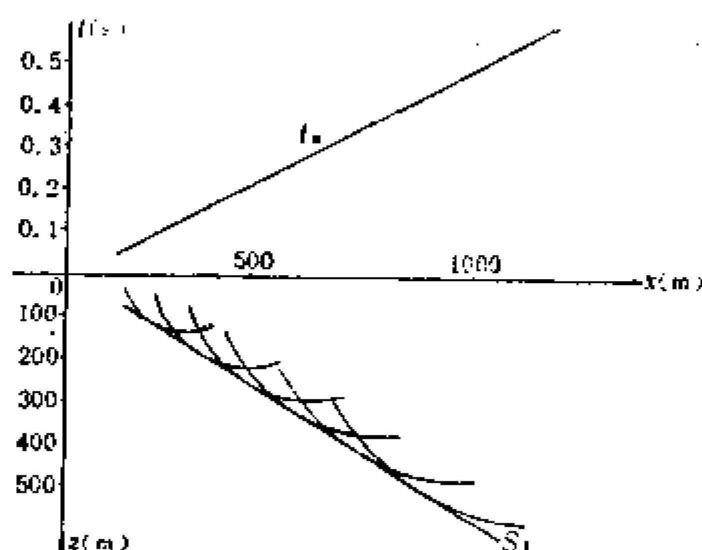
式中

$$x' = x/(1 + 4h^2/v^2 t_n^2)^{1/2} \tag{5.3.6}$$

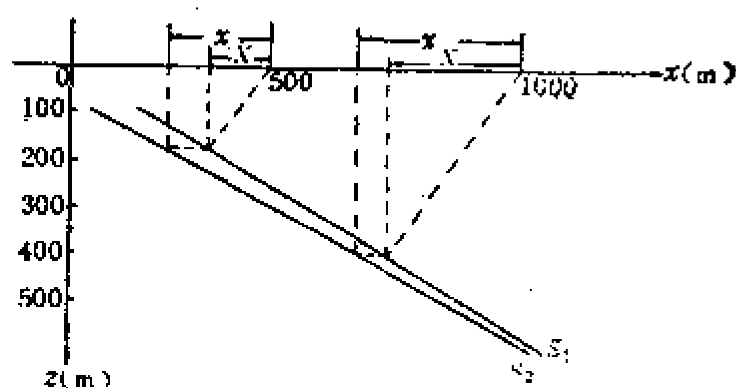
(5.3.5)式在(x', z)坐标系中以 $vt_n/2$ 为半径的圆。因此,从几何学来考虑可以先在(x', z)域用圆弧进行偏移成像,然后再将成像结果进行坐标转换回到原坐标系(x, z)域中。这样就可以得到非零炮检距的正确偏移结果。这种做图法可以在共炮点道集上进行,也可以在共炮检距道集上进行。我们认为在共炮检距道集上进行更方便些。我们用一组图来说明这个过程。图 5.3.1a 是一个地震反射界面及其在共炮检距 $2h = 500$m 时的反射波到达时 t_h 曲线和它经过动校正后的 t_n 曲线。图 5.3.1b 是用 t_n 曲线和介质速度 $v = 2000$m/s 在(x',



(a) 共炮检距地震射线及走时曲线



(b) 用 t_n 曲线进行偏移做图



(c) 将反射界面进行校正

图 5.3.1 在(x', z)域用圆弧切线法进行偏移

z)平面上绘制一组圆弧并做它们的切线,该切线即为反射界面。不过,在做圆弧之前要将 x 坐标用公式(5.3.6)式进行比例缩小,即将道距 Δx 缩小。同时将相应的 t_n 值放在新的 x' 坐标上去。这个过程如图 5.3.1b 所示。将此偏移的结果再用 $\Delta x = [1 + (2h/vt_n)^2]^{1/2}\Delta x'$ 返回到原来的 x 坐标中去。同时,将偏移后的反射界面的深度放到对应的 x 点的深度上,如图 5.3.1c 所示。这就是用几何学进行叠前偏移的原理。当然,也可以不通过坐标从 x 到 x' 的变换和偏移后又从 x' 到 x 的坐标反变换来完成偏移的几何做图过程。而是在原坐标系(x, z)用椭圆弧做图和它们的切线来完成。不过,做椭圆弧很不方便。这种几何原理实际也不能具体进行,这里只是做原理上的说明,是为后面讨论的波动方程法做准备的。

波动方程法叠前偏移

上述叠前偏移的几何原理,可以用波动方程来实现。(5.3.5)式描述波传播的波前面的几何形态,是某种圆弧。它在均匀介质中是非常明确的。但它不能反映地震波的波动过程。相应的地震波的波动方程除了表现与(5.3.5)式一样的波前面的几何形态外,还反映出波形及振幅等内容。现在我们想将几何关系与波动方程联系起来。这可以通过波动方程的频散关系或波动方程的象征方程来实现(马在田,1996)。

我们可以将(5.3.5)式写为

$$x'^2 + z^2 = v_a^2 t_n^2 \tag{5.3.7}$$

式中 $v_a = v/2$。

现令 $v_a t_n = \tau$,则上式可写为

$$x'^2 + z^2 = \tau^2 \tag{5.3.8}$$

将(5.3.8)式对 z 和 τ 进行微分,得

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial z^2} = \frac{z^2}{\tau^2} \tag{5.3.9a}$$

同样,将(5.3.8)式对 τ 和 x' 进行微分,得

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial x'^2} = \frac{x'^2}{\tau^2} \tag{5.3.9b}$$

我们知道,微分与波数存在下列对应关系

$$ik_{x'} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x'} \tag{5.3.10a}$$

$$ik_z \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} \tag{5.3.10b}$$

和

$$i\omega_\tau \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{v_a \partial t_n} \tag{5.3.10c}$$

式中 i 为虚数。

从(5.3.8a)式和(5.3.9b)式我们可获得下面的关系式

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial x'^2} = \frac{x'^2}{\tau^2} = \frac{k_x^2}{\omega_\tau^2} \tag{5.3.11a}$$

和

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial z^2} = \frac{z^2}{\tau^2} = \frac{k_z^2}{\omega^2} \tag{5.3.11b}$$

将(5.3.11a)式和(5.3.11b)式代入(5.3.8)式,得

$$k_{x'}^2 + k_z^2 = \omega_\tau^2 \tag{5.3.12}$$

由 $v_a t_n = \tau$ 和(5.3.10c)式我们可见到下列关系

$$-\omega_\tau^2 \leftrightarrow \frac{\partial z^2}{v_a^2 \partial t_n^2} \leftrightarrow -\frac{\omega^2}{v_a^2} \tag{5.3.13}$$

因此将 $\omega_\tau^2 = \omega^2 / v_a^2$ 代入(5.3.12)式中,得到

$$k_{x'}^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v_a^2} \tag{5.3.14}$$

(5.3.14)式为从(5.3.7)式导出的频散关系式,它是某种偏微分方程的象征方程。此式可以很容易转换到时-空域中表示,如果我们将它们两边均作用于地震波场 u,有

$$k_{x'}^2 u + k_z^2 u = \frac{\omega^2}{v_a^2} u \tag{5.3.15}$$

并进行傅氏反变换,则可求得波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v_a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.3.16}$$

将上式回到原坐标系中,因为有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \left(1 + \frac{4h^2}{v^2 t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

故(5.3.16)式可表示为

$$\left(1 + \frac{4h^2}{v^2 t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.3.17}$$

(5.3.17)式的 $\partial^2 u/\partial x^2$ 项前的系数是与到达地面的走时有关的。因此,在波场外推中此系数中的 t_n 应表示为到达地面的走时。在向下外推时,它应当随深度的增大而加上一个 $2\Delta z/v$。这正好补偿 Claerbout 浮动坐标系中的时间增加值 τ。所以在浮动坐标系中,此系数中的 t_n 保持不变,此时(5.3.17)式应当表示为

$$\left(1 + \frac{4h^2}{v^2 t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{8}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n \partial \tau} = 0 \tag{5.3.18}$$

(5.3.18)式可用多种我们已知的叠后偏移方法求解。

用有限差分法中的逆时偏移法(马在田等,1990)对(5.3.18)式进行了脉冲响应的试算。计算了 $2h = 0, 2h = 1000\text{m}, 2h = 2000\text{m}$ 时的脉冲响应曲线。图 5.3.2 是三种炮检距情况下的脉冲响应。从中可以看出,随着 $2h$ 的增大,脉冲响应的曲线展宽,这一点正是我们所希望得到的。当 $2h = 0$ 时,(5.3.18)式带 $4h^2$ 项消失。方程归结为一般的用于叠后偏移的波动方程,响应曲线为一圆弧。当 $2h = 1000\text{m}$ 和 $2h = 2000\text{m}$ 时响应曲线为椭圆弧,且后者大于前者。

本项叠前时间偏移方法也可用于共炮点道集记录的叠前偏移。但要做好吸收边界的处理。不论是那种道集的处理,在叠加道还可以抽取偏移后的共地面点道集,进行反动校正,然后再进行速度分析。用新求出的速度进行偏移后叠加,使叠加效果更好。

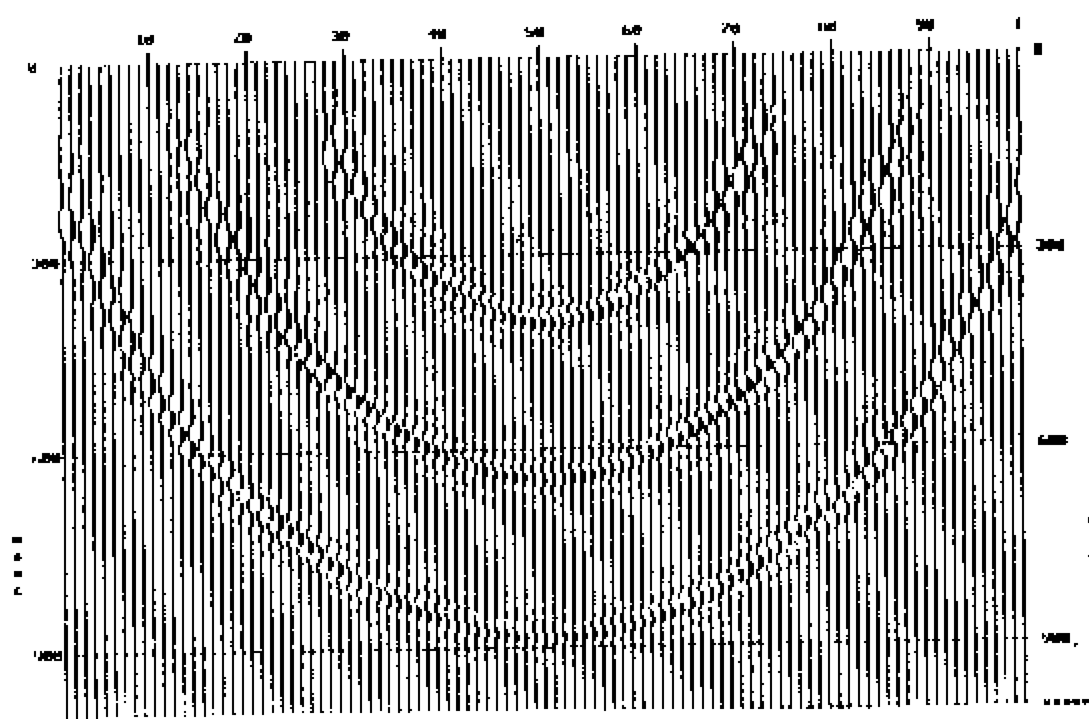
(2) 三维叠前时间偏移

在三维情况下,反射点轨迹则变为一个旋转椭球面。该椭球是绕炮检距方向由二维时的椭圆旋转而成。如果取炮检距方向为 x 方向,则椭球面的方程为

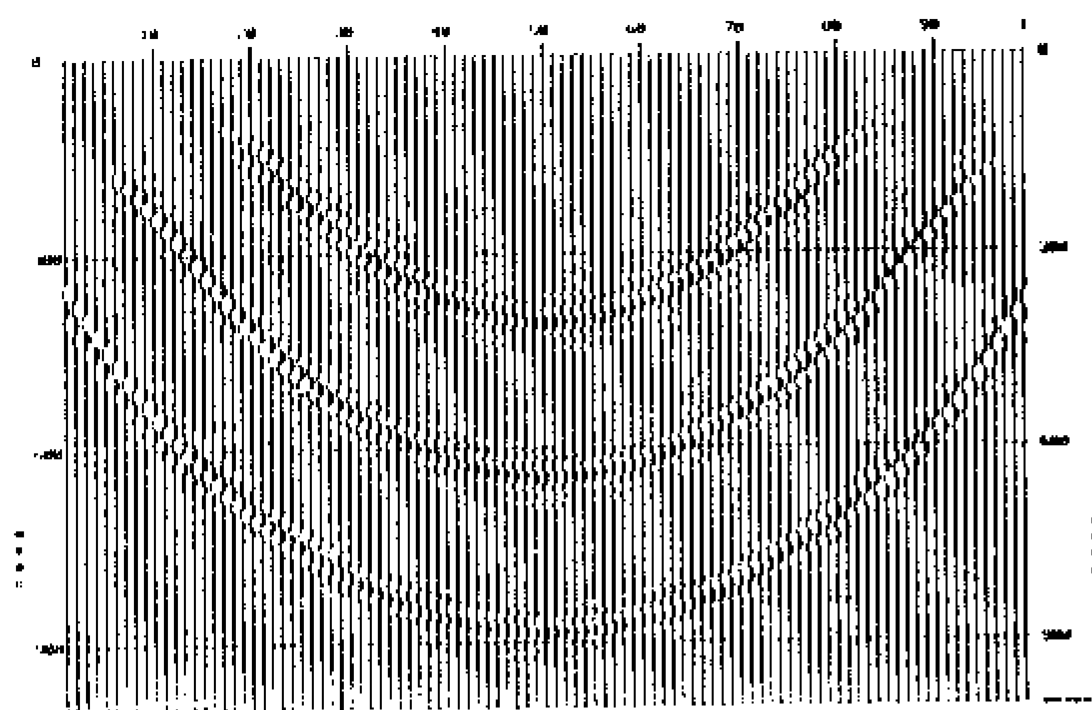
$$\left(\frac{1}{1 + 4h^2/v^2 t_n^2}\right)x^2 + y^2 + z^2 = \frac{v^2}{4}t_n^2 \tag{5.3.19}$$

和二维情况下的论证相同,可求得(5.3.19)式对应的波动方程为

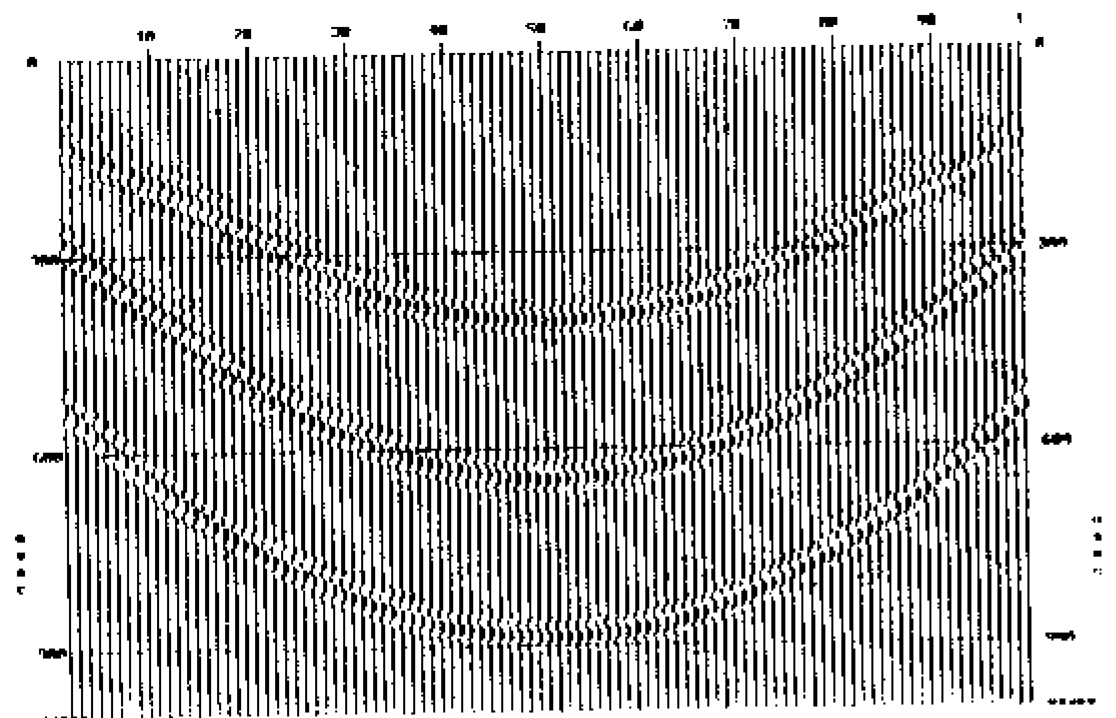
$$\left(1 + \frac{4h^2}{v^2 t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.3.20}$$



(a) 2h = 0m



(b) 2h = 50m



(c) 2h = 1000m

图 5.3.2 不同炮检距的脉冲响应

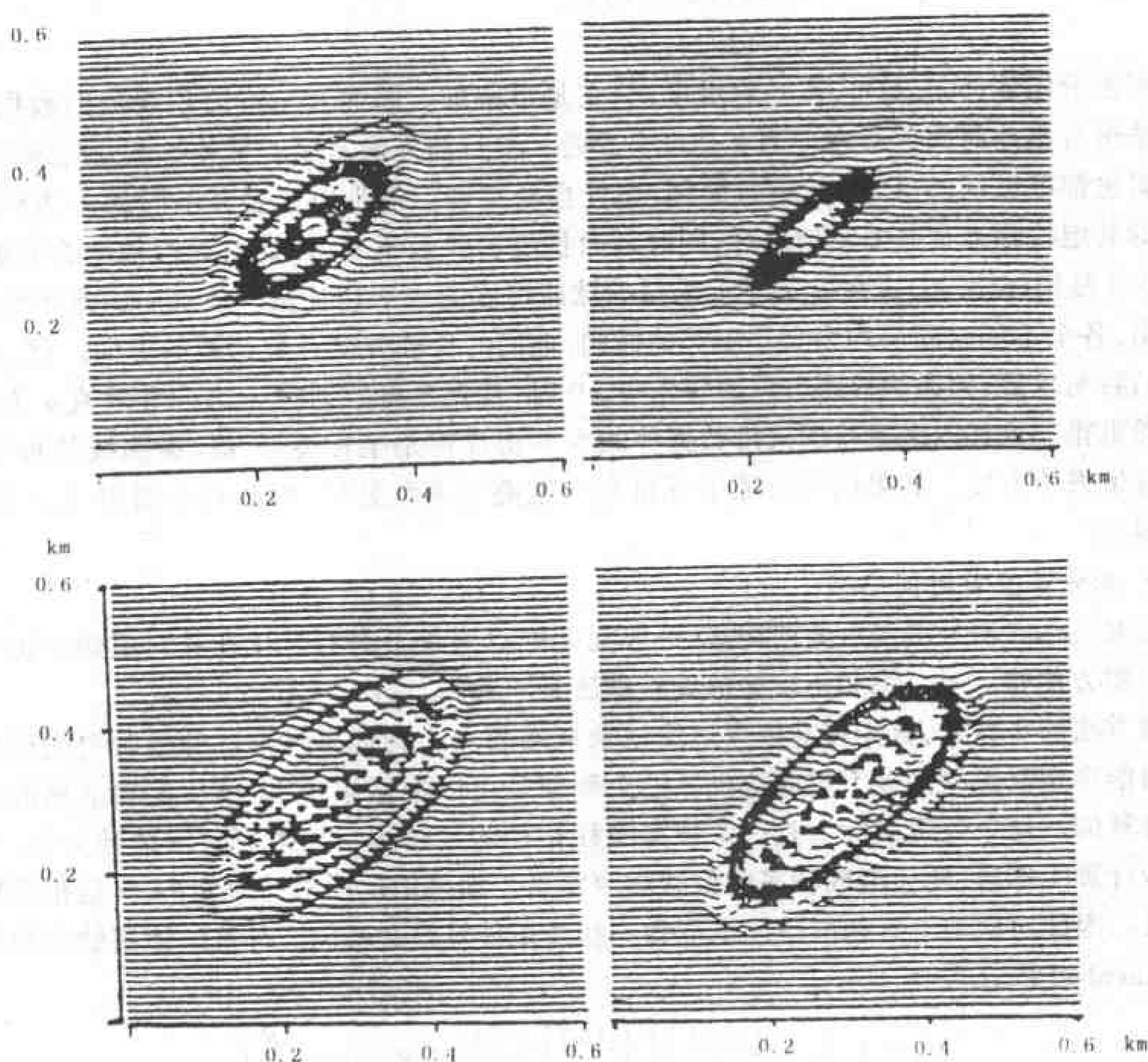


图 5.3.3　三维叠前偏移算法(5.3.20)式的脉冲响应时间切片图

$\alpha = 45°$　$2h = 1200\text{m}$

如果炮检距方向与观测纵测线的方向(一般取 x 方向)成 α 角,则需将(5.3.20)式进行坐标变换。我们取纵测线方向 x 与逆时针方向呈 α 角的炮检距方向为新坐标系 (x', y', z') 的 x' 方向,则从 (x', y', z') 坐标变为 (x, y, z) 坐标的变换关系如下式

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ z &= z' \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

用上式对(5.3.20)式进行偏导数变换,最后可得新坐标系下的方程为把(5.3.20)式中的坐标看做 (x', y', z')

$$\frac{1}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{C}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.3.22}$$

式中

$$A = b^2[(\cos^2\alpha/a^2) + (\sin^2\alpha/b^2)];$$

$$B = b^2[(\sin^2\alpha/a^2) + (\cos^2\alpha/b^2)];$$

$$C = b^2[(-\sin^2\alpha/a^2) + (\sin^2\alpha/b^2)];$$
$$a = (1/2)v(x)t_h;$$
$$b = (1/2)t_n。$$

用有限差分法解(5.3.22)式有一定难度,但它是可解的。因而对三维面积观测的数据体用本方法进行叠前时间偏移在理论上是可实现的。但目前尚未实用。虽然各个方向的共炮检距道集也都可以用(5.3.20)式进行偏移,而且容易实现。但是由于要在不同的 α 方向上抽取新的共炮检距道集并要重新采样,同时剖面长度会长短不等,因此对处理效率会有影响。图 5.3.3 是用(5.3.20)式在 $\alpha = 45°$ 上求得的脉冲响应的水平切片图。从这一组水平切片可以看出,各个不同时间层均为大小不等的椭圆,他们的长轴方向是炮检距的方向。(5.3.20)式虽然容易求解,但在炮检距方向有转角 $\alpha \neq 0$ 时,首先要将数据沿 α 方向和垂直 α 方向进行内插重排。这样内插重排后三维数据体的水平切片将是某种菱形,纵、横测线长短不一。给处理带来不方便。如果仍要按原坐标进行三维叠前偏移处理,则此时必须用(5.3.22)式进行偏移。

2. 积分法叠前时间偏移

用 Kirchhoff 积分法进行叠前偏移,一般在共炮点道集上进行。比在其它道集上进行叠前偏移要方便些。对二维和三维叠前偏移做法是一致的。

该方法的步骤是,首先将共炮点道集记录从接收点上向地下外推。外推时要先确定本道集可能产生反射波的地下空间范围。这个范围是可以根据倾角、记录长度和道集的水平范围估算的。这个过程实际上是一个估算偏移孔径的反过程。如果把范围估计太大,一般会耗费计算工作量,还会造成较多的偏移噪声背景。如果把范围估计得太小,又会把反射界面丢失。因此对向地下延拓的空间范围做一些模拟估算是必要的。外推时使用的方程仍为一般 Kirchhoff 积分式

$$u(x,y,z,t) = \frac{-1}{2\pi}\iint\limits_A \left\{\frac{\cos\theta}{Rv}\left[\frac{v}{R}u\left(x_0,y_0,0,t+\frac{R}{v}\right) + \frac{\partial u\left(x_0,y_0,0,t+\frac{R}{v}\right)}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.23}$$

式中 $\cos\theta = z/R = z/[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{1/2}$;

R 为从地下(x,y,z)点到地面点$(x_0,y_0,z_0=0)$的距离。

这样求出的结果,等于从地面某个炮点激发,在地下(x,y,z)点上接收的反射波记录。在这个记录上有(x,y,z)点产生的反射波和 z 深度以下的界面产生的反射波。我们应当做的是把这个点(x,y,z)的反射波放到这个点上。但是,在这个点的记录还有很多其它深度点上的反射波。因此,如何从这个点用积分公式延拓计算出地震道 $u(x,y,z,t)$,并从中取出用于在这点成像的波场值,这就是下一步的工作。

第二步,我们计算从炮点 O 到地下 $R(x,z)$点的地震波入射射线的走时 t_d。这可以用均方根速度 v_{rms}去除炮点至地下 R 点的距离近似求出。或者用射线追踪法求,就更准确。用求出的下行波的走时 t_d 到 $u(x,y,z,t)$的延拓记录的 t_d 时刻取出波场值做为该点的成像值。

第三步,将所有的深度点上的延拓波场都如第二步那样提取成像值,组成偏移剖面就完成了一个炮道集的 Kirchhoff 积分法偏移。

第四步，将所有的炮道集记录都做过三步处理后进行按地面点相重合的记录相叠加的原则进行叠加，即完成了叠前时间偏移。

4.3.2 叠前深度偏移

叠前深度偏移概念在80年代初已经提出，但由于计算机技术条件的限制，一直未能实现。就是对今天的计算机环境来说，叠前深度偏移仍然是一个巨大的工作量。特别是，在进行叠前深度偏移之前和过程中对速度模型精度的要求比时间偏移高多了。而在偏移的同时要解决高精度的速度模型问题，工作量会更大。自从在墨西哥湾用叠前深度偏移解决了其它偏移未能解决的盐丘下方的储层反射波的成像问题之后（Rateliff et al.，1992），引起了人们对叠前深度偏移的关注，促进了它的发展。我国的古潜山及复杂断块区的最佳成像都有赖于叠前深度偏移的应用。我们在讨论叠后深度偏移时已经指出，深度偏移比时间偏移优越之处在于它将地震波传播中的折射效应考虑进来了。折射作用又与层速度的空间分布有直接联系。因此，在深度偏移中要解决速度模型问题。

关于速度-深度模型的建立（杨长春，1996）基本上是从初始模型开始，通过深度偏移分层研究速度，对初始模型进行验证，得到宏观速度变化的分层速度－深度模型。下一步是用反射层析成像方法研究速度，得到更详细的速度－深度模型。反射层析成像的方法就是根据分层的速度模型用射线追踪计算理论地震波走时与原始的实际记录的到达时的差做最小平方拟合（Stork et at.，1991）反演出反射界面和层速度的分布函数。将此结果用VSP观测资料和钻井资料做约束，迭代生成详细的速度－深度模型。在此详细的速度－深度模型基础上进行叠前深度偏移。从偏移的实际数据中抽取共反射点道集，对道集中各道的反射地震波的同相性进行分析。对同相性不好的反射点进行偏移域反射层析成像的速度－深度反演。然后在其它约束条件下做出高精度的速度－深度模型。

叠前深度偏移可以用有限差分法和Kirchhoff积分法进行。但目前实用中更多的是采用积分法。因为它具有快速以及射线追踪可直观监视等特点。而且它是在炮道集上做的，这样可以更少的使用机器内存的存储空间。对于有限差分法来说，在其它域做，如共炮检距域更好些。叠前深度偏移的方法基本上可以在二维和三维上同样地进行，只是在三维条件下工作量和各种计算技术有特殊的要求和困难。下面分别对有限差分法叠前深度偏移和积分法叠前深度偏移进行阐述。

1. *有限差分法叠前深度偏移*

(1) 二维叠前深度偏移

本方法的原理是从二维叠前时间偏移的（5.3.17）式出发，用浮动坐标系 $x' = x, z' = z$ 和 $\tau = \int 2\mathrm{d}z/v(z), t' = t + \tau$ 对该式进行坐标变换，可导出下面的用于叠前深度偏移的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\left(1 - \frac{V^2(\tau)}{V^2(x)}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2}$$

$$+ \frac{V(x)V(\tau)}{8}\left(1 + \frac{4h^2}{V^2 \omega t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (5.3.24)$$

式中 $V(x) = v(x, z)$；

$V(\tau)$ 为浮动坐标的参考速度，它是 τ 的函数，$\tau = 2z/V(z)$。

用有限差分法直接解（5.3.24）式有困难，所以我们要进行深度方向的分裂。分裂的方法如下。

将(5.3.24)式由时－空域变换到频率－波数域后，可得它的象征方程为

$$k_\tau\omega+\frac{V(x)}{2V(\tau)}k_\tau+\frac{V(x)}{2V(\tau)}\left(1-\frac{V^2(\tau)}{V(x)}\right)\omega^2+\frac{V(x)V(\tau)}{8}\left(1+\frac{4h^2}{V^2(x)t_n^2}\right)k_x^2=0 \tag{5.3.25}$$

或简写成二阶代数方程式为

$$k_\tau^2+2k_\tau\omega+ak_x^2+(1-b^2)\omega^2=0 \tag{5.3.26}$$

式中　$a=(v^2(\tau)/4)[1+(4h^2/v^2t_n^2)]$；

　　　$b=v(z)/v(x)$。

对(5.3.26)式求代数方程的根为

$$k_\tau=-\omega\pm\sqrt{b^2\omega^2-ak_x^2} \tag{5.3.27}$$

将上式改写为

$$k_\tau=-\omega+b\omega-b\omega\pm\sqrt{b^2\omega^2-ak_x^2} \tag{5.3.28}$$

再将上述傅立叶算子作用于波场的傅氏变换 $\tilde{u}(k_x,k_\tau,\omega)$ 上，得

$$\mathrm{i}k_\tau\tilde{u}=\mathrm{i}(-\omega+b\omega-b\omega\pm\sqrt{b^2\omega^2-ak_x^2})\tilde{u}$$

上式又可写为(取＋号，表示上行波方程)

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}=-\mathrm{i}(1-b)\omega\tilde{u}-\mathrm{i}(\omega+\sqrt{b^2\omega^2-ak_x^2})\tilde{u} \tag{5.3.29}$$

上式经过从 τ 到 $\tau+\Delta\tau$ 的积分，可得

$$\tilde{u}(\tau+\Delta\tau)=\tilde{u}(\tau)\exp[-\mathrm{i}(1-b)\Delta\tau]\exp[-\mathrm{i}(\omega+\sqrt{b^2\omega^2-ak_x^2})\Delta\tau] \tag{5.3.30}$$

应用分步计算的方法(马在田，1989)最后可求出分裂后的方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+\left(1-\frac{V(\tau)}{V(x)}\right)\frac{\partial u}{\partial t_n}=0 \tag{5.3.31a}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t\partial\tau}+\frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}+\frac{v(\tau)V(x)}{8}\left(1+\frac{4h^2}{v^2(x)t_n^2}\right)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0 \tag{5.3.31b}$$

(5.3.31a)式与叠后深度偏移方程的折射项完全一致。(5.3.31b)式除了系数外与全倾角波动方程也一致。此式可以化为单程波高阶方程来解。我们将(5.3.31b)用三阶分裂方程来代替，它表示为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2\partial\tau}+\frac{b}{2}[V(\tau)V(x)-V^2(x)]\left(1+\frac{4h^2}{v^2(x)t_n^2}\right)\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}$$
$$+av^2(x)\left(1+\frac{4h^2}{V^2(x)t_n^2}\right)\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial\tau}=0 \tag{5.3.31c}$$

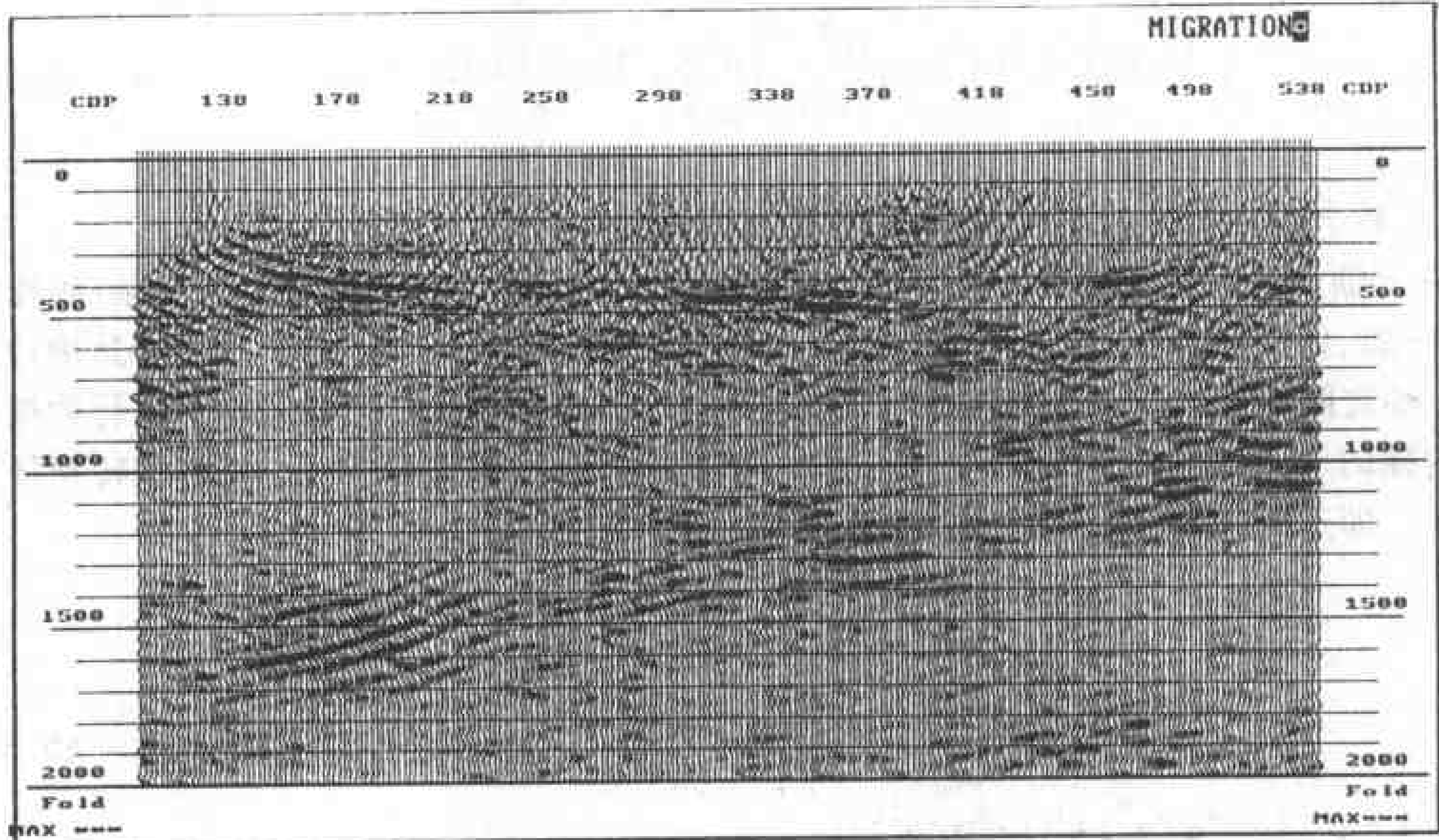
(5.3.31a)式与(5.3.31c)式组成的方程组即为叠前偏移用的波场外推公式。(5.3.31b)式也可以用其它方法来求解。例如，可以用函数替代法(马在田，1989)解此方程。此时，(5.3.31b)式可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=Q \tag{5.3.32a}$$

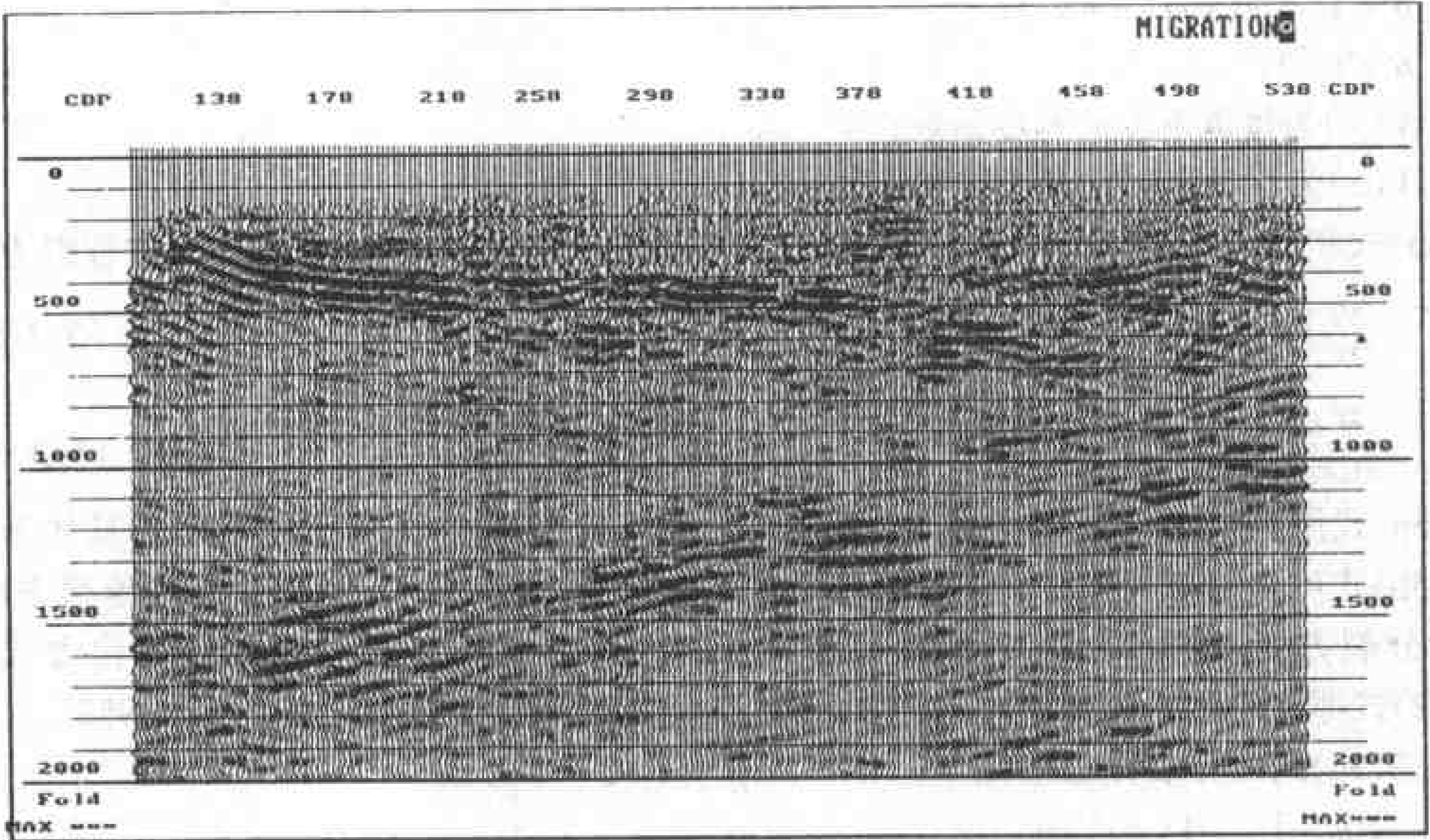
$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial Q}{\partial\tau}+\frac{V(\tau)V(x)}{8}\left(1+\frac{4h^2}{V^2(x)t_n^2}\right)\frac{\partial^2u}{\partial t_n^2}=0 \tag{5.3.32b}$$

(5.3.32a)式，(5.3.32b)式和(5.3.31a)式联合组成叠前深度偏移公式。

我们用有限差分法叠前深度偏移方法处理了实际地震资料，如图 5.3.4 所示。图 5.3.4a 是深度偏移剖面，图 5.3.4b 是时间偏移剖面。从两图的对比中可以看出，构造的总体形态没有大的变化，但具体反射层段有明显改善。另外，由于速度的改变，层与层之间的厚度及倾角都有较大的变化。



(a)



(b)

图 5.3.4　二维叠前深度偏移与二维叠前时间偏移剖面对比图

(a) 叠前深度偏移剖面图；(b) 叠前时间偏移剖面图

(2) 三维叠前深度偏移方法

我们从三维叠前时间偏移用的微分方程(5.3.23)式出发,推导用于三维叠前深度偏移的情况。将(5.3.24)式进行浮动坐标变换,得到下面的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\left(1 - \frac{V^2(\tau)}{V^2(x)}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2}$$

$$+ \frac{V(x)V(\tau)}{8}\left(1 + \frac{4h^2}{V^2(x)t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V(x)V(\tau)}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.3.33}$$

式中, $V(x) = v(x,y,z)$;

$V(\tau)$为浮动坐标的参考速度,它是 z 的函数。

上式中 x 轴是规定沿着炮检距方向的。如果我们的炮检距方向不与选定的 x 轴(纵测线方向)相一致,则要做数据在(x, y)平面上 α 角方向的有规律重排。这个 α 角即是炮检距方向与x 轴之间的夹角。数据的重排伴有内插是一个很麻烦的工作。如果不想进行数据的重排和内插的工作,就得进行坐标变换。将只满足 x 与炮检距平行的(5.3.38)式转到任意坐标系中。即进行(5.3.25)式那样的坐标变换。坐标变换后的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\left(1 - \frac{V^2(\tau)}{V^2(x)}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} + \frac{V(x)V(\tau)}{8A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{V(x)V(\tau)}{8B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{V(x)V(\tau)}{8C}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{5.3.34}$$

式中 $A = b^2[(\cos^2\alpha/a^2) + (\sin^2\alpha/b^2)]$;

$B = b^2[(\sin^2\alpha/a^2) + (\cos^2\alpha/b^2)]$;

$C = b^2[-(\sin^2\alpha/a^2) + (\sin^2\alpha/b^2)]$;

$a = 1/2[v(x)t_n^2 + 4h^2]$;

$b = t_n/2$;

$V(x)$为每道下方的速度函数;

$V(z)$为浮动坐标的参考速度函数。

(5.3.33)式和(5.3.34)式都可以分裂为两个方程进行计算。(5.3.33)式的分裂方程组为:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{V(\tau)}{v(x)}\right)\frac{\partial u}{\partial t_n} = 0 \tag{5.3.35a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{V(x)V(\tau)}{8}\left(1 + \frac{4h^2}{V^2(x)t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V(x)V(\tau)}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.3.35b}$$

(5.3.35a)式用有限差分求解的算法,在叠后三维深度偏移方法的论述中已有具体算式。(5.3.35b)式可以用阶数分裂法导出相应的方程或方程组求解,例如用叠后深度偏移方法中的三阶分裂方程那样的求解方法进行求解。(5.3.35b)式也可以通过函数替代方式,如(5.3.32)式那样的形式进行计算,具体的计算方法可参阅有关文献(马在田等,1988)。

(5.3.34)式的分裂方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{V(\tau)}{V(x)}\right)\frac{\partial u}{\partial t_n} = 0 \tag{5.3.36a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + \frac{V(x)}{2v(\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{V(\tau)V(x)}{8}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \tag{5.3.36b}$$

为了计算上的方便,(5.3.36b)式还须进一步化简。如前所述,(5.3.36b)式可用高阶方程组逼近,或者用函数替换法分解为两个方程。如果采用函数替换法,则(5.3.36b)式可写为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=Q \tag{5.3.37a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{V(x)}{2V(\tau)}\frac{\partial Q}{\partial \tau}+\frac{V(\tau)V(x)}{8}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=0 \tag{5.3.37b}$$

(5.3.37b)式的计算不可能再采用维数分裂方法，这里能采用的最好的计算方法是 P-R 格式（李荣华等，1980）。因为有 x 和 y 的导数耦合项，因此不能做维数分裂。在此以前的三维偏移方程，都不必用 P-R 格式计算。这里提出的有限差分法的叠前深度偏移只是一个理论分析，尚未进行具体计算。

2. Kirchhoff 积分法叠前深度偏移

当前使用积分法进行叠前深度偏移比较普遍，因为它具有快速和通过射线追踪完成射线折射功能的优点，使通过复杂地质体的地震波能够比较准确地描述。

(1) 成像公式

用于波场反向外推的积分式和三维叠前时间偏移的公式在总体上是一致的。但在时间偏移中一般不进行射线追踪。因此我们从 Kirchhoff 积分式出发计算反向外推的波场 $u(r,t)$为

$$u(r,t)=\frac{1}{2\pi}\iint_A \cos\phi\left[\frac{1}{R(r,r_g)}+\frac{1}{vR(r,r_g)}\frac{\partial}{\partial t}\right]u(r_g,t+t(r,r_g)+t(r,r_s))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.38}$$

式中　r 表示地下任一点的三维坐标；

$\cos\varphi = z/R$；

r_g 为地面上地震道的坐标$(x_g,\ y_g,\ z_g=0)$；

r_s 为炮点的坐标，一般取原点；

$R(r,r_g)$为从 r 到 r_g 的射线距离；v 为速度；

$t(r,\ r_g)$为从反射点（成像点）至地面接收点的走时；

$t(r,\ r_s)$为从震源点到反射点（成像点）的走时。

当 $R(r,r_g)$很大或 $kR(r,r_g)\gg 1$ 时，其中 $k=\omega/v$ 为波数，上式可简化为（Berkhout，1983）

$$u(r,t)=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \frac{\cos}{2\pi R(r,r_g)}u(r_g,t+t(r,r_g)+t(r,r_s))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.39}$$

上式是波场延拓的计算公式。我们关心的是计算偏移成像点的波场，这时我们只从外推的记录上取时间 $t=t(r,\ r_g)+t(r,\ r_s)$的波场值，即为 r 点的成像振幅值，用公式表示为

$$u(r)=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \frac{\cos\phi}{2\pi R(r,r_g)}u(r_g,t(r,r_g)+t(r,r_s))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.40}$$

如果我们将反射系数引进积分式，上式可表式为

$$u(r)=\frac{1}{2\pi}\iint \frac{1}{v}\frac{A(r,r_g)}{A(r,r_s)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}R(r,r_g)}\frac{\partial}{\partial t}u[r_g,t(r,r_g)+t(r,r_s)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.41}$$

式中　$R(r)$表示反射系数加权后的偏移成像点的波场；

$A(r,\ r_s)$表示从震源到成像点（反射点）的振幅；

$A(r,\ r_g)$表示从成像点到接收点的振幅。

(2) 射线追踪方法

用积分法进行叠前深度偏移时,关键的技术是做好射线追踪。射线追踪的方法很多,但在三维空间能够快速地追踪射线还是有许多技术问题的。

三维射线追踪的理论分析

考虑由均匀的分层介质组成的下半空间,分界面是任意的。我们用右手坐标系(x_1, x_2, x_3)来描绘所有界面和射线。设已知点 $S(x_1, x_2, x_3)$的坐标和从 S 发出的射线的单位向量 I 的方向余弦(i_1, i_2, i_3)。如图 5.3.5 所示。S 可以是震源,也可以是一个界面上 P 点的射线,即寻找 P 点的坐标,从 S 点到 P 点的长度,走时和从 P 点发出的射线(反射或透射)的方向余弦。以后的过程是继续以上的内容,一直追踪到射线的终点(Shah, 1973)。

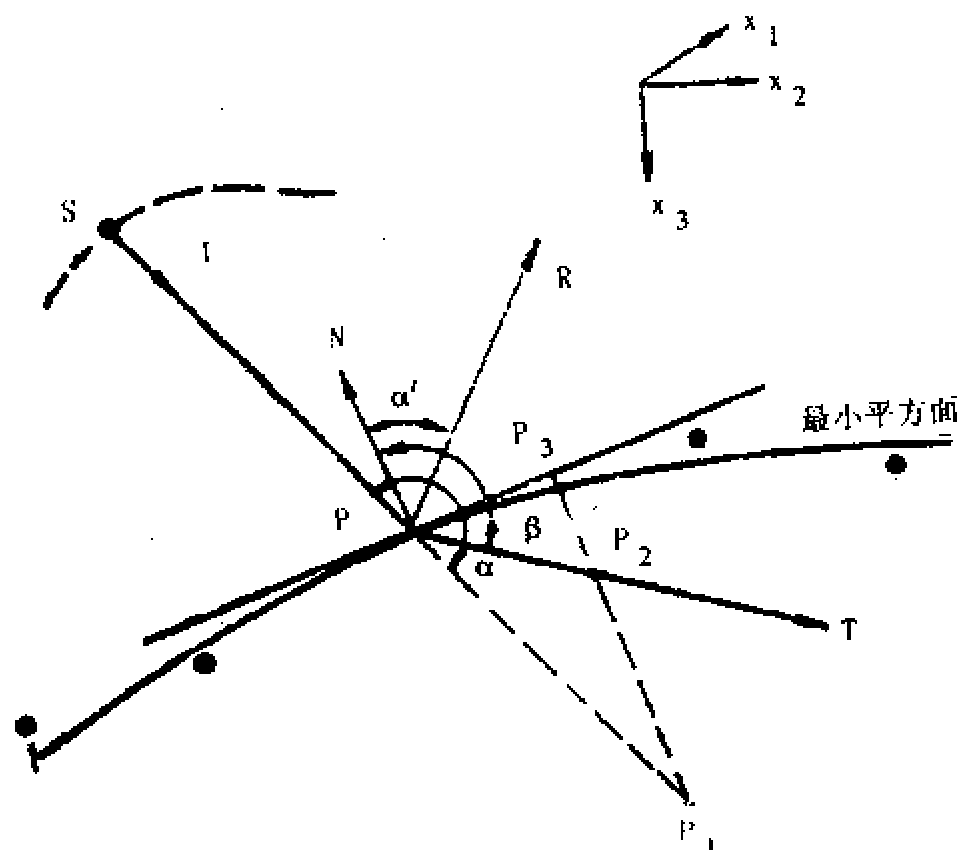


图 5.3.5 人射平面上各种射线的关系

追踪射线的步骤分为,求界面空间的方程,求 S 点到 P 点的距离,求 P 点的坐标,求界面上 P 点的法线,求 P 点的人射角,求反射角和折射角,求透射射线或反射射线的方程等七个步骤。由于我们不考虑多次波,所以我们一般不考虑反射射线方程。每个步骤的具体计算方法如下。

第一步,求界面的方程

首先要求出表示界面位置的方程 $\phi(x_1, x_2, x_3)=0$。这个方程可以是线性的,也可以是高阶非线性的或者是用任意样条函数表示的复杂曲面。这里只以二次曲面为例来讨论。设二次曲面为

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+C=0 \quad (5.3.42)$$

这个方程的系数可以用实际数据做最小二乘法拟合来确定。(5.3.42)式写成矩阵形式为

$$\phi(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+C=0 \quad (5.3.43)$$

或者缩写为

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + C = 0$$

式中　$\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵；

　　$\boldsymbol{B}$ 为一维系数矩阵；

　　$\boldsymbol{X}$ 为坐标向量；

　　$\boldsymbol{C}$ 为常数。

实际上令 $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ 也能满足实际需要了。当 $\boldsymbol{A}$ 为零时是倾斜平界面的情况。

第二步，求 S 点到 P 点的长度

我们假设在一层内速度是一致的，P 点就位于从 S 点出发的单位方向向量为 I 的直线上，则有

$$\boldsymbol{P} - \boldsymbol{S} = l\boldsymbol{I} \tag{5.3.44a}$$

和

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P} + C = 0 \tag{5.3.44b}$$

式中　$\boldsymbol{P}$ 为 P 点的座标向量；

　　l 为从 S 点到 P 点的长度。

将(5.3.44a)式代入(5.3.44b)式得

$$l^2(I^{\mathrm{T}}AI) + 2l(B^{\mathrm{T}}I/2) + (S^{\mathrm{T}}AS + B^{\mathrm{T}}S + C) = 0 \tag{5.3.45}$$

式中　$\boldsymbol{S}$ 为 s 点的坐标向量。

上式是一个变量 l 的二次方程。如果我们用 C_1、C_2 和 C_3 表示上式中相应的系数，则方程的解可写为

$$l = -C_2/C_1 \pm (C_2/C_1)\sqrt{1 - C_1C_3/C_2^2} \tag{5.3.46}$$

式中　$C_1 = I^{\mathrm{T}}AI$；

　　$C_2 = B^{\mathrm{T}}I/2$；

　　$C_3 = S^{\mathrm{T}}AS + B^{\mathrm{T}}S + c$。

如果射线与界面相交，两个根均为实根。如果界面是凸的(如图 5－13)，两根均为正，其中小的一个根为所要求之根。如果界面是凹的，要选正根，去掉负根。如果 C_1 很小(近于平面)，上式不能给出精确解。应当用下式求解

$$l = -\frac{B^{T}S + C}{B^{\mathrm{T}}I} \tag{5.3.47}$$

第三步，求 P 点坐标。

已知 l，可用(5.3.44a)式求出 P 点之坐标。

第四步，求界面上 P 点之法线。

P 点上法线向量 N 可取(5.3.43)式的梯度，并把 P 点的坐标代入而得。我们把 N 的方向指向上方(图 5－13)或者说 $\partial\phi/\partial x_3$ 总为负，则有

$$\mathrm{grad}\phi = 2AP + B \tag{5.3.48}$$

因为 $\boldsymbol{N}$ 是单位向量，所以有

$$\boldsymbol{N} = \mathrm{grad}\phi/\sqrt{(\mathrm{grad}\phi)^{T}\mathrm{grad}\phi} \tag{5.3.49}$$

第五步，求入射角。

入射角 α 用单位向量 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的点积求得

$$\cos\alpha = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} \tag{5.3.50}$$

对于下行射线有 $90° < \alpha \leqslant 180°$；对于上行射线有 $0° \leqslant \alpha < 90°$。

第六步，求斯奈尔定律表达式。

反射射线或透射线必位于由入射向量 $\boldsymbol{I}$ 和法线向量 N 决定的入射平面上。各种射线与法线之间所成的角度有下列关系

$$\frac{\sin\alpha}{v_i} = \frac{\sin\alpha'}{v_r} = \frac{\sin\beta}{v_t} \tag{5.3.51}$$

式中 v_i——入射波的速度；

v_r——反射波的速度；

v_t——透射波的速度。

在固体层中 v_i、v_r 和 v_t 可以是纵波速度也可以是横波速度，这要由所追踪波的类型而定。α 为入射角，α' 为反射角，β 为折射角。

第七步，求透射线和反射线的方程。

我们利用透射线和反射线位于入射面的情况来求它们的方程。

首先考察透射线 T，因为 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{N}$ 位于同一平面上。我们在 $\boldsymbol{I}$ 方向做辅助点 P_1，从 P_1 点做 N 的平行线，交折射线 T 于 P_2，用向量计算可得

$$(PP_2)T = (PP_1)\boldsymbol{I} + (P_1P_2)\boldsymbol{N}$$

故得

$$T = \frac{(PP_1)\boldsymbol{I} + (P_1P_2)\boldsymbol{N}}{(PP_2)} \tag{5.3.52}$$

如果令 (PP_1) = 单位长度，则

$$PP_3 = \sin\alpha,\ PP_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

和

$$P_1P_2 = P_1P_3 - P_3P_2 = -\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = -\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta} \tag{5.3.53}$$

因此，(5.3.53)式变为

$$T = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\boldsymbol{I} - \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\boldsymbol{N} \tag{5.3.54}$$

或者，应用(5.3.51)式，求得

$$T = \frac{v_t}{v_i}\boldsymbol{I} - \left(\frac{v_t}{v_i}\cos\alpha - \cos\beta\right)\boldsymbol{N} \tag{5.3.55}$$

反射线的方程可用 α' 代替 β，用 v_r 代替 v_t 求得

$$R = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\boldsymbol{I} - \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin\alpha}\boldsymbol{N} = \frac{v_r}{v_i}\boldsymbol{II} - \left(\frac{v_r}{v_i}\cos\alpha - \cos\alpha'\right)\boldsymbol{N} \tag{5.3.56}$$

当反射波是纵波时，$v_x = v_i$，我们得反射线的方程为

$$R_p = \boldsymbol{I} - (\cos\alpha - \cos\alpha')\boldsymbol{N} \tag{5.3.57}$$

当层内的速度为连续变化的情况时，射线将是连续的曲线(图 5.3.6)。设某一点的切线为向量 $\boldsymbol{I}$，下一个 ds 段上的切线变为 $\boldsymbol{I}+\Delta\boldsymbol{I}$。由连续速度函数 $v(x_1,\ x_2,\ x_3)$的梯度确定任意点的法线向量，如图(5.3.6)式所示。它的符号这样确定，因

$$N = \pm \frac{\text{grad}v}{\| \text{grad}v \|} \tag{5.3.58}$$

N 始终指向上方，即当 $\partial v/\partial x_3$ 为正时上式选负号。$\partial v/\partial x_3$ 为负时，上式选正号。$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 组成的入射角为 α，在 ds 距离上为 $\alpha + \Delta\alpha$。

用前面的标记，我们根据斯奈尔定律可得

$$\boldsymbol{I} + \Delta\boldsymbol{I} = \left(\frac{v + \Delta v}{v}\right)\boldsymbol{I} - \left(\frac{\sin\Delta\alpha}{\sin\alpha}\right)\boldsymbol{N} \tag{5.3.59}$$

在极限情况下，可以认为 $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$，我们得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{I} - \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\sin\alpha}\right)\boldsymbol{N} \tag{5.3.60}$$

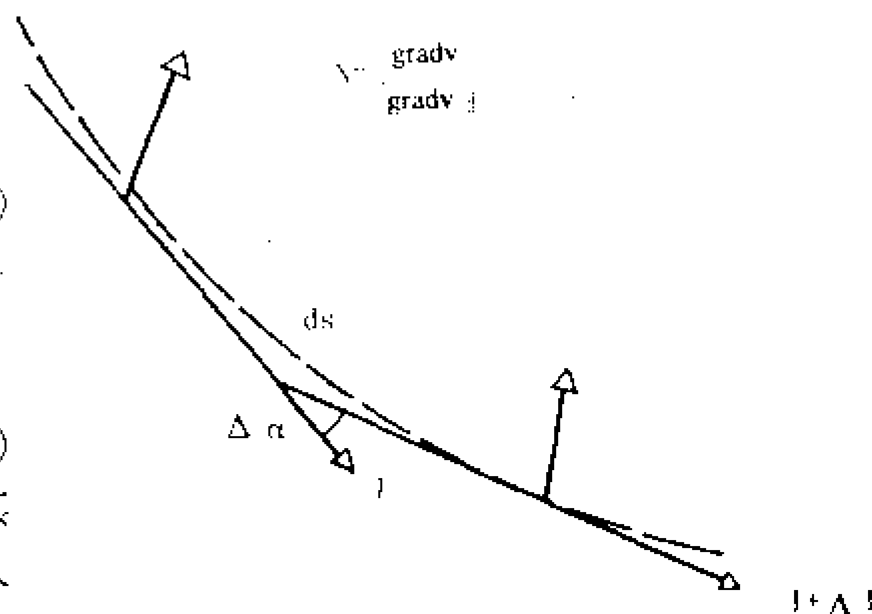


图 5.3.6 连续速度变化的射线

根据微分几何知 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}s$ 是曲率向量，其值 K 等于 $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}s$。这个曲率向量也位于入射平面上，并且是切向量 $\boldsymbol{I}$ 的法线。所以有

$$\boldsymbol{I}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{N})/\sin\alpha = 0$$

因为 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{N} = \cos\alpha$，我们有

$$k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = (\tan\alpha / v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \tag{5.3.61}$$

根据斯奈尔定律

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v} = \frac{\tan\alpha}{v}$$

所以(5.3.61)式是成立的。将(5.3.61)式代入(5.3.60)式得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}/\cos\alpha) \tag{5.3.62a}$$

任意点的坐标可表示为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{I} \tag{5.3.62b}$$

我们求全走时，要将上式写成时间变量的方程。在上面的方程组中，我们将用到下式

$$\text{grad}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(N/\cos\alpha)$$

分量表示式（下标 $j = 1, 2, 3$）

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = vi_j \tag{5.3.6a}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}i_j}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)i_j - \frac{\partial v}{\partial x_j} \tag{5.3.63b}$$

知道了区域中的 i_j, x_j 和速度函数,我们就可以一步一步地求出上面方程的积分。(5.3.63)式的六个一阶方程可表示为三个二阶方程,也可以直接从费马和惠更斯原理导出。

最后,我们要说明,上述射线追踪过程是根据已知震源的坐标 S 和发射射线的方向余弦 $\boldsymbol{I}$ 解初值问题。我们在计算反射地震图时要解边值问题,这时已知条件是源点坐标 S 和接收点坐标 G,它们一般位于地面上。这时就要给出一系列的 $\boldsymbol{I}$ 值进行迭代,一直使到达 G 点的射线旅行时最小为止。当在真解附近时距曲线为连续函数时可用牛顿-拉弗逊法得到满意的拟合。还要指出,初始射线向量 $\boldsymbol{I}$ 只有两个分量是未知的,第三个分量是固定的,因为 $\boldsymbol{I}$ 是一个单位向量。因此,我们可用牛顿二维公式去拟合。

对于每个层或断块内部为非均匀介质时,可用下述方法进行射线追踪(Longan,1985)。假设离散化后的体元内的波速梯度为小常数,程函方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left[s(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\right] = \nabla_r s(r) \tag{5.3.64}$$

式中 $s(r)$为慢度;

l 为射线弧长。

则体元内的射线路径的积分解为

$$r(l) = r_0 + n_0\int_0^l \frac{s(r_0)}{s(r')}\mathrm{d}l_0' + \int_0^l \frac{1}{s(r')}\int \nabla_r s(r')\mathrm{d}l''\mathrm{d}l' \tag{5.3.65}$$

式中 r_0 和 n_0 分别表示弧长 l 为零时的位置和初始方向。

当单元内的介质慢度梯度为常数 G 时,有

$$G = \frac{\nabla_r s(r)}{s(r)} \tag{5.3.66}$$

将(5.3.66)式代入(5.3.65)式,便可近似地求出积分。

令

$$k = G\cdot n_0$$

和

$$\mu = \frac{G}{n_0} \tag{5.3.67}$$

则求出射线路径的位置和射线方向以及走时的表达式如下:

$$r_i(l) = r_{0i} + n_{0i}\left[l + \frac{l^2}{2}(M_i - k) + \frac{l^3}{6}(3k^2 - G^2 - 2k\mu_i)\right] \tag{5.3.68}$$

为射线的位矢函数

$$n_i(l) = n_{0i}\left[1 + l(\mu_i - k) + \frac{l^2}{2}(3k^2 - G^2 - 2k\mu_i\right] \tag{5.3.69}$$

为射线的方向函数

$$t(l) = ls_0\left[1 + \frac{lk}{2} + \frac{l^2}{6}(G^2 - K^2)\right] \tag{5.3.70}$$

为走时函数。

网格剖分

在射线追踪时,对于地质模型要进行网格化,特别是在速度有空间变化和复杂地质体区,网格剖分是一个很重要的问题。最简单的办法就是使用规则的方形网格。在复杂构造地区必须大量细密的方形网格,才能模拟复杂的地质体。如果其中有简单的大块均匀区域,

也要对其进行规则剖分。因此，增加了计算工作量。现在，已经有人提出，抛弃传统的规则方形网格的剖分方式，采用根据地质模型的内部几何结构进行自动剖分(徐升等,1966)，并在射线追踪过程中网格的节点位置可以做微小的变动。即采用微变网格的剖分方法。这样的网格剖分具有用机时间少的优点。

自动剖分就是将非水平界面，通过一种层面变换，将曲面变为水平面。设有 n 个界面，其表达式的一般式为

$$f_i(x,y,z)=0$$

$$i=1,2,3,\cdots,n$$

对这些层面分别做曲面展平变换，用公式表示为

$$F_i(\xi,\zeta,\eta)=T_i(x,y,z;\xi,\zeta,\eta)f_i(x,y,z)$$

经过变换后 $F_i(\xi,\zeta,\eta)$ 可表示为

$$\eta_i=\mathrm{cons}\,t_0$$

在二维情况下，如图 5.3.7 所示。由于在(ξ,ζ,η)坐标系中，层面为水平，可用线性内插自动剖分，很容易剖分成矩形单元。由于展平变换是可逆的，所以可将 $\eta_i=\mathrm{cons}\,t_0$ 的各个界面反变换回到$(x,\ y,\ z)$域中。这样的剖分可以保证界面处于两个网格体元的边界上，这对于

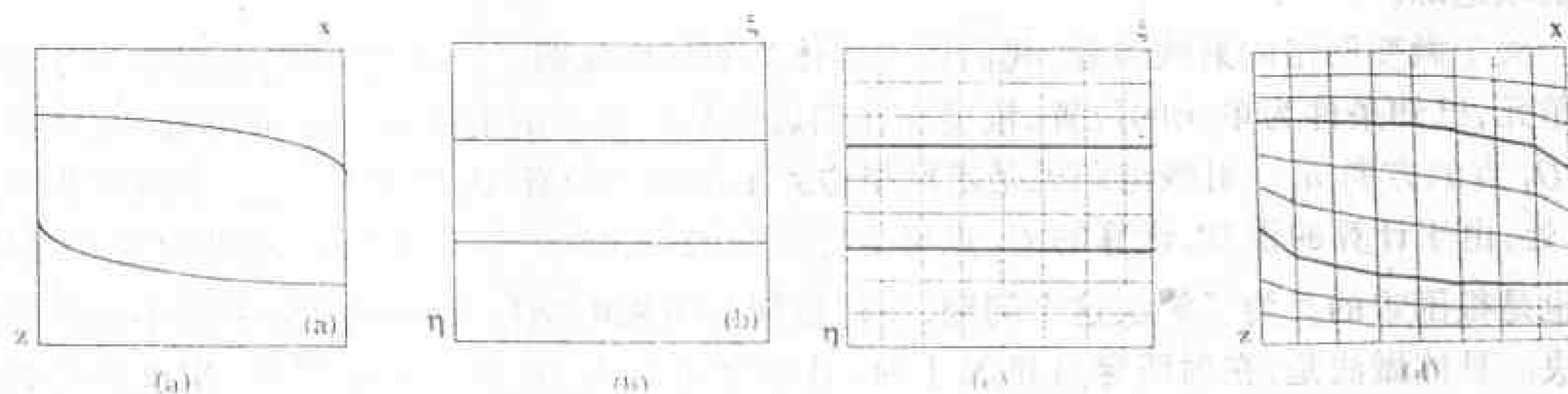
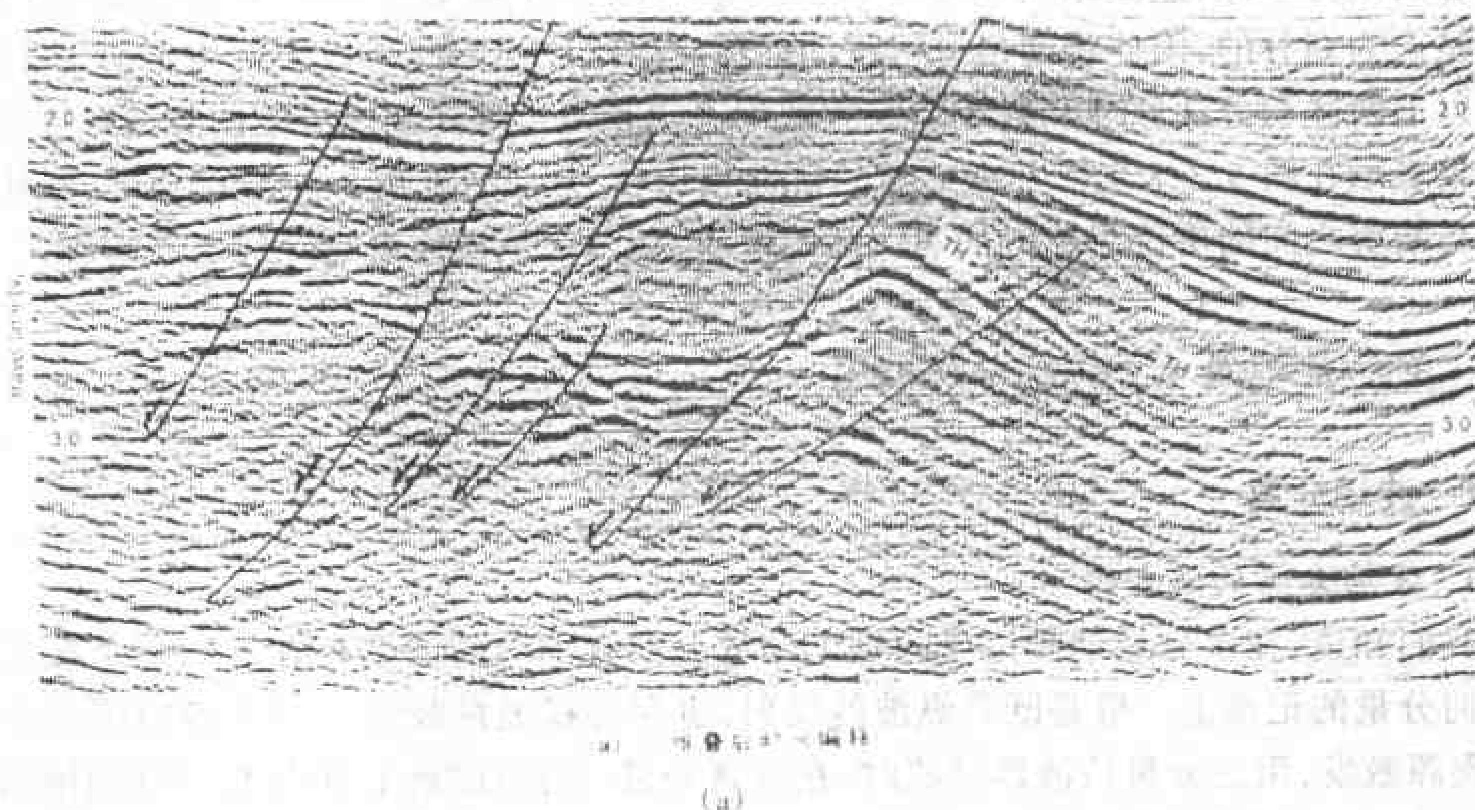
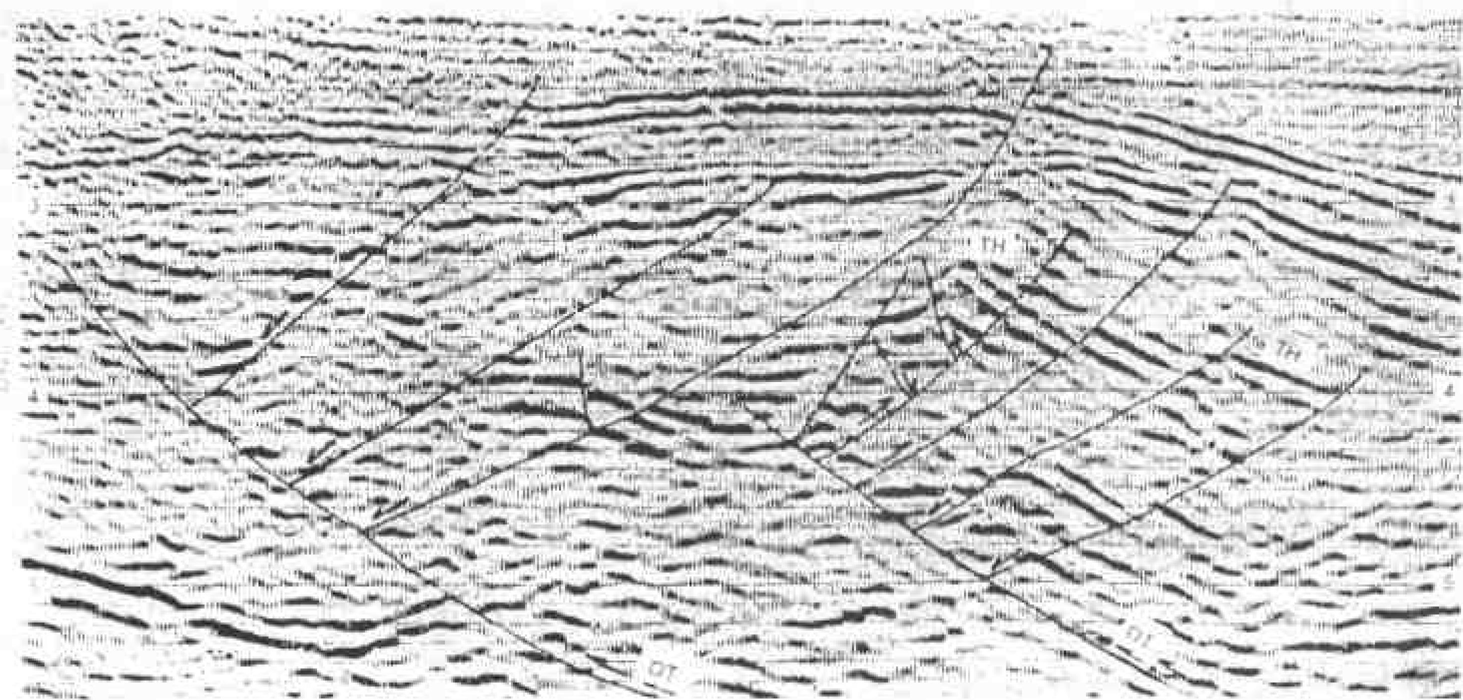


图 5.3.7 二维曲面展平变换示意图(徐升等)

(a) 二层模型;(b) 展开变换后模型;(c) 空间自动剖分;(d) 反变换



(a)



(b)

图 5.3.8　三维叠前深度偏移与叠后时间偏移对比图(杨长春,1996)

做 Snell 定律处理是非常方便的。经过这样的剖分,单元表现为任意多边体,这就有利于变网格射线追踪。

关于微变网格的射线追踪,我们以二维体为例加以说明。在进行射线追踪时,对于四边形单元,已知条件为单元的位置、慢度和在四边形某一边上的射线入口点的位置 O_1 和射线在 O_1 点的方向 n_1。射线追踪就是求网格边界上出口点位置 O_2 和方向 n_2。射线在出口点 O_2 处,由于计算的误差,计算的 O_2 点可能会不与边界相交。但为了相交,要求计算很精确,这也是很困难的。为了解决这个问题,使初始剖分出来的网格在射线追踪中做小的变动来解决。具体做法是,在射线穿过单元Ⅰ时,其理论出口为 O,由于计算误差,实求的位置在 O'。这时如果将单元Ⅱ的位置 ABCD 微变到 $A'B'CD$,使得 O' 准确的落在 $A'B'$ 线上。此时 O' 的位置和方向就做为单元Ⅱ的射线入射点的位置和方向。这就是实际中把 $A'B'CD$ 作为单元Ⅱ的剖分单元,速度结构不变。微变网格可减少计算 O' 的迭代次数,提高计算速度。网格是人为划分的,因此将网格进行扰动以适应射线比用射线来适应网格更便于实用。

以上所述积分法原理和射线追踪方法用于实际的二维复杂地质体的叠前深度偏移的处理结果表示在图 5.3.8 上。与叠后时间剖面相比较,叠前深度偏移在断点清晰,断块划分及断块与断块之间的层位对比方面有明显的改善,使复杂地质体有更好的地质解释。

5.4　多分量地震资料的偏移处理

5.4.1　波场分离

1. 波场分离的必要性

我们知道,在多分量地震记录的每个分量上都有不同的波型存在。特别是在垂直分量和径向分量的记录上一般是既有纵波的反射,也存在横波的反射。当在各向同性介质中用 P 波震源激发,用三分量检波器接收时,在垂直分量(Z)的记录上既有 P－P 反射波的反射,又会存在 P-SV 反射波的记录。同理,在径向的水平分量(X)的记录上也存在 P-P 反射波和

*P-SV 反射波。这时，在横向分量（Y）*的记录上不应当有任何的反射波出现。但是，如果是三维构造或各向异性时，则会在横向分量（Y）上也会出现 qP 与 qSH 的反射波。在径向分量（X）上会出现 qP 和 qSV 波。当然，也可能是由表层不均匀引起的分量。对后一情况，目前我们尚不予考虑。现在我们更关心的是用二维构造的垂直分量（Z）和径向分量（X）的记录分解出 P-P 反射波和 P-SV 反射波。因为这是目前能够进行数据处理最有效的方法。虽然曾经有人提出不进行波场分离而直接用分量记录进行全波场成像，设想用弹性波振动的本构方程和运动方程进行逆时外推实现同时偏移成像。但是，实用起来是很困难的。况且我们不知道纵波速度和横波速度，这是偏移成像所必需的。而这些速度场也是要根据观测地震记录进行计算的。不做波场分离，这些速度场是无法求得的。所以在处理多波数据时首先要进行波场分离。这是当前唯一可行的办法。

2. 波场分离方法

波场分离方法已有不少，主要有 f-k 滤波法，偏振滤波法，最小平方法等。这里我们采用了波动方程法，f-k 域法和 τ-P 变换法进行了 P-P 波和 P-SV 波的波场分离。下面主要介绍时一空域波动方程法。该方法的原理阐述如下：

1. 均匀各向同性介质中纵、横波场分离

我们从下面的弹性波方程出发

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \rho x_i \tag{5.4.1}$$

式中 ρ 为密度；

λ 和 μ 为拉梅常数；

x_i 为外力分量；

θ 为体胀系数，即

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

在二维远场情况下，有

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

式中 u 为水平位移分量；

W 为垂直位移分量。

设 $x_i = 0$，则（5.4.1）式可表示为

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

对 u 和 W 进行关于 (x, z, t) 的三维傅立叶变换，则（5.1.2）式可表示为

$$\begin{aligned} v_s^2 k_z^2 \tilde{u} + (v_p^2 - v_s^2)_x k_z \tilde{w} + (v_p^2 k_x^2 - \omega^2)\tilde{u} = 0 \\ v_p^2 k_z^2 \tilde{u} + (v_p^2 - v_s^2)_x k_z \tilde{w} + (v_s^2 k_x^2 - \omega^2)\tilde{w} = 0 \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

式中 $v_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$，为纵波速度；

$v_s=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$,为横波速度;

$\tilde{u}$ 和 $\tilde{w}$,为水平位移和垂直位移的傅立叶变换。

要使(5.4.3)式有非常零解,必须满足

$$\det\begin{bmatrix} v_p^2k_x^2+v_s^2k_2^2-\omega^2 & (v_p^2-v_s^2)k_xk_z \\ (v_p^2-v_s^2)k_xk_z & v_p^2k_z^2+v_s^2k_x^2-\omega^2 \end{bmatrix}=0 \tag{5.4.4}$$

由(5.4.4)式求得

$$[v_p^2(k_x^2+k_z^2)-\omega^2][v_s^2(k_x^2+k_z^2)-\omega^2]=0 \tag{5.4.5}$$

上式即为弹性波方程的频散关系。

为了求解,我们要求出(5.4.4)式的特征值,由下式

$$\det[\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=0 \tag{5.4.6}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} v_p^2k_x^2+v_s^2k_z^2-\omega^2 & (v_p^2-v_s^2)k_xk_z \\ (v_p^2-v_s^2)k_xk_2 & v_p^2k_2^2+v_s^2k_x^2-\omega^2 \end{bmatrix}; \tag{5.4.7}$$

和 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩

由(5.4.6)式可得

$$[\lambda+\omega^2-v_p^2(k_x^2+k_z^2)][\lambda+\omega^2-v_s^2(k_x^2+k_z^2)]=0 \tag{5.4.8}$$

因此求得特征根为

$$\lambda_1=v_p^2(k_x^2+k_z^2)-\omega^2 \tag{5.4.9a}$$

$$\lambda_2=v_s^2(k_x^2+k_z^2)-\omega^2 \tag{5.4.9b}$$

求得的对应于纵、横波的特征根应满足:

$$k_{z,D}^P=-\frac{\omega}{v_p}\sqrt{1-\frac{v_p^2k_x^2}{\omega^2}} \qquad \text{对应下行纵波}$$

$$k_{z,u}^P=\frac{\omega}{v_p}\sqrt{1-\frac{v_p^2k_x^2}{\omega^2}} \qquad \text{对应上行纵波}$$

$$k_{z,D}^S=-\frac{\omega}{v_S}\sqrt{1-\frac{v_s^2k_x^2}{\omega^2}} \qquad \text{对应下行横波}$$

$$k_{z,u}^S=\frac{\omega}{v_S}\sqrt{1-\frac{v_s^2k_x^2}{\omega^2}} \qquad \text{对应上行纵波}$$

由特征矢量方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}=\lambda\boldsymbol{I} \tag{5.4.10}$$

获得对应特征根的特征矢量为

$$I_D^P=(k_x/k_{z,D}^p,1)^{\mathrm{T}} \tag{5.4.11a}$$

$$I_u^P=(k_x/k_{z,u}^p,1)^{\mathrm{T}} \tag{5.4.11b}$$

$$I_D^s=(1,k_x/k_{z,D}^s)^{\mathrm{T}} \tag{5.4.11c}$$

$$I_u^s=(1,k_x/k_{z,u}^s)^{\mathrm{T}} \tag{5.4.11d}$$

(5.4.11)式构成了(5.4.3)式的基本解系为

$$B(k_x, k_z, \omega) = AI_u^P + BI_u^s + CI_D^P + DI_D^s \tag{5.4.12}$$

式中 A, B, C 和 D 为系数。

由于我们关心的是上行波解，故只取前两项的解即可。由此我们可以导出分解后的上行纵(P)波和上行横(S)波为(张关泉等，1995)

$$\tilde{p} = k_x\tilde{u}\left[\frac{\omega}{v_s}\left(1 - \frac{v_s^2k_x^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} + \tilde{w} \tag{5.4.13a}$$

$$\tilde{s} = \tilde{u} - k_x\tilde{w}\left[\frac{\omega}{v_p}\left(1 - \frac{v_p^2k_x^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{5.4.13b}$$

令

$$\tilde{w}_a = k_x\tilde{u}\left[\frac{\omega}{v_s}\left(1 - \frac{v_s^2k_x^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{5.4.14a}$$

$$\tilde{u}_a = k_x\tilde{w}\left[\frac{\omega}{v_p}\left(1 - \frac{v_p^2k_x^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} \tag{5.4.14b}$$

(5.4.13)式可简化表示为

$$\tilde{p} = \tilde{w} + w_a \tag{5.4.15a}$$

$$\tilde{s} = \tilde{u} - u_a \tag{5.4.15b}$$

从上式可以看出，分离后的纵(P)波是垂直分量的记录 w 加上一个校正量 w_a，分解后的横波是从原水平分量 u 中减去一个校正量 u_a。因此，波场分离中的主要计算工作量就是求波场的修正量 W_a 和 u_a。求修正量 W_a 和 u_a 是用(5.4.14a)和(5.4.14b)式进行的。如果求修正量在频率—波数域进行时，用(5.4.14)式计算即可。如果为了适应速度的空间变化，必须在时间—空间域求波场分离的校正量时，则需将(5.4.14)式变换到时—空域中去。变换后的方程可表示为

$$\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial u_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{5.4.16a}$$

和

$$\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial w_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.4.16b}$$

上面两个偏微分方程可以独立求解，分别解出纵波的校正量 W_a 和横波校正量 u_a。每个方程中虽然均有两个函数。如(5.4.16a)式中的两个变量为 W_a 和 u，(5.4.16b)式中的两个变量为 u_a 和 W。但是其中的 u 和 w 是已知函数，它们分别是地面上观测到的包含有纵波和横波波场的水平分量和垂直分量。因此每个微分方程中只有一个未知的待求函数，故(5.4.16)式中两个微分方程的右端项是一个已知量。这样，两个微分方程实质上是一个有源项的一维波动方程。由于它们表现为左行波和右行波，因此在边界上会产生很强的边界反射。这在用差分方程求解时应当做相应的处理。

用均匀各向同性介质中求出的上述分解方程，对于横向各向同性介质情况下获得的两分量地震记录，也基本可以用此法分离出 qP-qP 反射波和 qP-qSV 反射波。

关于各向异性介质情况下的波场分离问题我们也进行了理论推导。但是，考虑到目前还无法用于实际，故在此我们不做具体讨论。详细的理论分析可参阅有关文献(金胜汶，1995)。

在实际资料处理中也常常使用τ-P域方法进行波场分离。由于在τ-P域，每一道的偏振是水平慢度 P 的函数，因此进行偏振投影即可分离出纵波与横波。对于τ-P域的波场分离已有详细文献介绍，在此不再重叙(Parscau,1991)。

3. 共炮点道集的波场分离

我们用波动方程法和τ-P域分解法对共炮点道集进行了P-P反射波和P-SV反射波的波场分离。波动方程法波场分离的理论基础是从震源出发的纵波和横波，二者的偏振方向是相互垂直的。所使用的记录应当是在通过震源的平面上的某个点用两分量检波器接收的地震记录。但是，我们在反射地震学中所接收的共炮点道集的两分量记录并不是在同一个地震射线上传播的纵波和横波，而是具有不同传播路径的两种反射波P-P波和P-SV波。它们在同一地面点被两分量的检波器接受下来。显然，P-P反射波和P-SV反射波在地面点的偏振方面是不互相垂直的，而是以偏离正交方向的斜交方向偏振的。这种非正交的偏振方向与正交方向的偏离程度随炮检距的距离增大而增加，随着反射界面的埋藏深度增加而减小。此外，这个偏离也随地层倾角的变化而变化。所以在实际应用中应当根据这些因素对两个波的正交关系进行某种校正。这种校正对于远炮检距和中浅地层来说是非常必要的。此外，地表低速层对射线方向和两种波偏振方向的影响也应当予以考虑。不过这个问题很困难。到目前为止我们还没有考虑这个问题。

还应当指出，波动方程法波场分离完全是建立在偏振方向和振幅、相位关系的原始关系条件下进行的。所以，在波场分离前不应当进行任何破坏地震波振幅和相位原始关系的处理。当然，这也就要求多分量的地震记录有较高的信噪比。如果信噪比较低，必须在波场分离前进行提高信噪比的滤波的话，则应当使用不破坏或很少破坏振幅和相位关系的去噪方法，即应用使有效波保真功能的去噪滤波方法。否则，会使分离后的波场失真。目前的一些提高信噪比的方法，如F-K滤波法等一般不具备这种功能。使用τ-P域法分离时由于τ-P变换可能使振幅和相位关系受到某种破坏。

下面是采用波动方程法对共炮点道集记录进行波场分离的结果。图5.4.1a是双层介质理论模型的共炮点记录的水平分量。图5.4.1b是双层介质理论模型的共炮点记录的垂直分量。图5.4.2a是根据(5.1.16a)式计算P-SV波的修正量。图5.4.2b是P-P波的修正

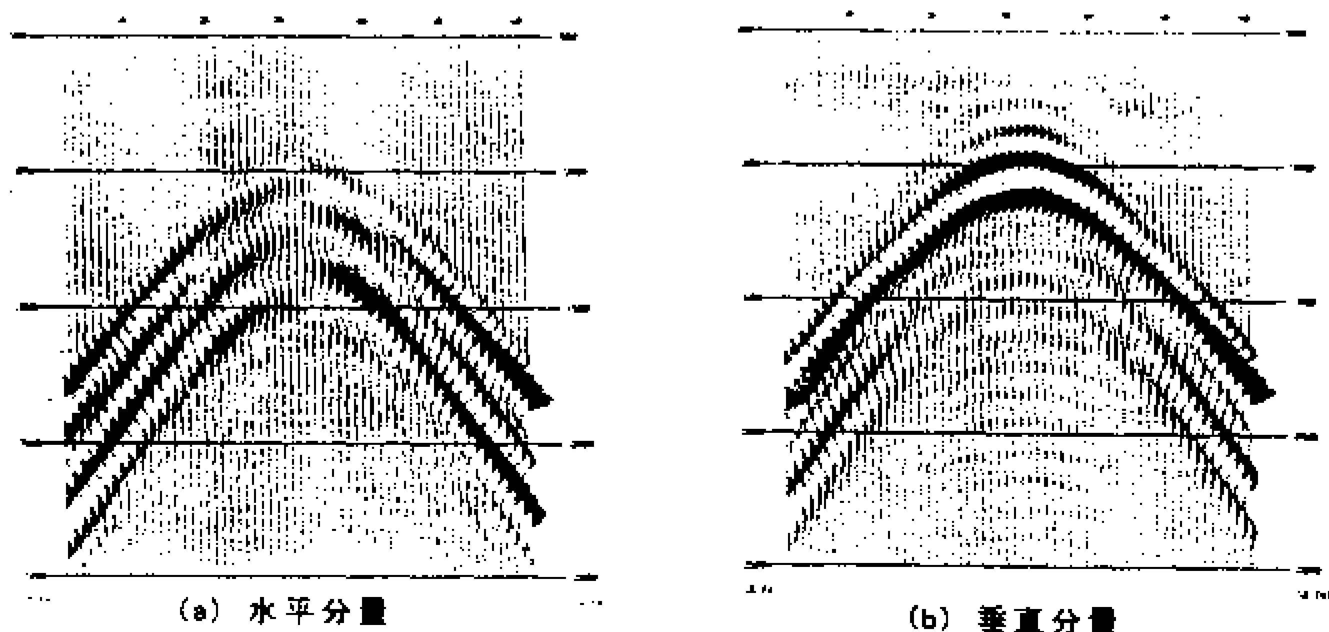


图5.4.1　双层介质理论模型的共炮点道集的垂直分量记录

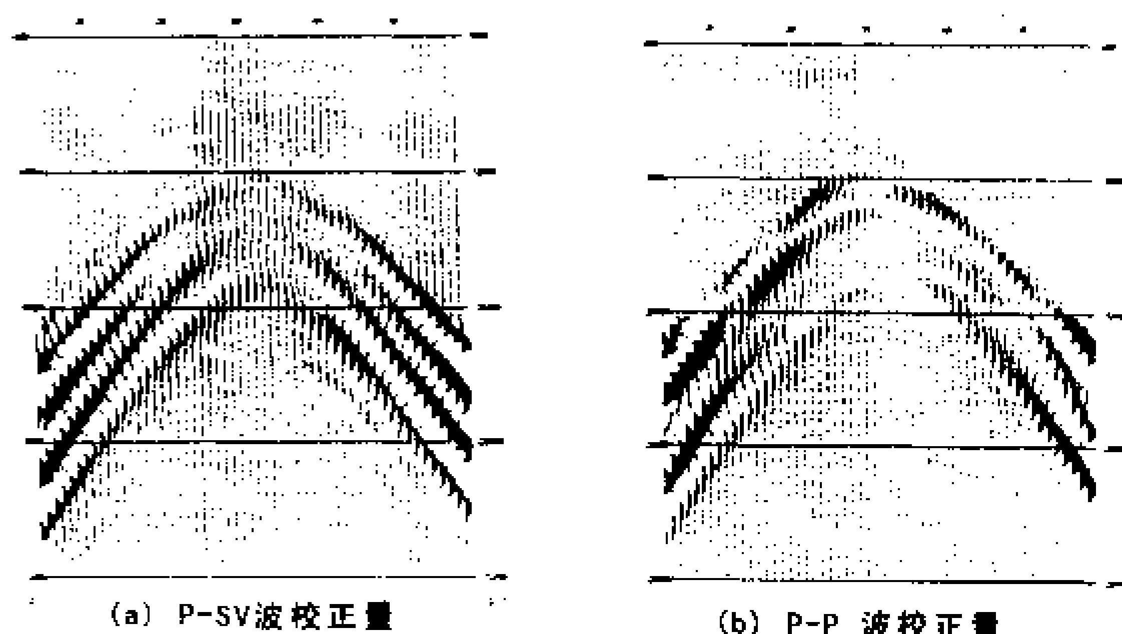


图 5.4.2 根据(5.4.16a)式计算的 P－SV 反射波的修正量

量。图 5.4.3a 是图 5.4.1a 和图 5.4.2a 的波场代数和结果，即是波场分离后的 P-SV 反射波的共炮点道集记录。图 5.4.3b 是图 5.4.1b 和图 5.4.2b 的波场代数和结果，即是波场分离后的 P-P 反射波的共炮点道集。

从上面的 6 张图可以看出，用波动方程法对理论的共炮点道集的两分量地震记录经波场分离后较好地分离出 P-SV 波和 P-P 波。

在理论模型的两分量共炮点记录上成功的进行了分离纵波和转换横波之后，对实际的两分量地震记录也进行了波场分离。实际记录的波场分离结果见图 5.4.4 和图 5.4.5。图 5.4.4a 是实测共炮点道集的水平分量记录。图 5.4.4b 是实测共炮点道集的垂直分量记录。图 5.4.5 和图 5.4.6 是用图 5.4.4 两分量记录进行波场分离的结果。图 5.4.5 是分离后的 P-SV 波的共炮点道集记录。图 5.4.6 是分离后的 P-P 波的共炮点道集记录。从分离前后的实际地震记录对比看出，分离后的 P-SV 的反射波的记录与分离前的水平分量的记录差异不大。同样，分离后的 P-P 反射波的记录与垂直分量的记录差异也不大。这是否说明分离方法对实际资料的波场分离存在问题呢？实际上这并不是分离方法存在什么问题，而是因为在实际地震记录上存在着低速层对波的传播方向有明显的改变作用。低速带的存在使波的传播方向在到达地面时接近于垂直方向，因此，P 波的偏振方向接近于垂直地面的方向，而 SV 波的偏振方向接近于平行地面的方向。这样，就会使垂直分量的检波器上主要地记录有 P-P 反射波，而 P-SV 反射波在垂直分量上记录到的分量很小，因此不

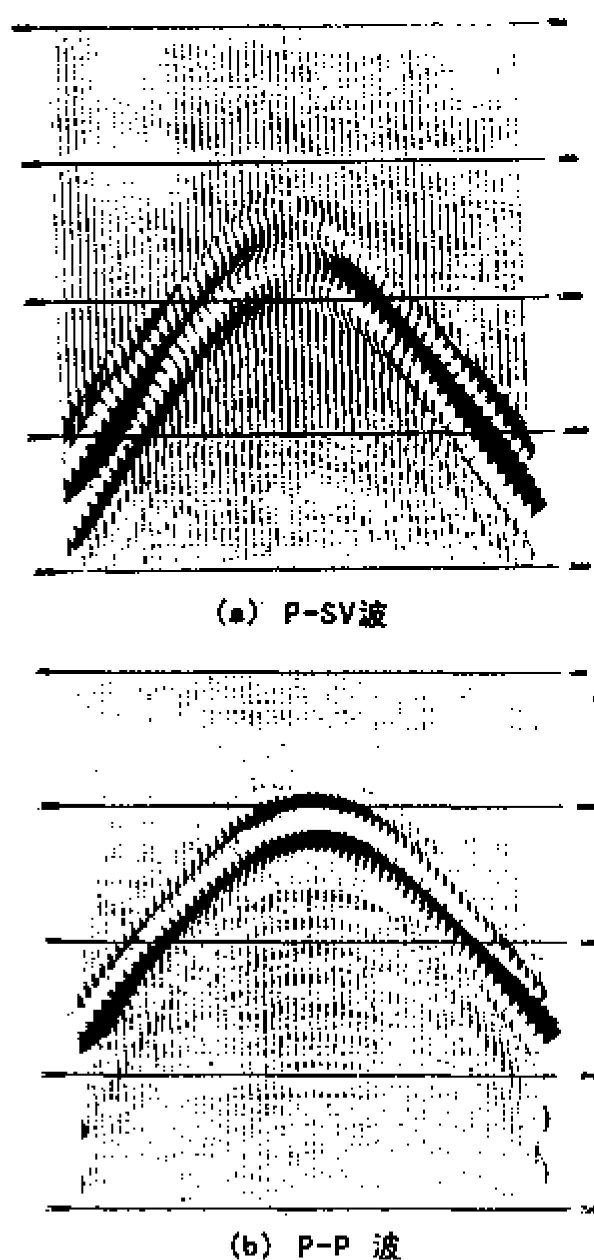


图 5.4.3 波场分离后的 P-SV 反射波的共炮点道集记录

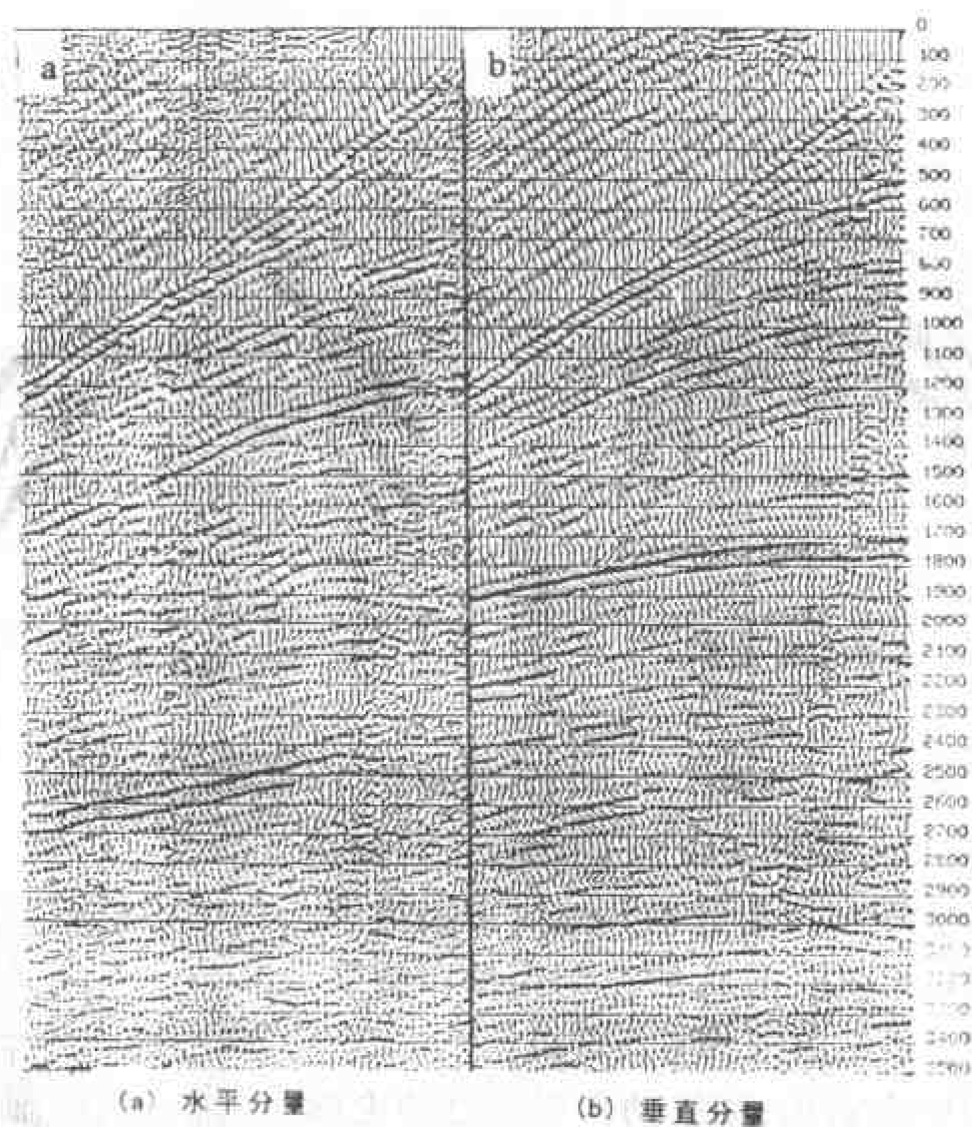


图 5.4.4 实测共炮点道集的水平分量记录

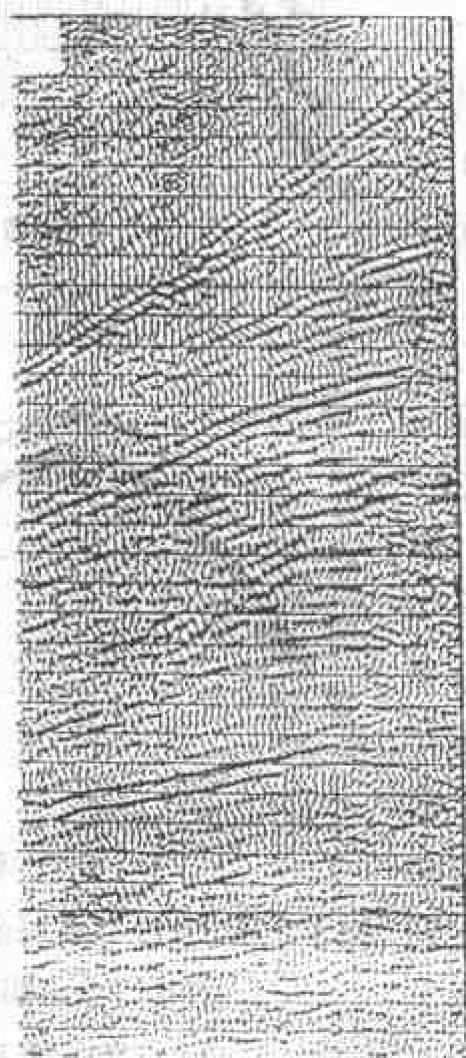


图 5.4.5 分离后的 P-SV 波的共炮点道集的实测地震记录

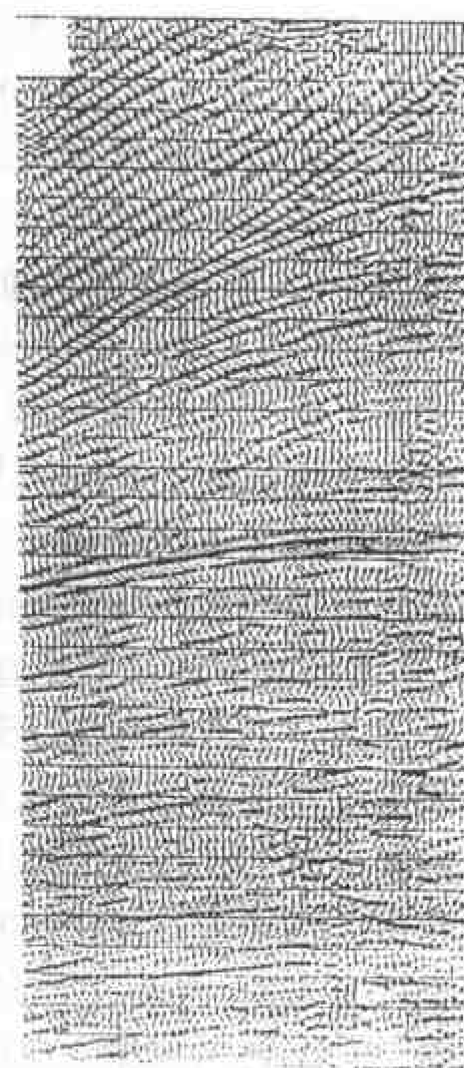


图 5.4.6 分离后的 P-P 波的共炮点道集的实测地震记录

能明显表现出来。同样，在水平分量的检波器上主要地记录有 P-SV 反射波，而 P-P 反射波在水平分量上记录到的分量很小。因此，本地区的低速层本身有对波场分离的效应。不过，这也与野外观测排列长度较小有关

不但用波动方程分离法对实际地震记录进行波场分离存在上述情况。而且用 τ－P 域分离法也有同样情况。图 5.4.7a 是大庆某地区的两分量共炮点道集地震记录的水平分量。图 5.4.7b 是垂直分量。图 5.4.8a 是用 τ-P 域波场分离法得到的 P-SV 波地震记录。图 5.4.8b 是用 τ-P 域波场分离法得到的 P…P 波的地震记录。和用波动方程分离法一样具有

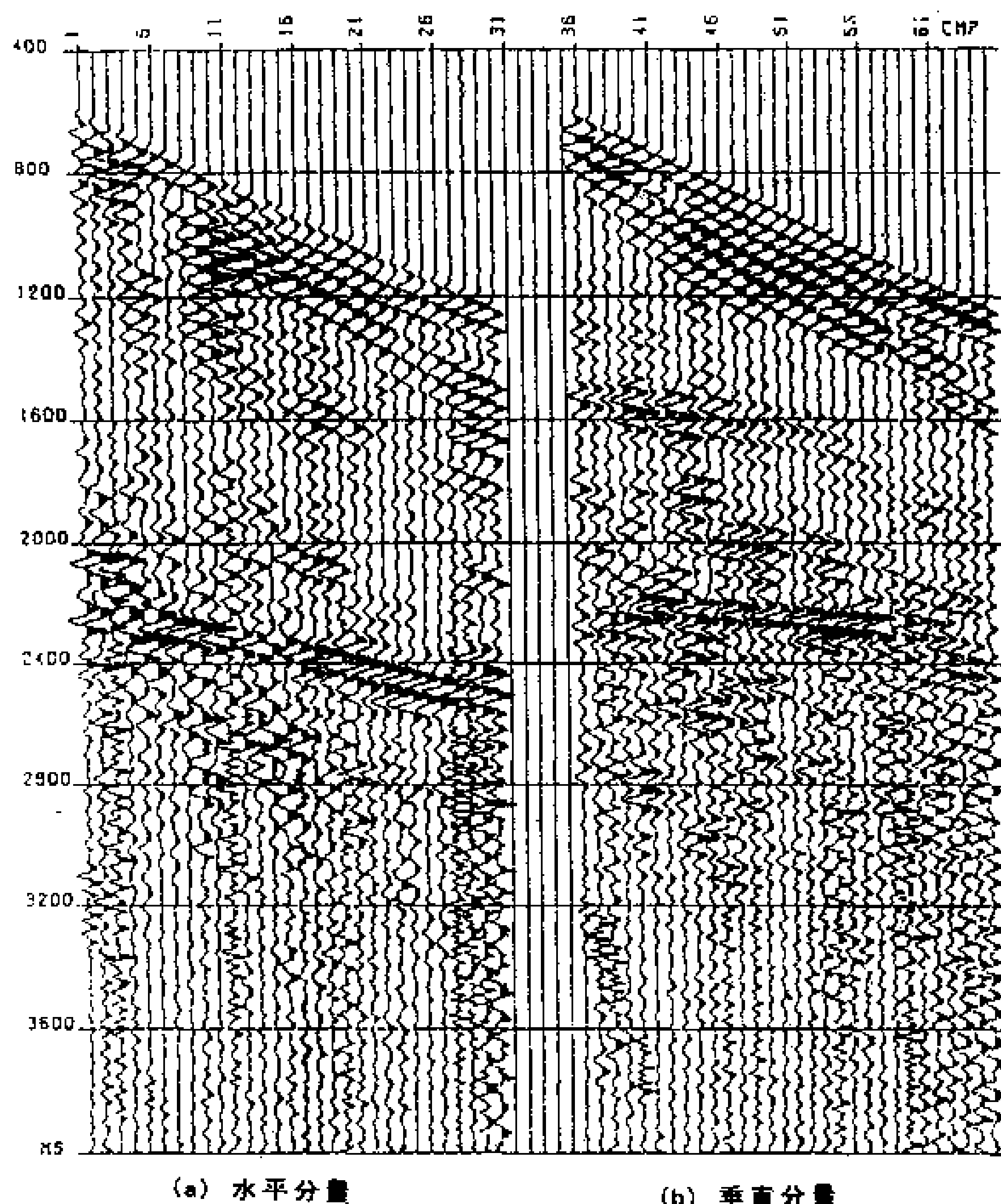


图 5.4.7 大庆某地区的共炮点道集的水平分量记录

同样的相似结果。水平分量的共炮点道集记录(图 5.4.7a)和分离后的 P-SV 波共炮点道集地震记录(图 5.4.8a)基本相似。垂直分量的共炮点道集记录(图 5.4.7b)和分离的 P-P 波的共炮点道集的地震记录(图 5.4.8b)基本相似。由此，可以互相验证，这种相似结果不是由于分离方法本身造成的，而是由于客观观测的地质地表条件引起的。

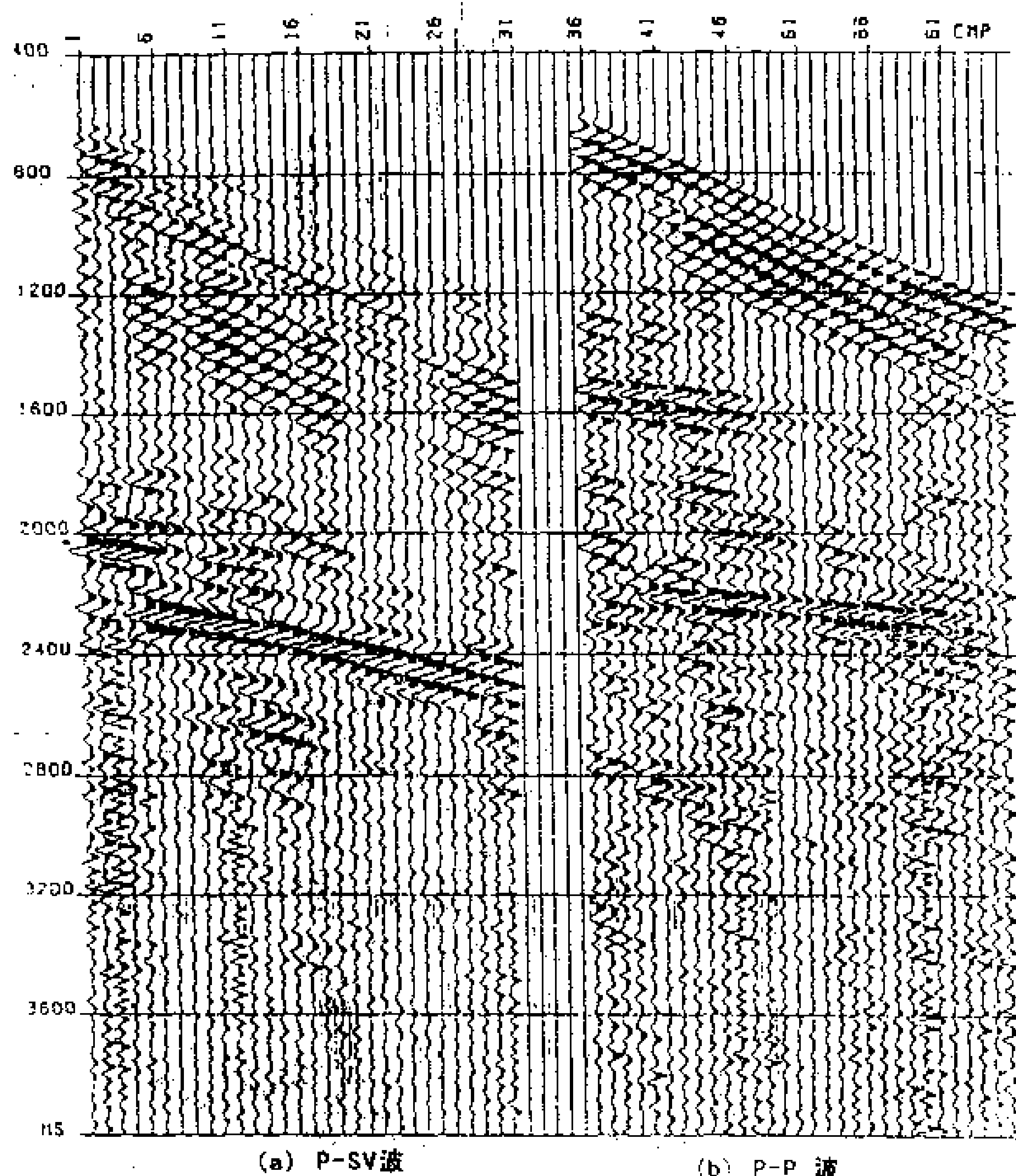


图 5.4.8 用 τ-P 域方法分离后的 P-SV 波共炮点道集记录

4. 共炮检距道集的波场分离

波动方程波场分离方法，不但可以在共炮点道集的地震记录上进行，也可以在共炮检距道集，即共炮检距剖面上进行。这一点是 τ-P 域等其它方法不易实现的。

用波动方程法对共炮检距剖面进行波场分离比对共炮点道集进行波场分离有一定的优越性。这是因为我们在前面所阐述过的反射波的 P 波射线在地面的的出射方向与 S 波射线在地面的出射方向不一致，因此它们的偏振方向并不互相垂直。这就会对使用波动方程法产生一定的误差。为此应当做一定的校正。如果在共炮点道集上进行校正，则必须对每道进行不同校正量的校正。如果对共炮检距道集进行此种校正，则可以对各道进行同样的校正量的校正。当然，不论对那种道集校正，其校正量都应当是随深度而变。不过对不同的炮检距道集应当进行不同量值的校正。如果不做校正，只能做到近似的分离结果。这种结果在近道和中间道引起的误差较小。对大炮检距，特别是反射层的埋藏深度小于炮检距时，不进行较正引起的误差常常是不可忽略的。这一点已被试验结果证实。下面我们给出在理论模型上进行的试验结果。图 5.4.9a 是两层反射层的水平分量的共炮检距剖面。图 5.4.9b 是垂直分量的共炮检距剖

面。图 5.4.10a 是经过波动方程法分离后的 P-SV 波共炮检距剖面。图 5.4.10b 是波动方程法分离后的 P-P 波的共炮检距剖面。炮检距的大小比第一反射层的埋藏深度稍大些。第一反射层的深度为 250m,炮检距为 300m。这个比例关系与实际情况接近。因此分离效果很好。对于更大的炮检距来说,不做校正就进行波场分离结果就差一些,分离后的剖面上残留有另一种反射波的影子。

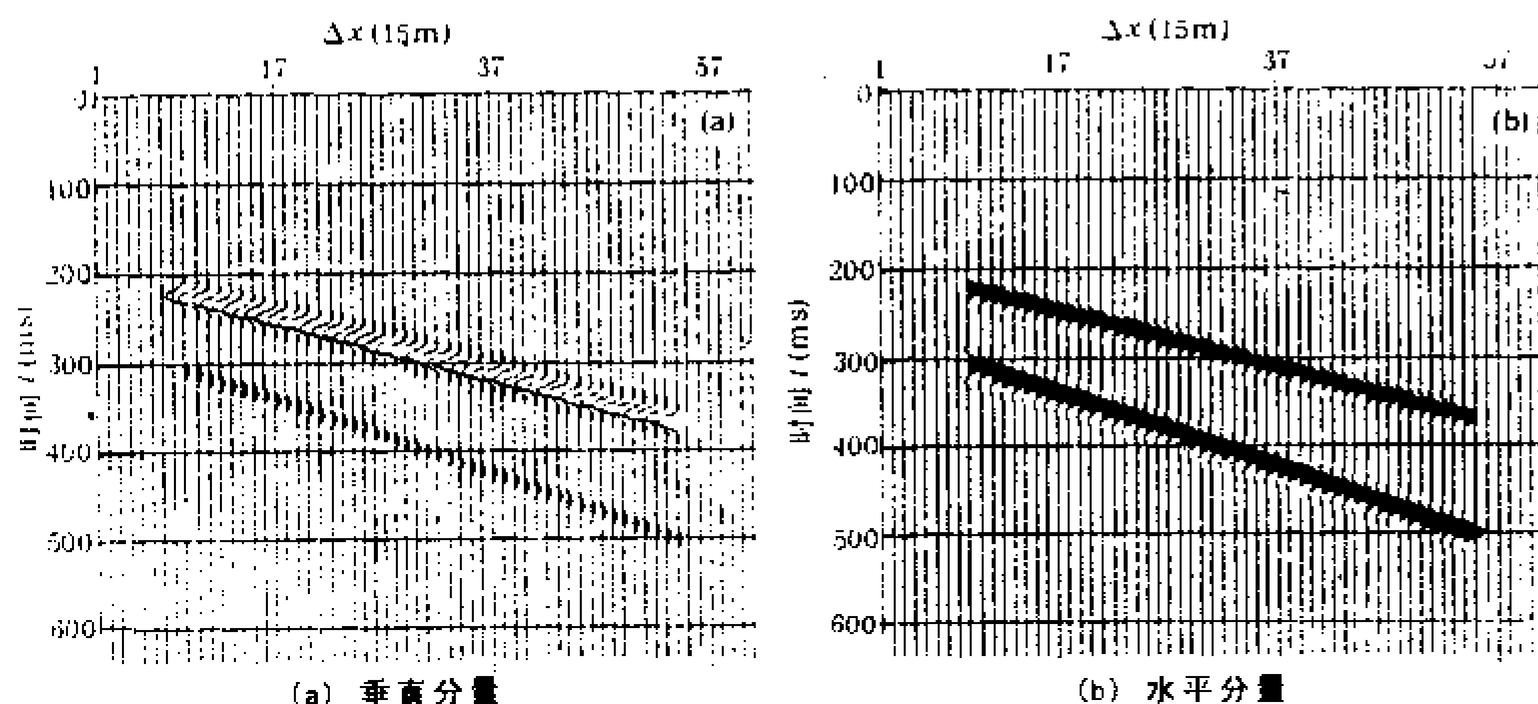


图 5.4.9　共炮检距剖面的水平分量记录

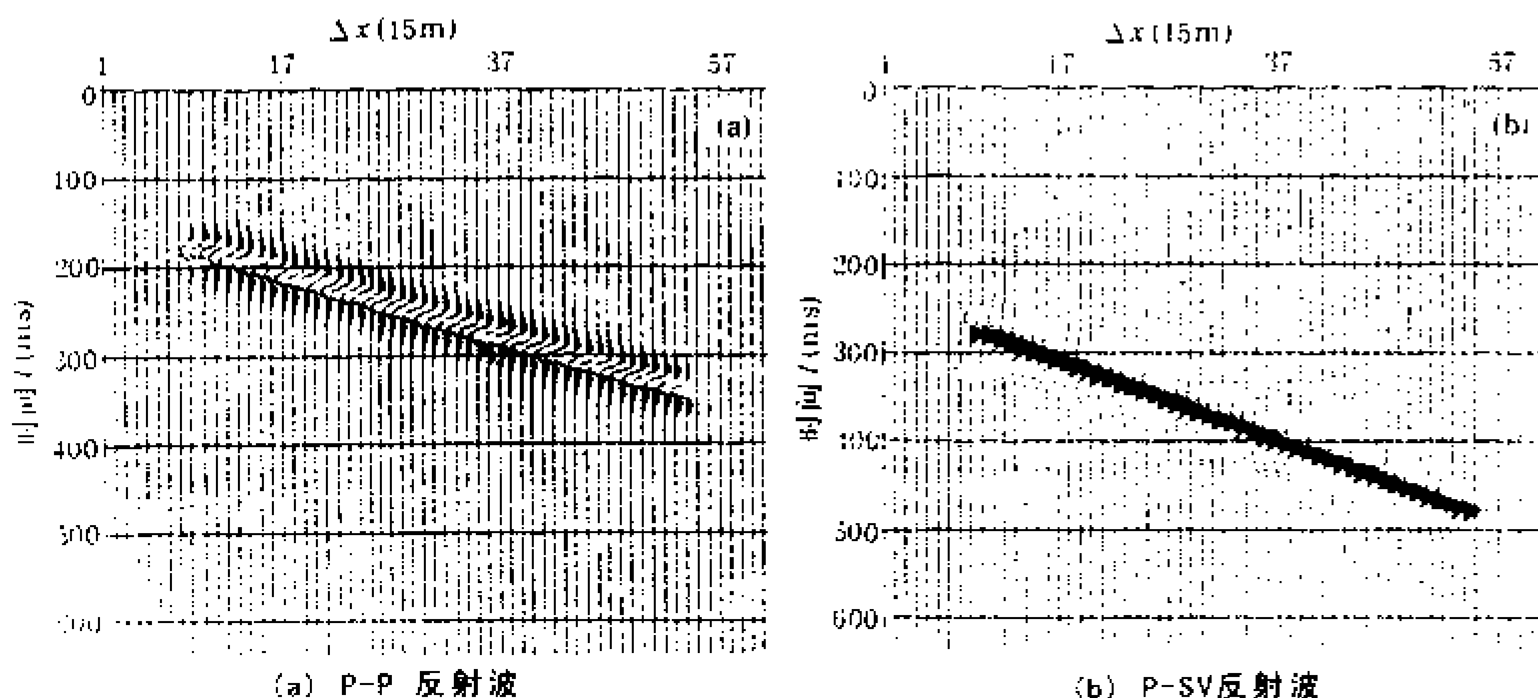


图 5.4.10　波动方程法波场分离后的 P-SV 波剖面

5.4.2　P-SV 转换反射波的叠前偏移

1. P-SV 反射波偏移成像的特点

由于 P-SV 反射波是用两种速度传播的,入射波部分是用纵波速度传播的,反射波部分是用横波速度传播的。因此,在对 P-SV 波进行偏移时要用两种速度,或者知道二者之一和它们的比值。速度结构和 P-P 反射波的偏移问题一样,是一个首先要解决的问题。这可以通过 P-P 反射波的速度分析和在本章中阐述的 P-SV 反射波的速度分析来确定。

P-SV 反射波的偏移方法的种类和 P-P 反射波的偏移方法的种类一样，分为叠后偏移，叠前部分偏移(DMO)和叠前偏移，此外，还有叠前深度偏移。由于 P-SV 反射波实际上不存在零炮检距的反射波，即使利用动校正也很难把非零炮检距的道，校正为零炮检距的道。如果界面有倾角，这种校正就更不容易了。所以使用 P-SV 波的水平叠加剖面进行叠后偏移比在 P 波情况下更加困难。因此，我们认为 P-SV 反射波的偏移应当以叠前偏移为主，即使是对简单构造也应当以叠前偏移为主，更不用说对复杂地质构造了。为了能够真正把 P-SV 波的多次复盖的数据叠加好，应当先进行叠前部分偏移(DMO)，使各种炮检距的 P-SV 反射波转换为等价的零炮检距的 P-SV 反射波。只有在做过 DMO 处理之后，才能使 P-SV 波的多次复盖资料同相叠加形成等价 P-SV 波的 tops 剖面。然后再进行叠后偏移就能获得正确的偏移成像剖面。另外的做法就是先进行共炮点道集的叠前偏移或者共炮检距道集(剖面)的叠前偏移，然后将它们的偏移结果进行共地面点数据的叠加，得到准确偏移成像的结果。在复杂地质构造条件下，最好应用叠前深度偏移。关于 P-SV 反射波的叠前深度偏移方法目前还研究的很不够，几乎还没有进行过实质性的研究。但是，目前在 P 波反射地震中的叠前深度偏移方法可以移植用于 P-SV 反射地震数据处理中来。只是二种地震波的速度模型的合理建立要比 P 波反射的情况更加困难。

关于 P-SV 波的三维偏移问题目前还未提到议事日程上来。因为目前还很少，甚至还没有进行过多波的三维观测。不过，我们认为，本报告所研究的一些二维 P-SV 反射波的地震偏移方法，有可能被推广应用到三维中去。下面我们重点讨论 P-SV 反射地震的偏移问题。

2. P-SV 反射波的叠前偏移

P-SV 反射波的叠前偏移的实现可在共炮检距剖面上进行，也可以在共炮点道集上进行。可以在时间域进行，也可以在深度域进行。下面我们分别对它们的方法进行讨论。

(1) 共炮检距 P-SV 波剖面的叠前偏移

我们在此提出一种 P-SV 波共炮检距剖面的波动方程叠前偏移方法。首先导出一个适合进行叠前偏移的波动方程表达式，然后讨论它的偏移方法，再给出一个些实例来说明偏移方法的可行性和实用效果。完全用波动方程法进行 P-SV 波的叠前偏移是首次提出的。为了证实它的正确性，我们将其结果与波前叠加法的偏移结果进行了对比，二者在偏移位置上是一致的。波前叠加法从原理上认为其偏移位置是正确的，只是偏移后的地震波形失真，即不能实现保幅的处理目的。

首先研究二维倾斜界面的共炮检距剖面的 P-SV 反射波的偏移问题。设纵波的速度为 V_P 或 α，横波的速度为 V_S 或 β。由于 P-SV 波反射中不能产生零炮检距的反射，故对实际地震记录首先应当考虑进行叠前偏移处理。

我们求出 P-SV 反射波和 SV-P 反射波的几何关系为

$$r\sqrt{z^2+(x+h)^2}+\sqrt{z^2+(x-h)^2}=vt \tag{5.4.17}$$

式中　$r=v_S/v_P$，$v=v_s$，在使用 P-SV 波数据时；

h 为半炮检距；

z 为反射点的深度；

t 为反射波的走时。

将上式展开得到 P-SV 波的反射点的轨迹方程，并将式中的根式项用 Taylor 级数展开，得

$$[v^2t^2+4(1-r^2)hx]^{1/2}=vt\left[1+\frac{2(1-r^2)hx}{v^2t^2}+\frac{(1-r^2)^2h^2x^2}{2v^4t^4}\right]$$

将上式回代到原式中，得到新的 P-SV 波反射点的轨迹方程为

$$z^2+\left(1-\frac{4h^2r}{v^2t^2}\right)x^2-\frac{2(1-r)}{1+r}hx-\frac{v^2t^2}{(1+r)^2}+h^2=0 \tag{5.4.18}$$

从(5.4.18)式可以看出，我们已将深度 z 的四次方程化简为 Z 的二次方程，这当然是一种近似。但这种近似是有很高的精度的。根据(5.4.17)式和(5.4.18)式的计算结果的对比(图5.4.11)可以看出，当反射界面的深度z大于半炮检距h的情况下，二者偏差的相对精

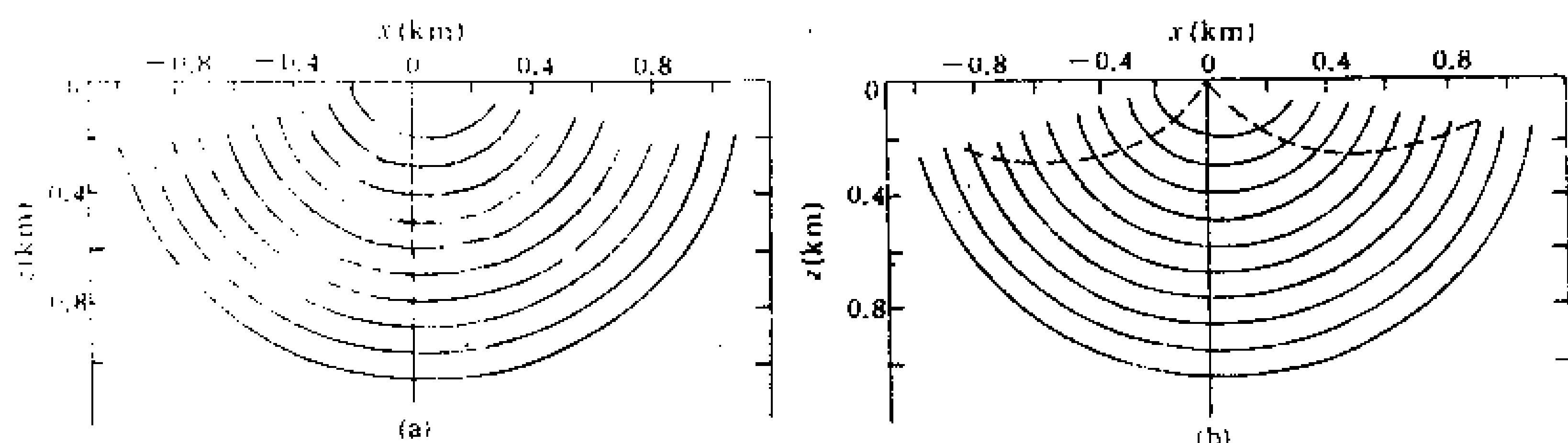


图 5.4.11 P-SV 波反射点轨迹图

(a) 用准确式计算的轨迹；(b) 用(5.4.18)式计算的轨迹。

(图中虚线为百分之一误差的界线，第一条曲线的反射时间为 0.22s，每隔 0.08s 画一条曲线)。

度不超过百分之一。这就是说当地层倾角不超过 45°时，近似二阶方程可以用来代替四阶方程。二阶方程的性质便于分析，而四阶方程是难于进行分析和计算的。因此，在大多数地区用二阶方程来研究 P-SV 波的偏移成像问题是完全可以达到实用目的的。应用二阶方程(5.4.18)式可以导出与之等价的二阶偏微分方程。经过一定的处理，这个二阶偏微分方程可以用于 P-SV 波的叠前偏移问题。

我们现在的目的是将(5.4.18)式写成一种新形式，以便更清晰地看出它的曲线形态特征。(5.4.18)式经过一定的运算与归纳可表示为

$$z^2+\left(1-\frac{4h^2r}{v^2t^2}\right)\left[x-\frac{(1-r)h}{(1+r)\left(1-\frac{4h^2r}{v^2t^2}\right)}\right]^2=\frac{v^2}{(1+r)^2}t_n^2 \tag{5.4.19}$$

式中

$$t_n=\sqrt{t^2-\frac{(1+r)^2h^2}{v^2}\left\{1-\frac{(1-r)^2}{(1+r)^2[1-4h^2r/v^2t^2]}\right\}} \tag{5.4.20}$$

(5.4.20)式实际上是 P-SV 转换反射波的动校正公式。这就是我们在上一节给出的动校正公式之一。

现在我们来分析一下(5.4.19)式。实际上它是一个以

$$x=\frac{(1-r)h}{(1+r)(1-4h^2r/v^2t^2)^{1/2}} \tag{5.4.21}$$

和 $$z=0$$

为原点的一个椭圆。因此它又可以写成椭圆方程的标准形式为

$$\frac{z^2}{(vt_n/(1+r))^2}+\frac{\left(x-\frac{(1-r)h}{(1+r)(1-4h^2r/v^2t_n^2)}\right)^2}{(vt_n/(1+r)(1-4h^2r/v^2t_n^2)^{1/2})^2}=1 \tag{5.4.22}$$

这个椭圆在 z 方向上的半径 z_0 为

$$z_0=\frac{vt_n}{1+r}$$

在 x 方向上的半径 x_0

$$x_0=\frac{vt_n}{(1+r)(1-4h^2r/v^2t_n^2)^{1/2}}$$

如果我们将椭圆的坐标原点在水平方向上移动一个距离 Dx，

$$Dx=\frac{(1-r)h}{(1+r)(1-4h^2r/v^2t_n^2)} \tag{5.4.23}$$

则(5.4.22)式可表示为

$$z^2+\left(1-\frac{4h^2r}{v^2t_n^2+4h^2r}\right)x'^2=\frac{v^2}{(1+r)^2}t_n^2 \tag{5.4.24}$$

式中
$$x'=x-Dx \tag{5.4.25}$$

Dx 由前面的(5.4.23)式给出。如果我们将 x' 变量前的括号中的 t_n 值用一个固定的 t_n 值代替，则(5.4.24)式可改写为

$$x''^2+z^2=v_a^2t_n^2 \tag{5.4.26}$$

式中

$$v_a=\frac{v}{1+r} \tag{5.4.27}$$

$$x''=\left(1-\frac{4h^2r}{v^2t_n^2+4h^2r}\right)x' \tag{5.4.28}$$

(5.4.26)式表现为在 x'' 和 Z 的平面上的一圆周轨迹。与(5.4.26)式相对应的波动方程的象征方程或频散关系可表示为

$$k_z^2+k_{x''}^2=\frac{\omega^2}{v_a^2} \tag{5.4.29}$$

式中 k_z 为垂向波数；
k_x 为水平波数；
ω 为地震波角频率；
v_a 由(5.4.27)式求出。

关于(5.4.29)式为(5.4.26)式对应于波动方程象征方程的证明可参见有关文献(马在田，1995)。与(5.4.29)式的频散关系相对应的偏微分方程可表示为

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x''^2}=\frac{1}{v_a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t_n^2} \tag{5.4.30}$$

现在我们将(5.4.30)式变换回到 $x'-z$ 空间域中去，得

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\left(1+\frac{4h^2r}{v^2t_n^2}\right)\frac{\partial^2u}{\partial x'^2}=\frac{(1+r)^2}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t_n^2} \tag{5.4.31}$$

当 $r=1$ 时，非转换反射波(5.4.31)式可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(1+\frac{4h^2}{v^2 t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}=\frac{4}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.4.32}$$

(5.4.32)式与一般反射波的叠前偏移公式完全一致,(5.4.31)式和(5.4.32)式除了对 x 的二阶导数的系数与常规波动方程不同外,其基本形式二者是相似的,因此,我们可以用各种已知的偏移方法求解。例如在使用单程波偏移公式时可用 15°方程和高阶方程进行波场向 z 方向的延拓,也可以用双程波偏移公式进行逆时波场延拓。如果在原坐标系下进行计算,成像条件仍为 $t=0$;如果在浮动坐标系下进行计算, 则可取 $t=\tau=2z/v$。

在对 P-SV 反射转换波计算时要进行动校正,动校正公式如(5.4.20)式所示。进行动校正之前或动校正之后还要进行水平移动,可称之为水平坐标变换。水平移动校正量的计算用(5.4.23)式进行。如果求得的移动量 Dx 是正数,则向右移动。如果求得的移动量 Dx 是负数,则向左移动。水平校正与速度和时间有关,故要进行必要的插值计算。在动校正和水平校正之后就可以用(5.4.31)式进行偏移处理了。在使用(5.4.31)式时,原设 t_n 是一某种定值,例如在某个时间段内取一中间值进行计算,在整个时间范围内分段取其中值。但是,在用有限差分法时,可以逐点取 t_n 值进行计算,这样更为精确。

为了实施计算,我们要将(5.4.31)式改写为便于计算的形式。本文采用 15°方程的形式,在浮动坐标系中进行计算,如下式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}+\frac{v^2}{2(1+r)^2}\left(1+\frac{4h^2 r}{v^2 t_n^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}=0 \tag{5.4.33}$$

当然也可以用其它计算式进行波场延拓。这里为了检验方法效果,故只采用(5.4.33)式进行计算。

为了验证方法的精度,以(5.4.17)式计算反射点轨迹,用波前模糊法进行 P-SV 波的共炮检距地震剖面的偏移。用波前模糊法进行偏移时,事先不必进行正常时差校正和横向校正。此时,我们用(5.4.17)式求出轨迹 $f(x,z)$ 的曲线,将各道上 t 时刻的反射(P-SV)转换波之振幅进行加权后送至曲线 $f(x,z)$ 的各点上,再将各道送至同一点的振幅值相加即得偏移结果。这种方法实质上是与积分法基本一致的。

此外,为了说明对于有倾角的界面的 P-SV 转换反射波进行先偏移后叠加的必要性,我们用 5 个不同的炮检距的共炮检距剖面进行偏移。由 5 种偏移后的记录,抽取 5 个共地面点的 5 次覆盖的偏移结果道组成道集,看其是否在时间上一致。同时在同一地面点的共中心道集和横向移动后共转换点的道集经正常时差动校正后组成的道集与偏移道集进行对比。对共中心点道集进行动校正的公式是常规的动校正公式,只是此时的速度由下式求出

$$\frac{2}{v}=\frac{1}{v_P}+\frac{1}{v_S} \tag{5.4.34}$$

共转换点道集是在共炮检距剖面上用(5.4.23)式进行水平移动和用(5.4.20)式进行正常时差动校正后在同一地面点抽取的道集。

为了验证方法的有效性,我们计算了 5 种炮检距的二分量理论地震剖面,用上面所述方法进行了弹性波场分离。然后抽取 P-SV 波共中心点道集和共反射转换点道集,进行正常时差动校正和水平移动,共炮检距剖面 P-SV 反射波叠前偏移和偏移后的共地面点道集显示等处理工作。以便于它们之间的对比分析。

在偏移之前我们对 5 次覆盖的二分量记录进行了弹性波分离,求出 P-SV 波和 P-P 波。

图 5.4.12a 是炮检距为 300m 的垂直分量的记录,时间小的反射波为 P-P 波的垂直分量,时间大的是 P-SV 的垂直分量。图 5.4.12b 是水平分量记录。图 5.4.12c 是分离后的 P-P 反射波共炮检距(300m)的剖面,图 5.4.12d 是分离后的 P-SV 反射波的共炮检距剖面。然后对分离后的 P-P 波和 P-SV 波进行偏移处理。P-P 反射波偏移可用已有的偏移方法进行。P-SV 反射波的偏移方法是重点研究内容

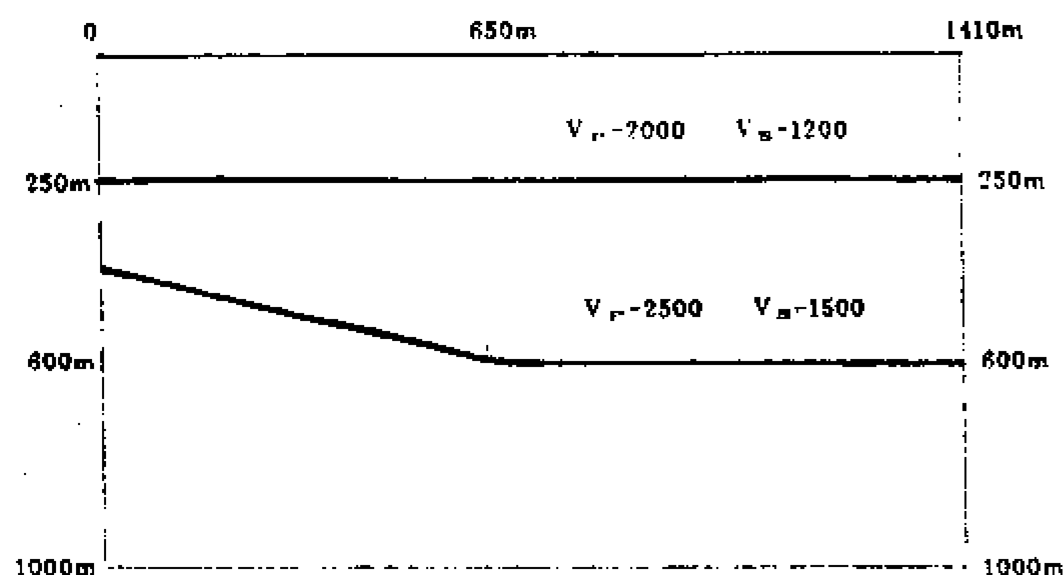
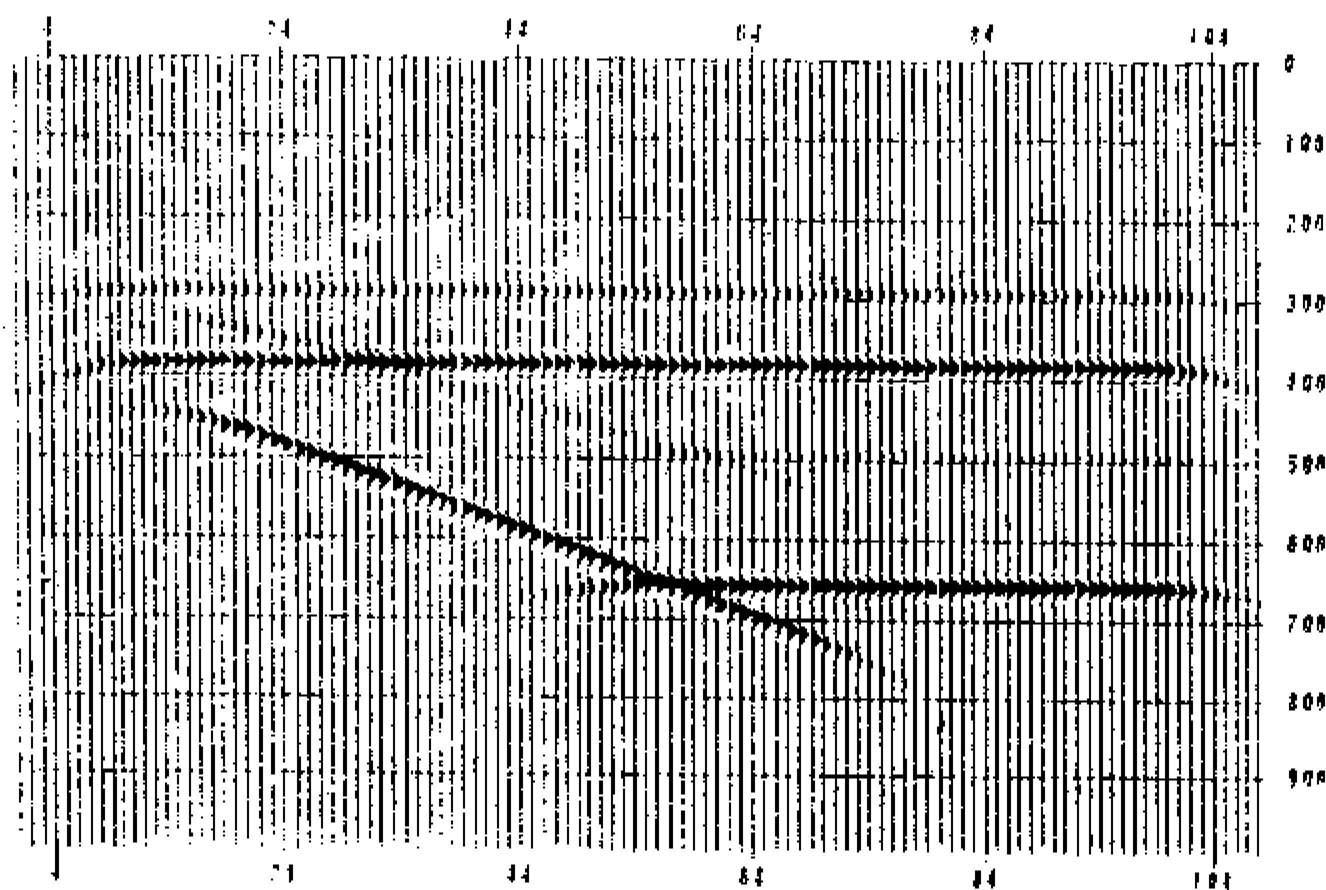
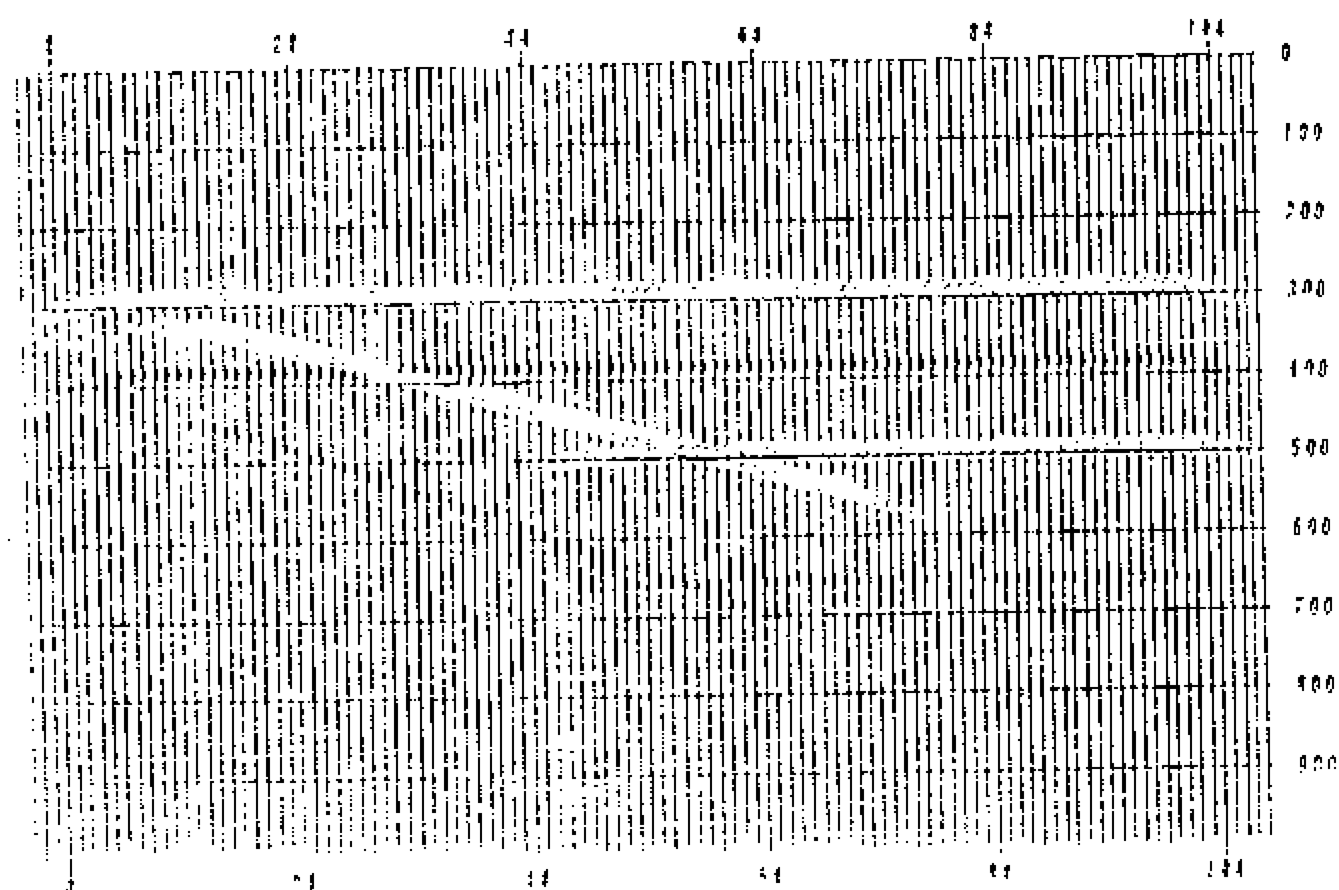


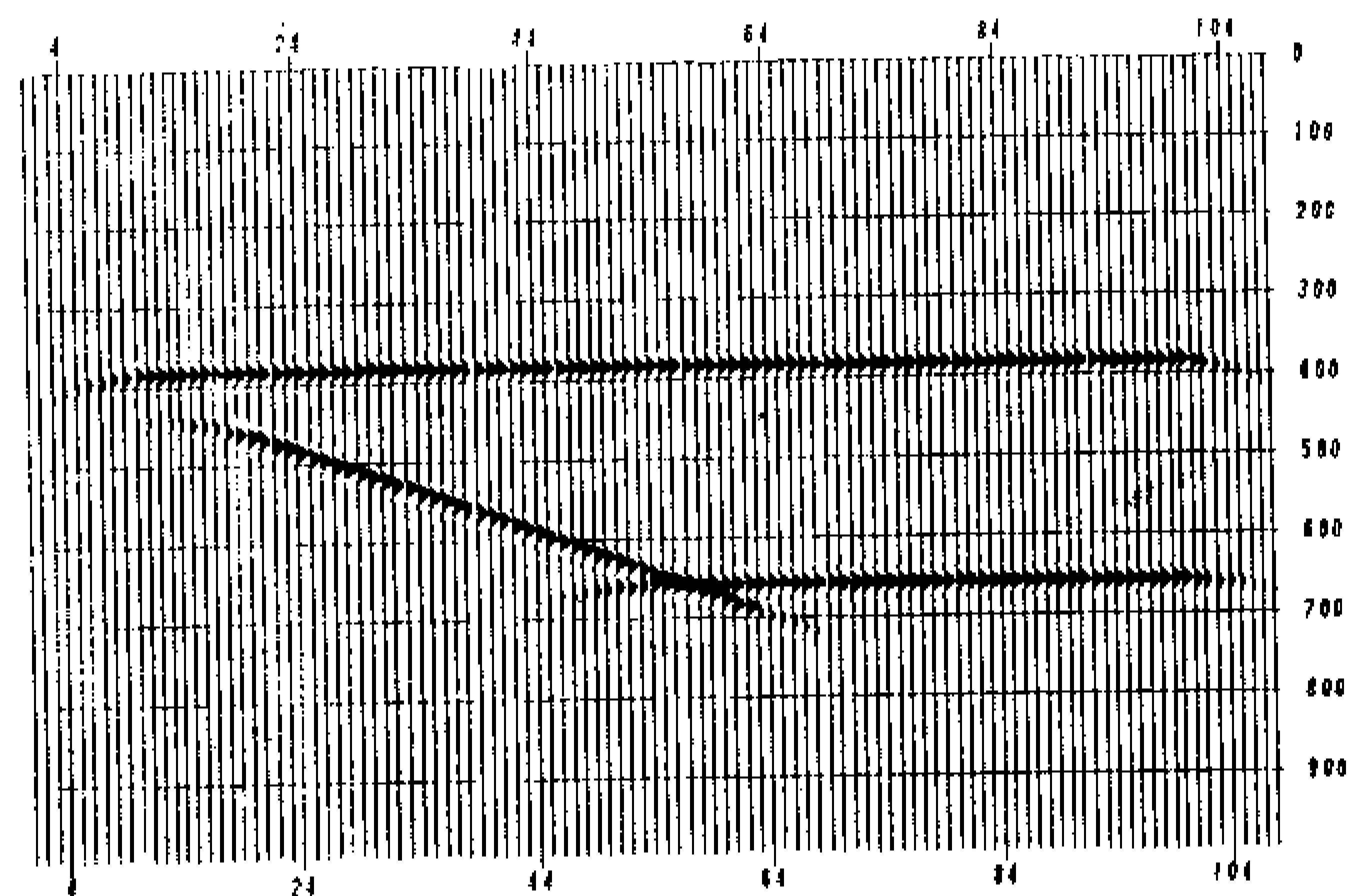
图 5.4.12 设计的地质模型



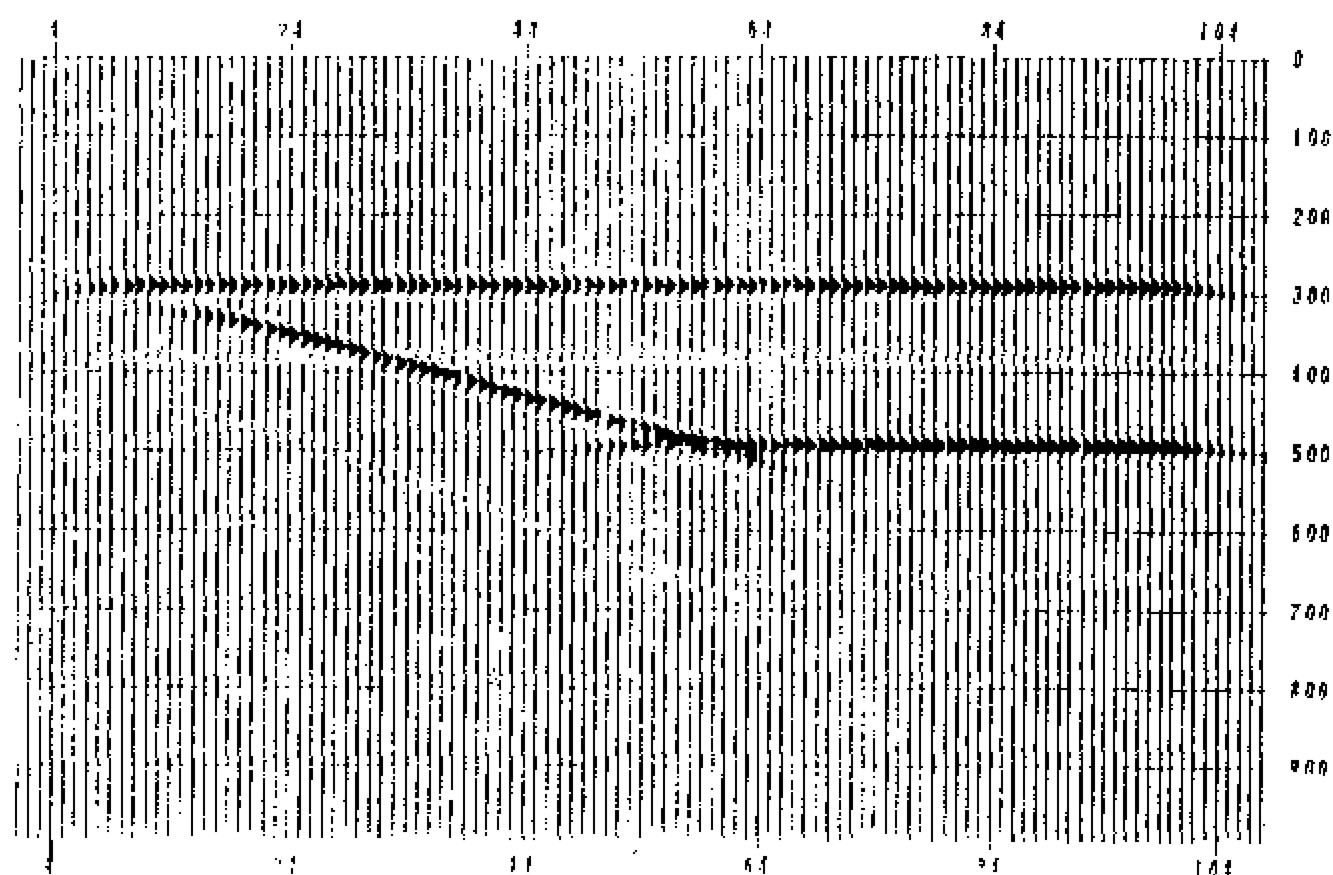
(a) 水平分量记录



(b) 垂直分量记录



(c) 分离后 P-SV 反射波剖面图



(d) 分离后 P-P 反射波剖面图

图 5.4.12 共炮检距道集与分离后 P-SV 波和 P-P 波反射剖面

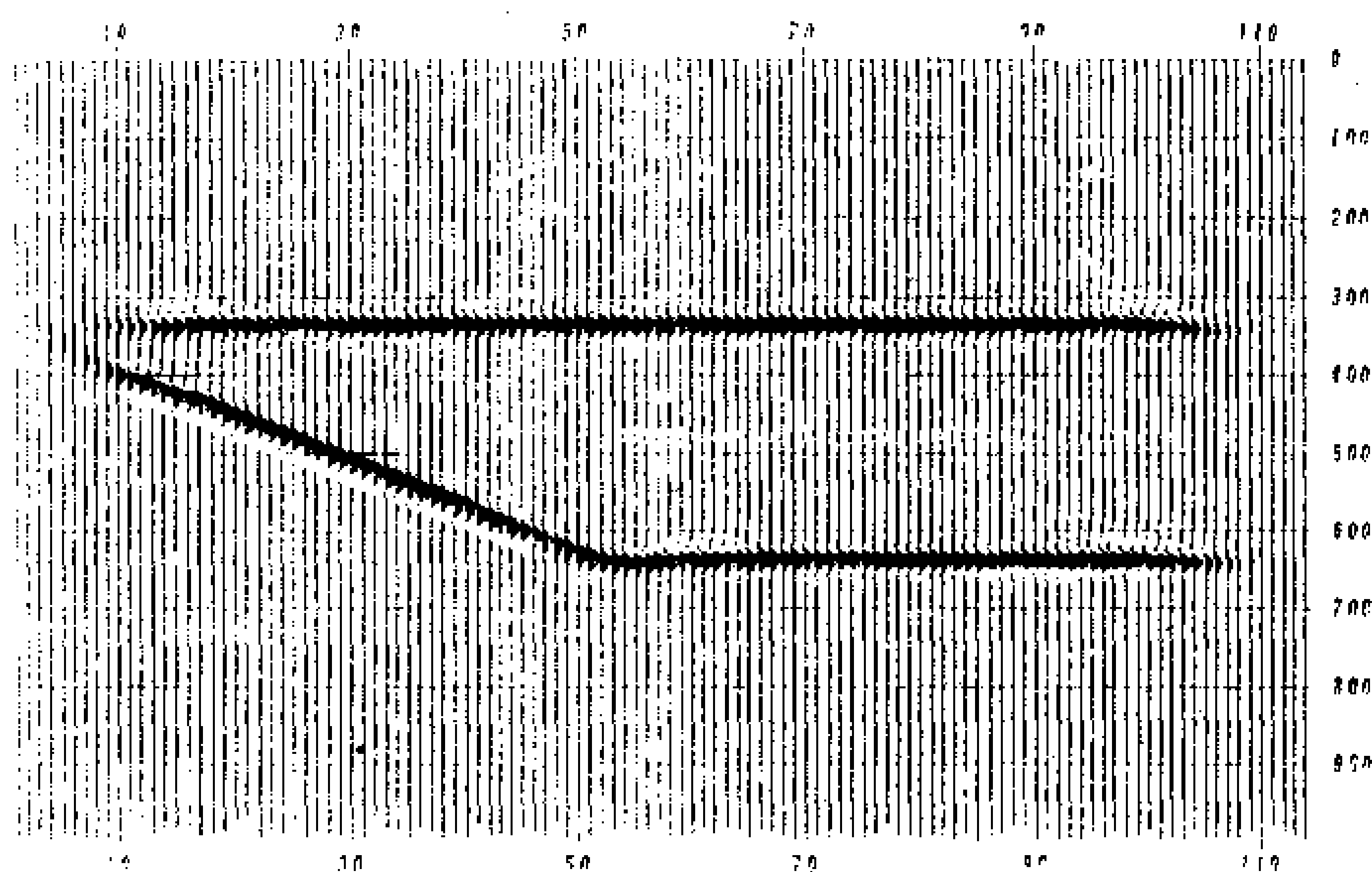


图 5.4.13 P-SV 波共炮检距剖面偏移剖面图

(a) 波动方程法偏移后叠加剖面图;(b) 波前叠加法偏移剖面图

图 5.4.13a 是 P-SV 波的波动方程法偏移后的剖面图。图 5.4.13b 是 P-SV 波的波前模糊法的偏移剖面,两者偏移结果一致,说明偏移方法正确。我们用同样的处理过程处理了炮检距分别为 150m,225m,300m,375m 和 450m 的共炮检距地震剖面,5 次覆盖分别进行的偏移结果完全一致。这可以从图 5.4.14 的一组道集的对比中非常清楚地看出来。图 5.4.14a 是由五次覆盖形成的 5 个共中心点的道集记录。图 5.4.14b 是用常规动校正对图 5.4.14a 的道集

进行动校正的结果,此时所用的速度是平均速度 v,它是由(5.4.34)式求出的,从中可以看出,常规动校正的校正量不足,这样叠加是不可能得到好的结果的。图 5.4.22c 是与前面的道集同一地面点的共转换反射点的道集,经(5.4.20)式动校正后的结果,很明显动校正过量。因此,也不会取得好的叠加结果。图 5.4.14d 是经过对 5 个共炮检距的 P-SV 波剖面,分别进行波动方程偏移处理后,抽取的同一地面点的道集,此时道集已完全拉平,用它做叠加才是正确无误的。因而,我们认为要使 P-SV 波的多次覆盖结果能够正确叠加,必须先进行共炮检距剖面的偏移,然后再叠加,方能取得具有高信噪比的如实反映地下构造的地震剖面。这就是本文研究的目的。

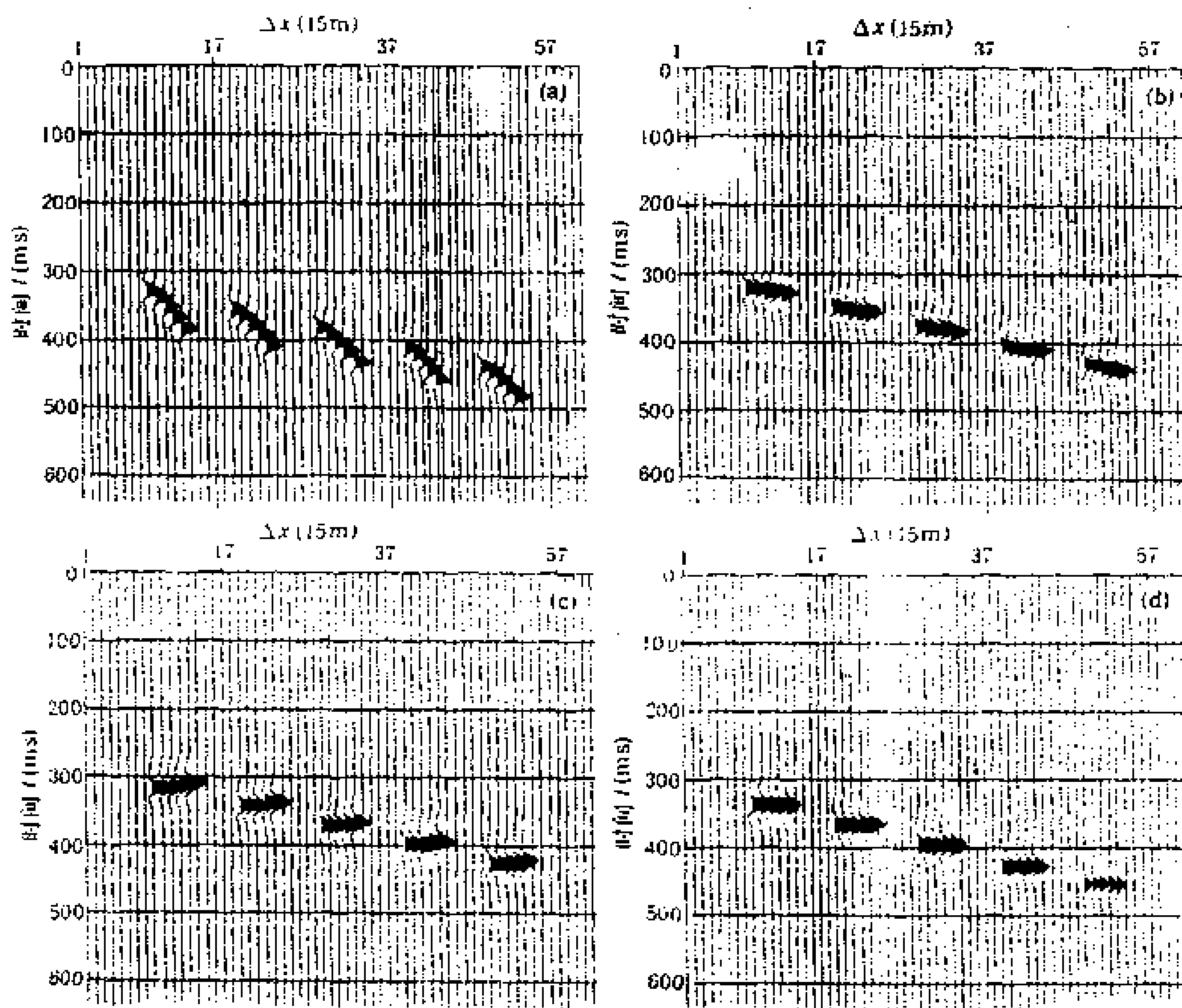


图 5.4.14 各种道集对比图

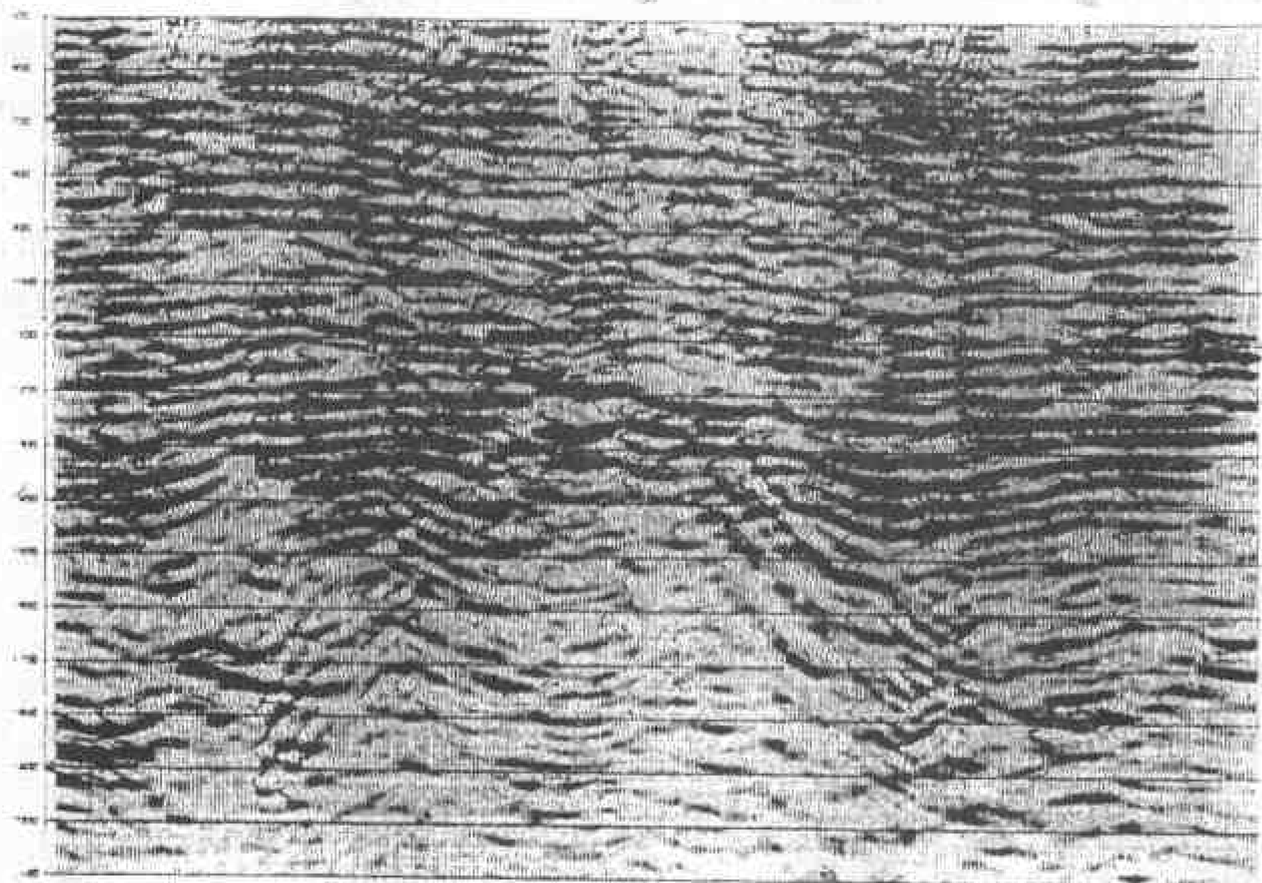
(a) 共中心点(CMP)道集;(b) 常规动校正后的(CMP)道集;

(c) 动校正后共转换点(CCP)道集;(d) 各种炮检距剖面偏移后的同一地面点的道集。

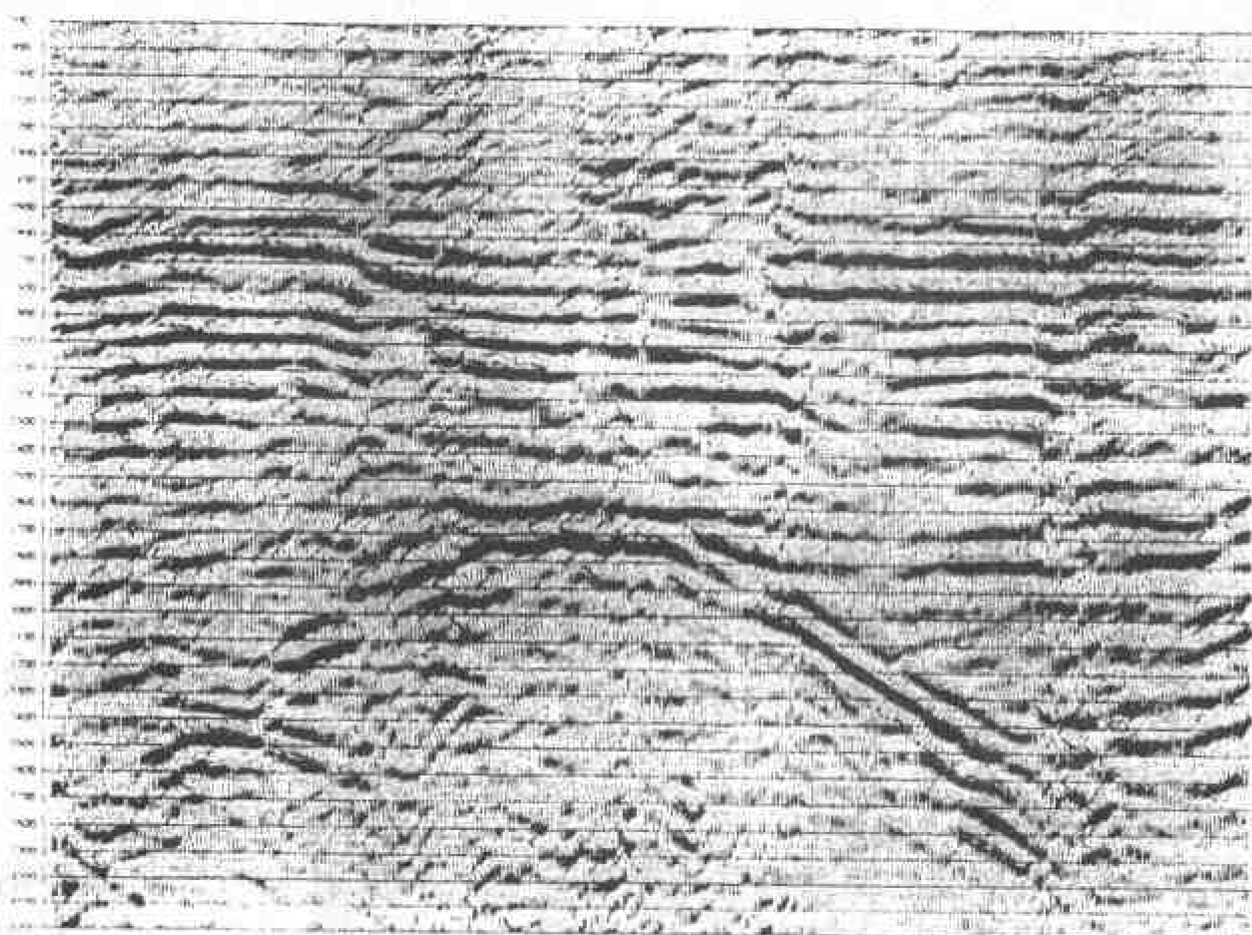
用这种偏移方法对实际地震转换波剖面进行偏移,得到了较好的地质效果。如图 5.4.15 所示。

(2) 共炮点道集的叠前偏移方法

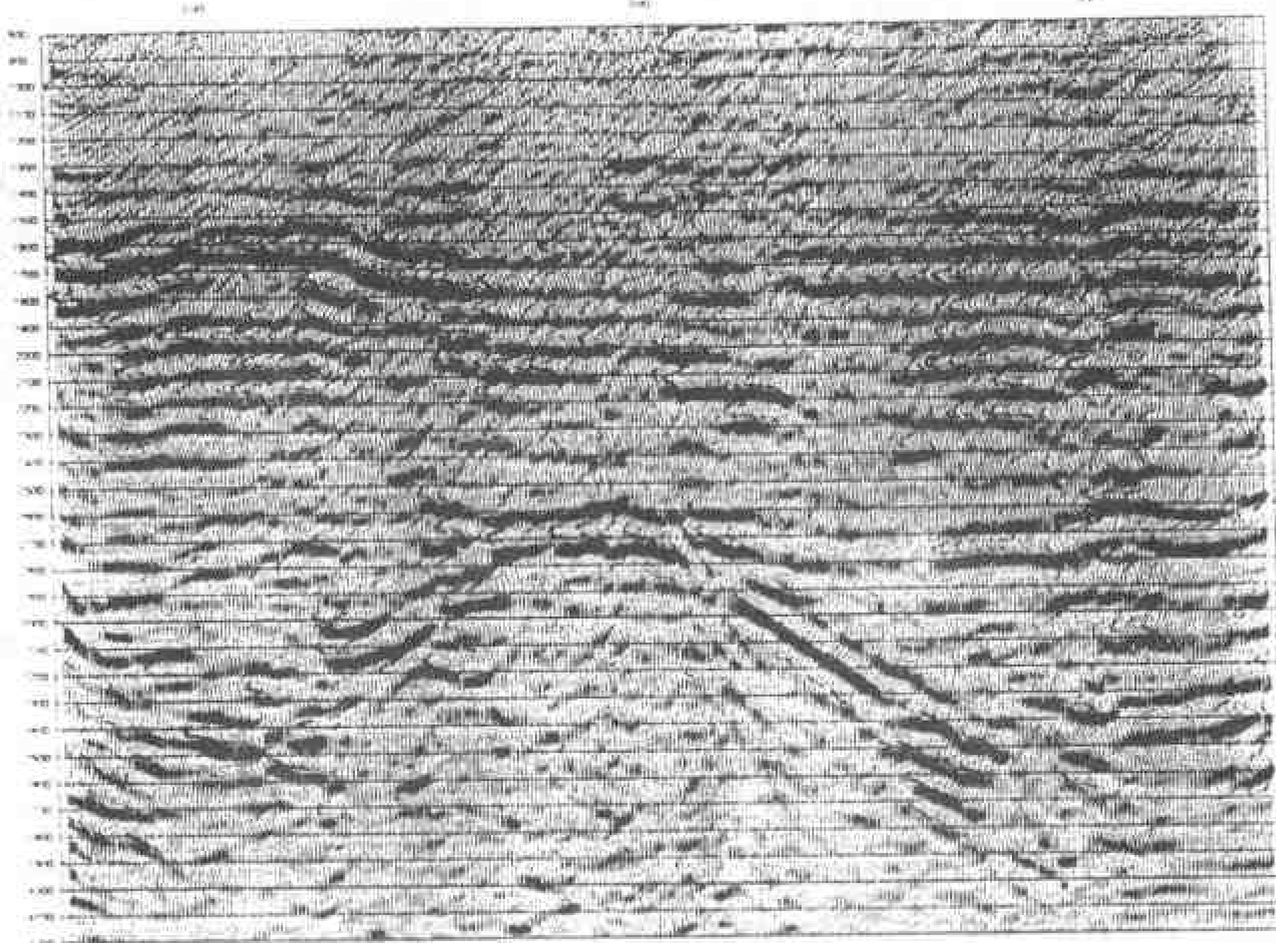
用共炮点道集进行 P-SV 波的叠前偏移的方法与纵波的反射波的叠前偏移的方法基本是一致的。其基本原理就是将每个炮点道集的记录从接收排列的地面点出发用横波速度向深度方向延拓。在每个深度面上对应地面的每个接收点位置的深度点(x,z)上,计算纵波从炮点到达该深度点上的走时 t。然后延拓到该深度点上的记录道上的时间为 t 的地方取振幅值放到输出剖面(x,z)的位置上去。所有的记录道上的每个样点都这样进行过了,一



(a) P-P反射波水平叠加剖面



(b) P-SV反射波共转换点叠加剖面



(c) P-SV 波共炮检距叠前偏移后的叠加剖面

图 5.4.15　实际地震记录的多波处理结果

个炮道集的叠前偏移工作就完成了。然后进行下一个炮点道集记录的叠前偏移工作，一直到全部炮点道集偏移结束。把所有炮点道集记录的偏移结果在同一地下深度点上叠加起来，即组成叠前偏移剖面。这即是叠前时间偏移的做法，也是叠前深度偏移的实现方法。二者的差别是，叠前时间偏移的深度表示是用不太精确的速度把深度表示为时间函数。而叠前深度偏移是要建立起精确的速度模型，并根据精确的速度模型建立起深度剖面。将叠前偏移成像的数据放置到相应的深度剖面的位置中去，这样就组成了叠前深度偏移剖面。叠前深度偏移是将求速度模型与偏移成像同时迭代完成的。叠前时间偏移是在事先给出一个粗略的速度模型一次偏移实现的。因此偏移精度比叠前深度偏移要差些。二者相差的大小视构造复杂程度而定。对于简单的构造，二者相差不大。对于复杂地质构造，可能相去甚远。

5.4.3　P-SV 转换反射波的倾角时差校正（DMO）

倾角时差校正（DMO）是一种能够把非零炮检距的地震道校正为精确的零炮检距地震道的校正方法，特别是对有倾角的反射波能够把非零炮检距地震道校正为零炮检距地震道。而这一点是通过正常时差校正所做不到的。因为只有得到零炮检距的地震道，再对零炮检距的地震剖面进行叠后偏移才能实现正确的构造成像。我们在这里，将从原理上和实用上证明 P-SV 反射波的叠前数据经 DMO 处理后再进行叠后偏移等于 P-SV 波的叠前偏移的效果。叠前倾角时差校正（DMO）也称叠前部分偏移，也是在共炮检距剖面上进行的。人们常常把纵波反射地震中的 DMO 和叠前部分偏移分开称呼，把用几何原理的从非零炮检距地震道校正为零炮检距地震道的方法称为 DMO，而将用波动方程进行这种校正的方法称为叠前部分偏移。其实目的是一样的。在此我们通称为 DMO 方法。

1. P-SV 波 DMO 的几何原理

倾角时差校正(Dip Moveout,简称 DMO)处理的目的是将有炮检距的 P-SV 波的相应反射点轨迹转换为零炮检距的反射 P-SV 波的响应曲线(马在田,1995)。如图 5.4.16 所示,在(x,z)点的法线反射,即零炮检距的反射将在$(\xi,0)$点被记录。该法线的斜率 s 为

$$s=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{z}{x-\xi} \tag{5.4.35}$$

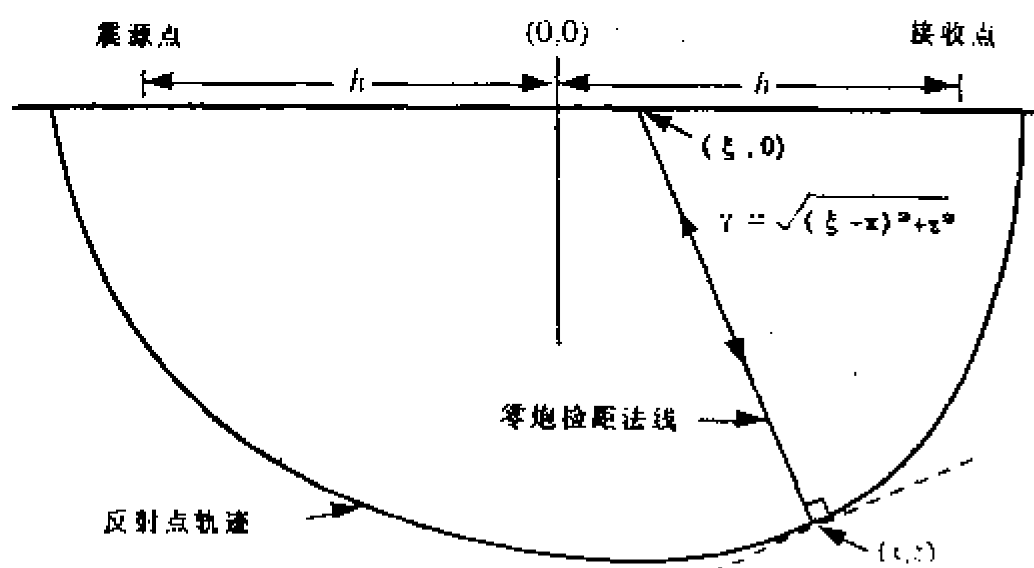


图 5.4.16 用 P-SV 波反射点轨迹计算 DMO 曲线原理图

由上式得出 P-SV 波反射点轨迹上任一点(x,z)的零炮检距的地面点 ξ 的坐标为

$$\xi(x)=x+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{5.4.36}$$

我们已求出 P-SV 转换反射波的走时 t 为

$$t=\frac{[(x+h)^2+z^2]^{1/2}}{\alpha}+\frac{[(x-h)^2+z^2]^{1/2}}{\beta} \tag{5.4.37}$$

式中 $\alpha=v_p$,为纵波速度;

$\beta=v_s$,为横波速度;

h 为半炮检距。

对于 P-P 反射波,有 $\alpha=\beta=v$,则上式变为典型的椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

式中 $a=vt/2$;

$b=\frac{v(t^2-4h^2)^{1/2}}{2}=\frac{vt_n}{2}$;

t_n 为正常时差(NMO)。

(5.4.37)式展开可得

$$z^2+x^2+h^2=(\alpha^2-\beta^2)\{(\alpha^2+\beta^2)[\alpha^2\beta^2t^2+2h(\alpha^2-\beta^2)x] \\ -2\alpha^2\beta^2t[\alpha^2\beta^2t^2+4h(\alpha^2-\beta^2)x]^{1/2}\} \tag{5.4.38}$$

用上式求得(5.4.36)式中微分项为

$$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{h}{\alpha^2\beta^2}\left\{(\alpha^2+\beta^2)-\frac{2\alpha^2\beta^2t}{[\alpha^2\beta^2t^2+4h(\alpha^2-\beta^2)x]^{1/2}}\right\}-x \tag{5.4.39}$$

将上式代入(5.4.36)式中,得

$$\xi(x)=\frac{h}{\alpha^2-\beta^2}\left\{(\alpha^2+\beta^2)-\frac{2\alpha^2\beta^2h^2}{[\alpha^2(h-\xi)+\beta^2(h+\xi)]^2}-1\right\} \tag{5.4.40}$$

从(x,z)到$(\xi,0)$的距离 r 有关系式

$$r^2=(\xi-x)^2+z^2 \tag{5.4.41}$$

将(5.4.38)式中的 z^2 代入上式并整理得

$$r^2=(h^2-\xi^2)\left\{\frac{\alpha^2\beta^2t^2}{2h[\alpha^2(h-\xi)+\beta^2(h+\xi)]}-1\right\} \tag{5.4.42}$$

于是得零炮检距的反射时间 t_{ops}

$$\begin{aligned}t_{ops}&=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\gamma\\&=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)(h^2-\xi^2)\left\{\frac{\alpha^2\beta^2t^2}{2h[\alpha^2(h-\xi)+\beta^2(h+\xi)]}-1\right\}\end{aligned} \tag{5.4.43}$$

(5.4.43)式即为计算 DMO 的微笑形响应。用此方程对不同炮检距的理论记录和实际剖面进行了处理,然后再进行叠后偏移,其结果与 P-SV 波的波动方程法叠前偏移一致。

2. 波动方程法 DMO

在上一节我们已导出 P-SV 波的反射点轨迹方程的高阶近似式为

$$z^2+\left(1-\frac{4h^2r}{v_s^2t_n^2+4h^2r}\right)x'^2=\frac{v_s^2t_n^2}{(1+r)^2}$$

我们用上式求 DMO 的微笑形响应方程为

$$r^2+\frac{v_s^2t_n^2}{4h^2r}\xi^2=\frac{v_s^2t_n^2}{(1+r)^2} \tag{5.4.44}$$

式中 r 为反射点轨迹上某点(x,z)至零炮检距地面点$(\xi,0)$的距离;

ξ 为零炮检距的地面点的坐标。

因为在零炮检距的坐标系中 r 实际上是深度 z,ξ 为水平距离,因此我们令 $r=z,\xi=x$ 则(5.4.44)式可表示为

$$z^2+\frac{v_s^2t_n^2}{4h^2r}x'^2=\frac{v_s^2t_n^2}{(1+r)^2} \tag{5.4.45}$$

同样,我们取 x^2 前面的 t_n 为常数值 $\bar{t}_n$,则上式可表示为

$$z^2+k(\bar{t}_n)x'^2=v_a^2t_n^2 \tag{5.4.46}$$

式中 $k(\bar{t}_n)=v_s^2t_n^2/4h^2r$;

$v_a=v_s/1+r$。

(5.4.46)式又可表示为

$$z^2+x^2=v_a^2t_n^2 \tag{5.4.47}$$

式中 $x=[K(t_n)]^{1/2}x'$。

与(5.4.47)式相对应的波动方程的象征方程为

$$k_z^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{v_a^2} \tag{5.4.48}$$

式中 $k_{x'}$ 为水平波数;

k_z 为垂向波数；

ω 为圆频率。

由(5.4.48)式可知它所对应的偏微分方程为

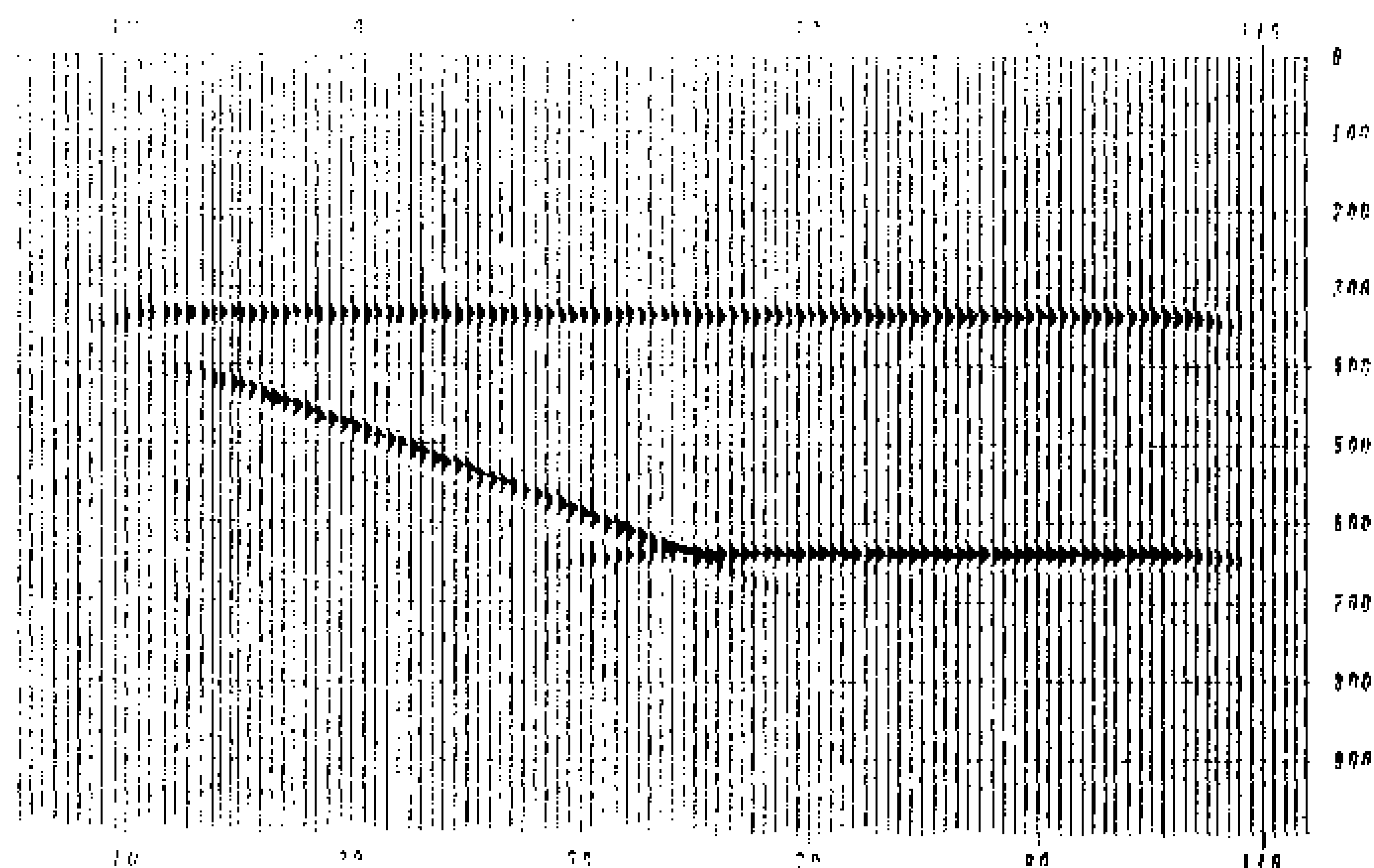
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v_a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.4.49}$$

将相应的 $k(\bar{t}_n)$ 值代回到原坐标系(x,z)中去，得

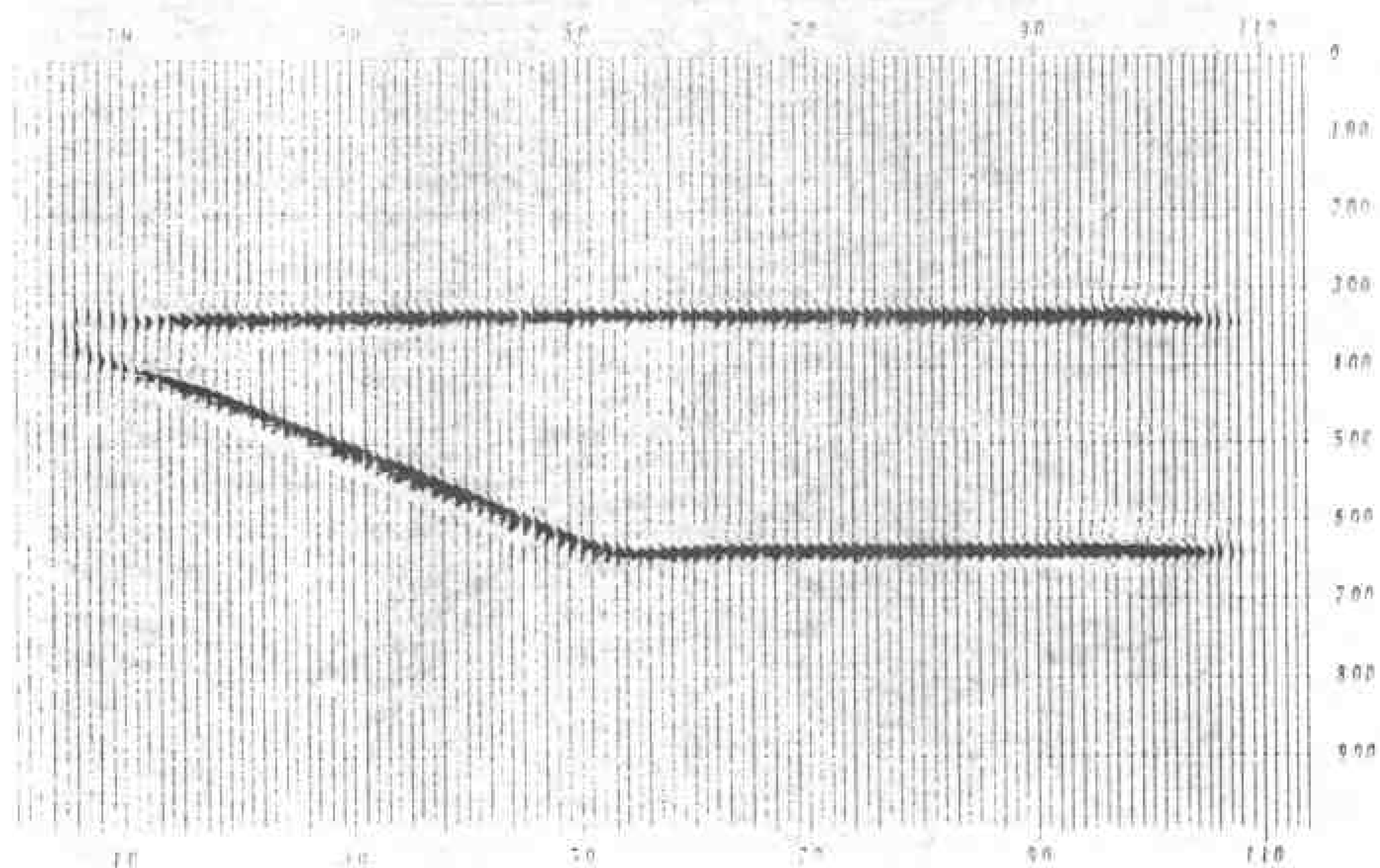
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{4h^2 r}{v_s^2 \bar{t}_n^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}=\frac{(1+r)^2}{v_s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_n^2} \tag{5.4.50}$$

上式即为 P-SV 反射波的波动方程法 DMO 公式。

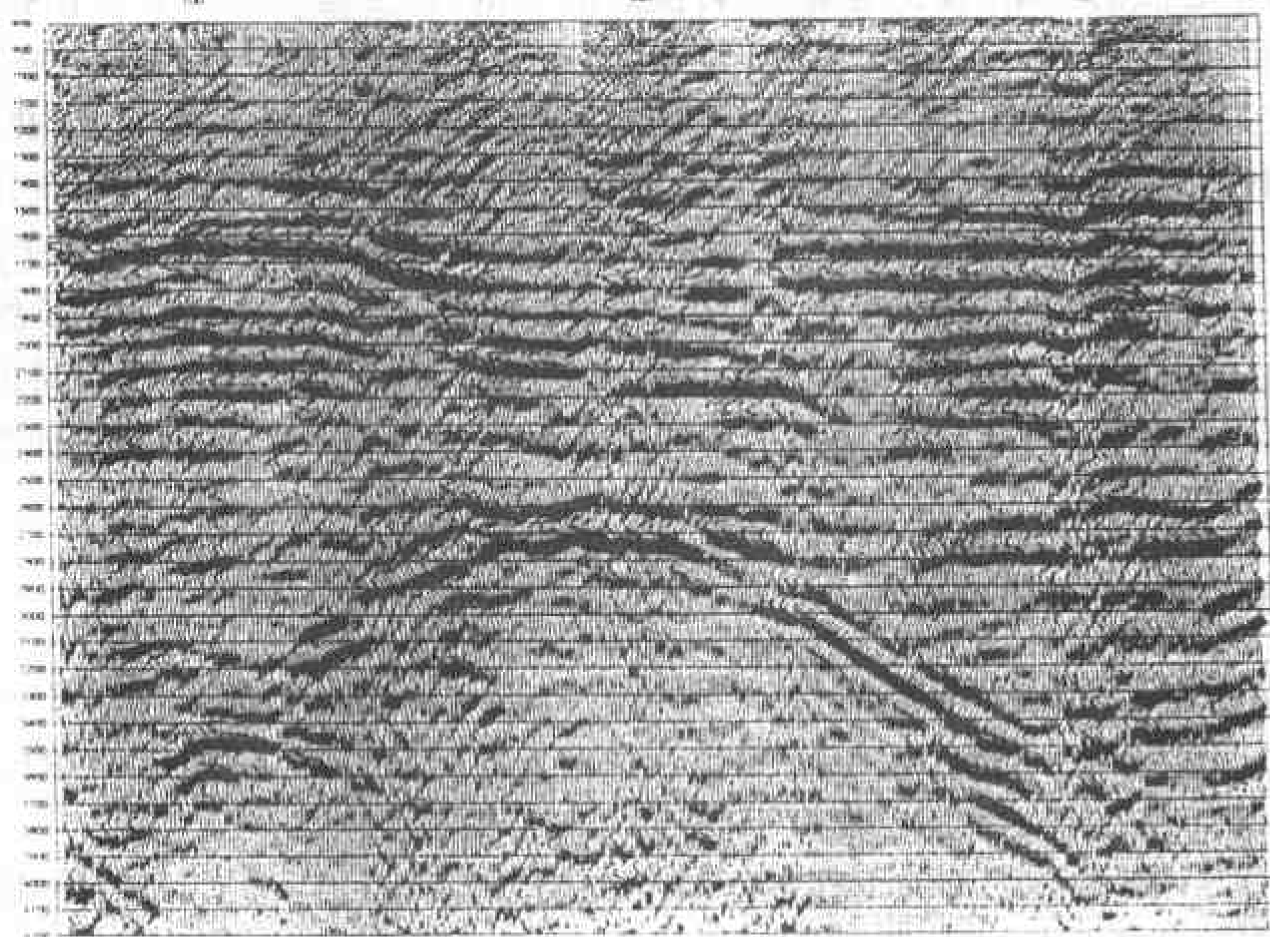
图 5.4.17 是几何方法 DMO 与波动方程法 DMO 对同一倾角为 20°的地层的共炮检距地震剖面的处理结果。我们对 5 种不同炮检距的剖面做了同样的对比处理，两种方法的结果均一致。这里给出的是炮检距为 450m 的 DMO 处理结果，图 5.4.17a 是几何方法 DMO 的处理理结果，图 5.4.17b 是波动方程法 DMO，即用(5.4.17)式进行部分偏移处理的结果。图 5.4.18 是对共炮检距剖面做 DMO 处理后又进行了叠后偏移处理的剖面，图 5.4.18a 是图 5.4.17a 的叠后偏移剖面，图 5.4.18b 是图 5.4.17b 的叠后偏移剖面，两者基本一致。说明用本文的波动方程法进行的等效于 DMO 的叠前部分偏移处理方法是正确的。尚需指出用 DMO 加叠后偏移处理的共炮检距地震剖面与一次使用 P-SV 波叠前偏移方法处理的剖面是完全等效的，见(图 5.4.18a)。这个实际处理结果，证实了理论分析得到的结论，即叠前偏移等于 DMO 加叠后偏移，在实用中采用何种处理方法来进行偏移处理，由使用者来选择。一般地，为了取得偏移前的叠加地震剖面，要进行 DMO 处理，然后叠加。将叠后的结果再做叠后偏移处理即得到偏移剖面，这样可以获得两种不同的地震剖面。而一次性的叠前偏移结果只能在偏移后进行叠加，获得的是一种偏移剖面，得不到偏移前的叠加剖面。不过，此时的工作量可省掉叠后偏移的过程，为了看出进行 DMO 处理后各种炮检距的共地面点道集的



(a) 理论记录的 P-SV 波 DMO 剖面图

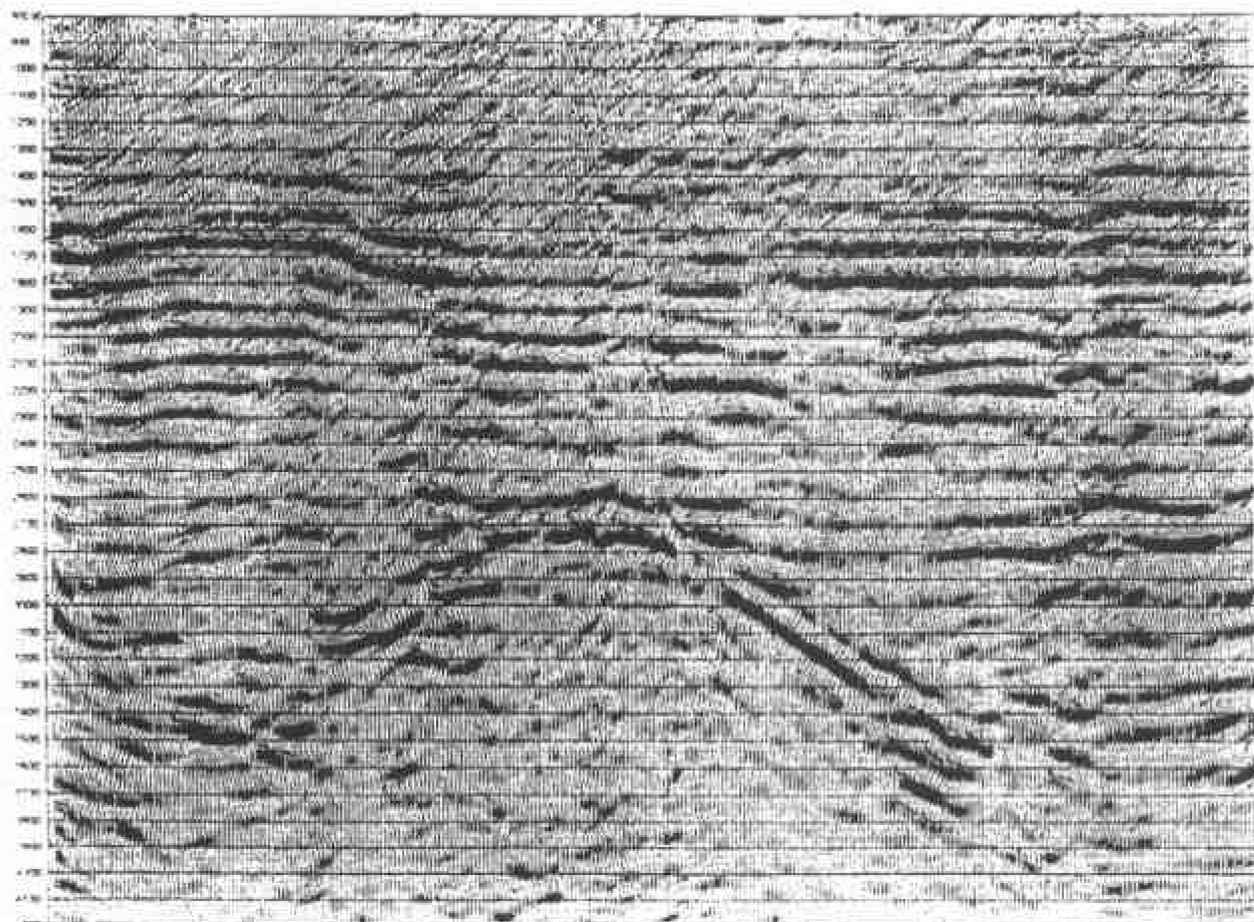


(a) 理论记录的 DMO + 叠后偏移剖面图



(b) 实际记录 P-SV 波 DMO 剖面图

图 5.4.17 P-SV 波 DMO 剖面



(b) 实际记录的 DMO + 叠后偏移剖面图

图 5.4.18 DMO + 叠后偏移剖面

P-SV 地震反射波能够同相相加。我们将 DMO 后的多次覆盖的共地面点 DMO 道集和同一地面点的共中心点的 NMO 校正道集，共转换点的 NMO 校正道集以及叠前偏移后的共地面点道集表示在图 5.4.19 上。图 5.4.19a 是共中心点道集经过 NMO 处理的结果，此时使用的动校正速度为平均速度 v 由图 5.4.19a 可见同相轴未对齐，动校正量不足，叠加效果不会好；图 5.4.19b 是同一地面点的共转换点道集的动校正结果，此时使用的动校正公式是(准确)式，图 5.4.19b 说明，动校正量过大，也不会有好的叠加效果；图 5.4.19c 是同一地面点的 DMO 处理后的道集，同相轴已拉平，将它们叠加起来将会获得高质量的理想的剖面；图 5.4.19d 是叠前偏移处理后同一地面点不同炮检距的道集，也获得了很好的同相性，与 DMO 道集具有相同的效果，但与 DMO 道集所不同的是最后一个道集处在偏移剖面的尾部，所以能量减弱这是正常的。

5.4.4 P-SV 反射波的叠后偏移

P-SV 波的叠加剖面有两种，一种是动校正后的共转换点叠加剖面，另一种是在做过 DMO 处理之后进行叠加的剖面。两种叠加剖面的叠后偏移方法应当是相同的，而且与纵波叠加剖面的叠后偏移除了所用的速度不同外，其它方面也是一样。

我们从 P-SV 反射波的叠前偏移方程(5.4.31)式和 DMO 方程(5.4.50)的比较中可以发现，P-SV 反射波的叠后偏移方程应当是：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{(1+r)^2}{v_s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5.4.51}$$

式中 $r = v_S/v_P$；

v_S 为横波速度。

从(5.4.51)式可以看出，叠后偏移所用的速度等于一种纵波和横波的偏移速度的某种平均

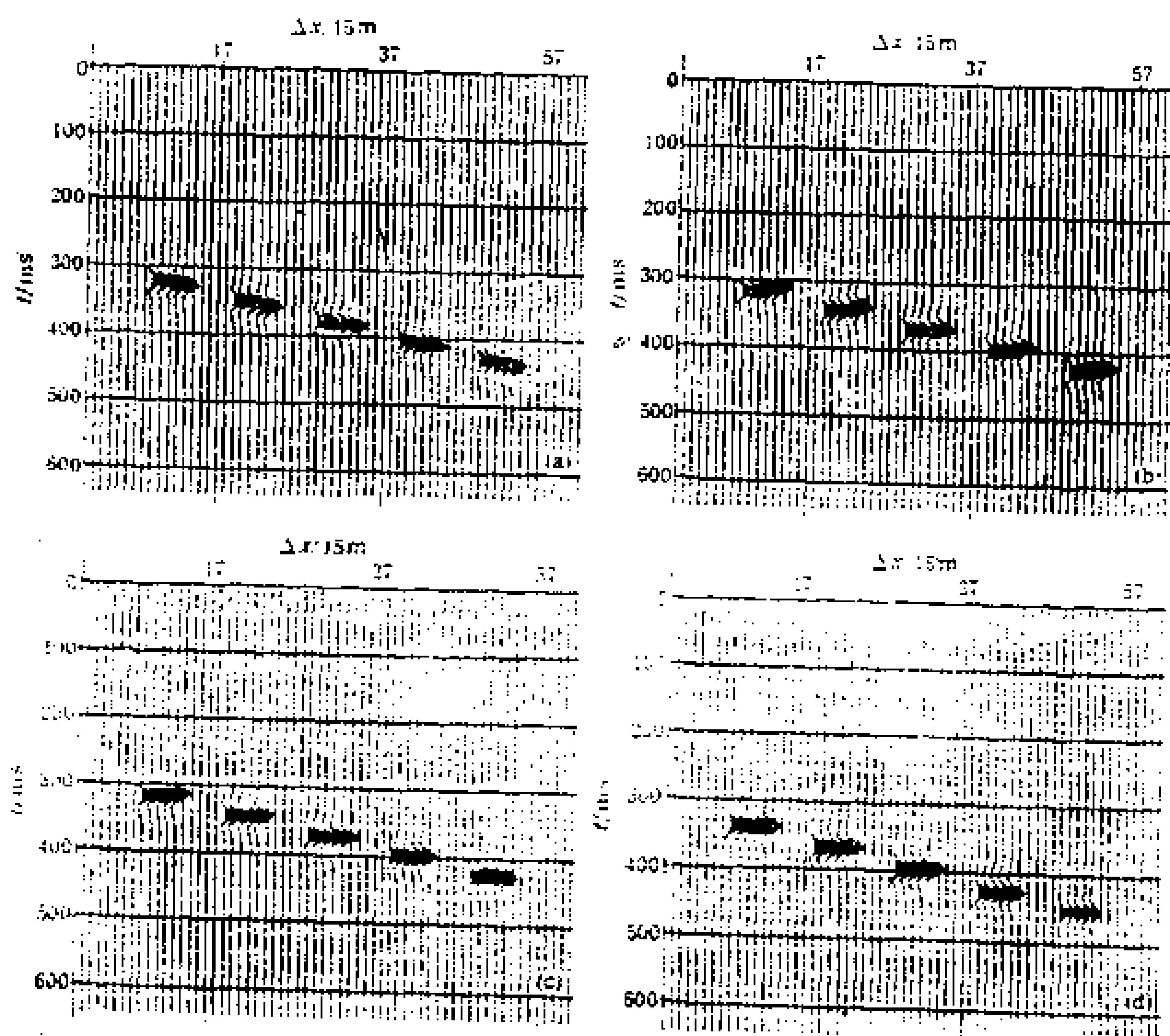


图 5.4.19 各种道集的比较

(a) 共中心点道集 NMO 结果；(b) 共转换点道集动校正结果；
(c) DMO 处理后共地面点道集；(d) DMO + 叠后偏移后的共地面点道集

速度。叠后偏移用的速度 v 的倒数为

$$\frac{1}{v}=\frac{1+r}{v_S}=\frac{v_P+v_S}{v_P v_S}=\frac{1}{v_P}+\frac{1}{v_S}$$

因此它等于我们前面使用的平均速度。

从 P-SV 波的偏移讨论中我们已导出 P-SV 波的共炮检距剖面的叠前偏移等于 P-SV 波的 DMO 加上叠后偏移。这与 P-P 波的结论是一致的(马在田,1990)。

最后,我们要说明的是,在这一节中我们所讨论的 P-SV 波的二维叠前偏移、DMO 和叠后偏移方法完全可以扩展到三维情况中去。关于这一点也与纵波中提出的一些有关三维叠前偏移,三维 DMO 等的方法相类似(陈必远,1994,耿建华,1994)。

5.5 电磁场电阻率偏移成像

关于电磁场的偏移成像主要是 80 年代后期开始的。一开始主要是区分不同的电性层面,最近才提出进行电阻率值的偏移成像(Zhdanov, 1996)。

5.5.1 电磁(EM)场偏移的物理意义

EM 偏移的物理原理与激光全息和地震偏移是相平行的。由人工控制源和自然源产生

的 EM 场是由两个场组合的,一个是初始场向地下传播,而二次场在地下内部构造散射后向上传播。两个场在地球中满足扩散方程。它们的振幅衰减和相位在传播方向上延迟。地面上的电场和磁场的测量结果可分解为上行和下行场。用上行波场的地面测量结果可重建场的地球内部信息,可以估算地电结构。和地震偏移一样,可以将接收的信息反向外推到界面或者用内部流做为扩散方程的边界条件。这个变换常常称为解析延拓。但是,当存在测量噪声时,这是一个不稳定的过程。另外的方法是把在每个站点上接收的背向散射信息的时间流向返转过来并且用原始扩散方程将逆时信号向下方扩散。这个扩散的逆时场称为偏移场。它们的振幅将向下衰减,而与原来的上行场是很不同的,原来的上行场是随深度增加的。这个偏移场的可用性是由下面的事实说明的。

首先,与扩散逆时信号有关的相位延迟与原来时间上的向下时间超前相对应。这样,偏移场的向下的相位性质,实质上是与原来的上行场的相位是相同的,对所有站点上的偏移信号对源的求和表现为像原始场在内部散射点上的结构相干性是同样的。

其次,噪声在偏移过的场中向下衰减,因为偏移满足原来的扩散方程。这与对逆时扩散方程用接收信号本身做为边界条件的向下解析延拓时的误差增加正相反。这样,从偏移场估计地球内部的上行场的相位更准确。

有很多地质雷达(GPR)反射剖面的偏移方法。所有的算法都是建立在地质雷达与地震波传播的运动学相似上。但是,在低频或在良好导体环境,导体流很大。这时建立在波动方程上的地震偏移不再适合处理 EM 数据,因为 EM 场是向地下扩散的。也有一些方法是将扩散的 EM 场变换为波场(Lee el al., 1989),但是这种积分变换是病态的,如果不正则化将会使干扰扩大而破坏结果。

比较恰当的方法不是将扩散场变成波场,而是将波场分析的原理变成对 EM 场的解释,形成电磁偏移方法。可以将地震波场从地面向地下反向外推进行偏移成像的方法用于 EM 场的解释。我们考虑由电离层的自然源或人工源产生我们测得的全 EM 场,同步接收系统位于地面。我们可以将接收器用人工流或激发源组代替。当这些人工源作用在逆时方向时,它们产生的场称为偏移的 EM 场。和地震情况一样,这个场主要是描述地球内部结构的界面,并给出地球内部的“地电像”。

5.5.2 数学基础

设有一模型,其中有一水平面 $z=0$,它将导体的地球 $z>0$ 与非导体的大气层($z<0$)分开。地球的电导率 $\sigma(r)$是任意坐标的函数,它可以是正常电导率 $\sigma_n(r)$和异常电导率 $\Delta\sigma(r)$之和,即 $\sigma(r)=\sigma_n(r)+\Delta\sigma(r)$。在此模型中的 EM 场是由位于电离层或地面上的任意源激发的。在地面上的场分量表示为

$$\{E_x^0(r,t), E_y^0(r,t), 0\} \tag{5.5.1a}$$

和

$$\{H_x^0(r,t), H_y^0(r,t), H_z^0(r,t)\} \tag{5.5.1b}$$

我们称偏移场为 $E^m(r,\tau)$,$H^m(r,\tau)$,这个场有下列条件:

$$\{E_x^m(r,\tau), E_y^m(r,\tau), E_z^m(r,\tau)\}_{z=0} = \{E_x^0(r,-\tau), E_y^0(r,-\tau), 0\}_{z=0} \tag{5.5.2}$$

$$\{H_x^m(r,\tau), H_y^m(r,\tau), H_z^m(r,\tau)\}_{z=0} = \{H_x^0(r,-\tau), H_y^0(r,-\tau), -H_z^0(r,-\tau)\} \tag{5.5.3}$$

$$\mathrm{Curl}H^m(r,\tau)=\sigma_n(r)E^m(r,\tau) \tag{5.5.4}$$

$$\mathrm{Curl}E^m(r,\tau)=-\mu_0\frac{\partial H^m}{\partial \tau}(r,\tau) \qquad z\geqslant 0 \tag{5.5.5}$$

$$\{H^m(r,\tau),E^m(r,\tau)\}\to 0,\text{当}|r|\to\infty\text{时} \tag{5.5.6}$$

我们看到偏移场 E^m, H^m 是逆时 τ 上的 EM 场。必须用(5.5.5)式的右端的观测磁场的垂直分量的负值使偏移场满足 Maxwell 方程一直到观测面 $z=0$,因为观测场 E^0、H^0 在实时间 t 上满足 Maxwell 方程。在实时 $t=-\tau$ 上偏移场满足伴随方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{Curl}H^m&=\sigma_n E^m\\ \mathrm{Curl}E^m&=\mu_0\frac{\partial H^m}{\partial t}\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

这些方程说明偏移场是从接收点向源方向传播的,这就是说它是个反传场。为了简单,设 σ_n 为地球的常数背景导电率。此时电磁场满足扩散方程

$$\nabla^2 H-\mu_0\sigma_n\frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{5.5.8a}$$

和

$$\nabla^2 E-\mu_0\sigma_n\frac{\partial E}{\partial t}=0 \tag{5.5.8b}$$

除了异常电导率区外都满足。因此,分量将满足标量方程

$$\nabla^2 p(r,t)-\mu_0\sigma\frac{\partial p(r,t)}{\partial t}=0 \tag{5.5.9}$$

令 $p^0(r,t)$表示在地面上测定的任意分量 H_x^0,H_y^0,H_z^0,E_x^0 或 E_y^0。则 EM 场特定的标量分量 p^0 的偏移场 p^m 满足

$$p^m(r,\tau)|_{z=0}=p^0(r,-\tau)|_{z=0} \tag{5.5.10}$$

和

$$\nabla^2 p^m(r,\tau)-\mu_0\sigma\frac{\partial p^m(r,\tau)}{\partial \tau}=0 \qquad z>0 \tag{5.5.11}$$

$$p^m(r,\tau)\to 0 \qquad \text{当}|r|\to\infty \tag{5.5.12}$$

把原来的时间 t 代入(5.5.11)式,我们将得到伴随扩散方程

$$\nabla^2 p^m(r,-t)+\mu_0\sigma\frac{\partial p^m(r,-t)}{\partial t}=0 \tag{5.5.13}$$

如果原来的扩散方程描述的是从源到接收点的场传播过程,则(5.5.13)式描述的是从接收点到源的场传播的逆过程。建立偏移场就是将地面的场 p^0 在逆时间上延拓到下半空间,我们称这个问题的解为 EM 偏移。严格地说,这只相当于地震中的波场向下外推。要成像还要用其它条件。

如上所述,偏移场的计算归结为由(5.5.2)式和(5.5.6)式描述的边值问题。

5.5.3 偏移方法

将单分量的 EM 场 p 做三维傅氏变换,得 $p(k_x,k_y,z,\omega)$,则(5.5.9)式可表示为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tilde{p}(k_x,k_y,z,\omega)=v^2\tilde{p}(k_x,k_y,z,\omega) \tag{5.5.14}$$

式中 $v^2=(k_x^2+k_y^2-\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma)$。$\mathrm{Re}(v)>0$ 是 (k,ω) 域中的波数和 $0<z<d$（d 是从地面到异常电导率区的表面的距离）。这个方程的一般解表示为

$$\tilde{p}(k_x,k_y,z,\omega)=p_u(k_x,k_y,\omega)\exp(vz)+p_d(k_x,k_y,\omega)\times\exp(-vz) \tag{5.5.15}$$

式中 $\tilde{p}_u$ 和 $\tilde{p}_d$ 为地面上场的上行分量和下行分量的谱。

从上式可以求出上行部分和下行部分场的解析延拓式。但求出的上行分量外推计算式是不稳定的，是一种病态方法。对于下行分量是稳定的。

我们可以从另外的角度来求上行部分的稳定算式。根据(5.5.13)式偏移上行场 $P^{mu}(k_x,k_y,z,\omega)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tilde{p}_u^{m*}(k_x,k_y,z,\omega)=v^2\tilde{p}_u^{m*}(k_x,k_y,z,\omega) \tag{5.5.16}$$

式中 $v^2=(k_x^2+k_y^2+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma)$；

$*$ 表示复共轭值；

$0<z<+\infty$。

解此方程，可求得深度 z 上偏移上行场的复共轭谱为

$$\tilde{p}_u^{m*}(k_x,k_y,z,\omega)=P_u(k_x,k_y,0,\omega)\exp(-vz) \tag{5.5.17}$$

此处我们取 $R_e v=(k_x^2+k_y^2+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma)^{1/2}>0$ 的一支。上式给出 EM 场分量的频率域的偏移算法，与地震中的 Gazdag 偏移方法相似。

用上式于各个分量，可以求出它们的偏移值。如果介质的电导率在水平方向上有缓慢变化，可以用有限差分法进行二维和三维介质的偏移计算。

5.5.4 地电界面成像和电阻率成像

用 EM 偏移进行地下成像，包括地电分界面的确定和电阻率的求取。先讨论地电分界面的问题，然后阐述求电阻率的问题。

1. 地电分界面成像

设有两层 $(l,l+1)$ 模型，且有导电率的缓慢变化 $\sigma_l(x,z)$ 和 $\sigma_{l+1}(x,z)$，但 σ_l 与 σ_{l+1} 之间差异是很明显的。首先分析模拟水平分界面 $[s;(x,z_s(x))]$ 上的电场的水平分量(TE)的性质。在第一层中电场分量的表达式为

$$\begin{cases}E_y(x,z,\omega)=Q_E^d(x,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}+Q_E^u(x,z,\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}\\ E_y'(x,z,\omega)=\mathrm{i}k_e Q_E^d(x,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}-\mathrm{i}k_2 Q_E^u(x,z,\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}\end{cases} \tag{5.5.18}$$

式中 Q 是与深度有关的常数；

Q^d 表示下行部分的系数；

Q^u 表示上行部分的系数；

$k_l=[\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma l(x,z)]^{1/2}$ 是波数；

$\sigma_l(x,z)$ 是 l 层的电导率；

E_y' 表示电场的垂直导数。

在第二层中有

$$\begin{cases} E_y(x,z,\omega) = Q_E(x,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{l+1}z} \\ E'_y(x,z,\omega) = \mathrm{i}k_{e+1}Q_E(x,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{l+1}z} \end{cases} \tag{5.5.19}$$

在分界面 $S[z=z_s(x)]$ 上，E_y 和 E'_y 是连续的。因此上面两式(5.5.18)和(5.5.19)式的右端项是相等的。由此得

$$\frac{Q_E^u}{Q_E^d} = \beta^{(l)}(x,z_s)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k_e z_s} \tag{5.5.20}$$

式中

$$\beta^{(l)}(x,z_s) = \left.\frac{\sqrt{\sigma_l}-\sqrt{\sigma_{l+1}}}{\sqrt{\sigma_l}+\sqrt{\sigma_{l+1}}}\right|_{z=z_s} \tag{5.5.21}$$

(5.5.21)式称为反射率系数。

同样地，用 TM 也能计算出似反射率

$$\beta_{Ma}(x,z_s,\omega) = \beta^{(l)}(x,z_s) \tag{5.5.21}$$

它等于真反射率函数。

在这里同样可以用地震成像的原则，即下行场的相位在分界面上等于上行场的相位来确定分界面。

我们可把电的和磁的视反射率函数 $\beta_{E,Ma}(r,\omega)$ 写为

$$\beta_{Ea}(x,z,\omega) = \frac{E_u^u}{E_y^d} = \left|\frac{E_y^u}{E_y^d}\right|\exp(\mathrm{i}(\varphi_E^u - \varphi_E^d)) \tag{5.5.22a}$$

$$\beta_{Ma}(x,z,\omega) = -\frac{H_u^u}{H_y^d} = \left|\frac{H_y^u}{H_y^d}\right|\exp(\mathrm{i}(\varphi_M^u - \varphi_M^d)) \tag{5.5.22b}$$

规格化后只与相位差有关

$$\beta_{Ea}^n = \frac{\beta_{Ea}}{|\beta_{Ea}|} = \exp(\mathrm{i}(\varphi_E^u - \varphi_E^d)) \tag{5.5.23a}$$

$$\beta_{Ma}^n = \frac{\beta_{Ma}}{|\beta_{Ma}|} = \exp(\mathrm{i}(\varphi_M^u - \varphi_M^d \pm \pi)) \tag{5.5.23b}$$

当观测点接近到地电分界面 S 时，则有

$$\varphi_{EM}^u(x,z,\omega) - \varphi_{E,M}^d(x,z,\omega) \to \Delta\varphi(x,z) \tag{5.5.24}$$

式中　$\triangle\psi(x,z)$与频率无关(只等于 0 或 π)。

因此我们看到，$\beta_{E,Ma}^n$的相位与频率关系是密切的，除在高导电率的内界面上，因为此时几乎是与频率无关的。如果把 $\beta_{E,Ma}^n$对频谱叠加起来，这会导致在界面上正向加强，其它处为无规律的互相干涉。叠加式表示为

$$\bar{\beta}_{E,Ma}^n(x,z) = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\beta_{E,Ma}^n(x,z,\omega_j) \tag{5.5.25}$$

和

$$\begin{cases} \bar{\beta}_{E,Ma}^n(x,z)_{J\to\infty} \to 0 & \text{如果}(x,z)\notin S \\ \beta_{E,Ma}^n(x,z)_{J\to\infty} \to 1 & \text{如果}(x,z)\notin S \end{cases} \tag{5.5.26}$$

上述性质对多层介质一样适用。用上述方法对模型数据进行了试验。

图 5.5.1 描述了一个二维阶梯构造的处理结果。图 5.5.1a 和图 5.5.1b 用 TE 计算的视

电阻率和相位剖面。图 5－37c 表示规格化的视反射率函数 $\beta^{n}_{E,Ma}(x,z)$，它的最大值几乎与分界面重合。图 5－37d 表示有 20% 高斯噪声时的计算结果。

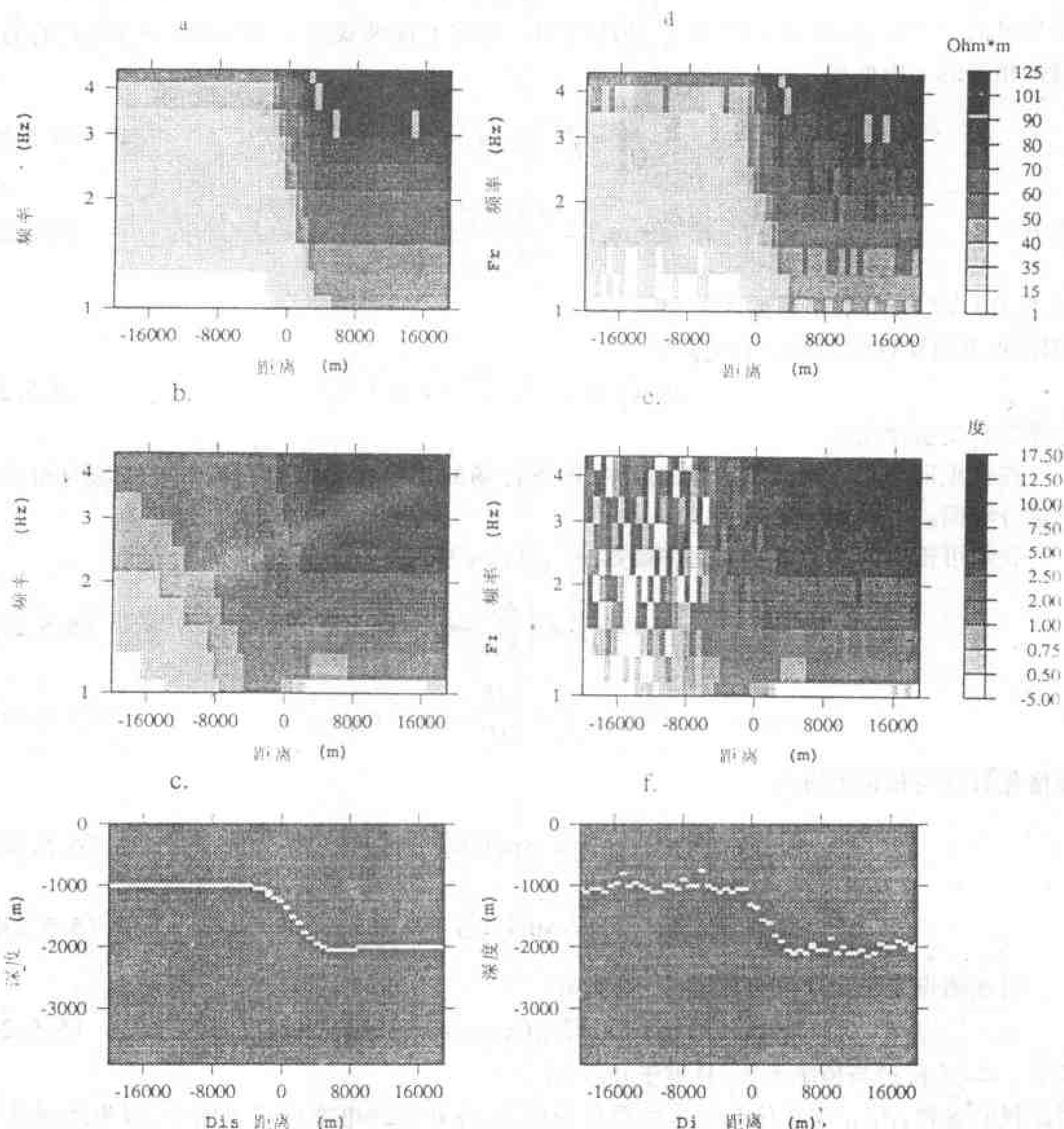


图 5.5.1 用 EM 偏移成像求地电分界面（根据 Zhdanov 等，1996）

2．电阻率成像

我们不仅希望确定地电分界面的几何形态，而且还希望知道电阻率的分布。这可以用反射率函数的垂向分布来分析这个问题。从两层模型开始。由于在地电界面上的反射率系数 $\beta_1=(\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2})/(\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2})$，所以下伏层的电阻率 ρ_2 可计算为

$$\rho_2=\left\{\frac{[1+\bar{\beta}_{E,Ma}(x,z)]}{[1-\bar{\beta}_{E,Ma}(x,z)]}\right\}^2\rho_1 \tag{5.5.27}$$

式中
$$\bar{\beta}_{E,Ma}(x,z)=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\beta_{E,Ma}(x,z,\omega) \tag{5.5.28}$$

另外，我们知道，将偏移的反射率函数 $\beta_{E,Mm}(x,z,\omega_k)$ 叠加会使界面上的函数增强，其它削弱。我们可引进一个规格化的叠加偏移反射率函数 $\beta_{E,Mm}(x,z)$ 为

$$\bar{\beta}^{n}_{E,Mm}(x,z)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\beta_{E,Mm}(x,z,\omega_j)}{|\beta_{E,Mm}(x,z,\omega_j)|} \tag{5.5.29}$$

和计算偏移视电阻率 $\rho_m(x,z)$ 为

$$\rho_m(x,z)=\left\{\frac{1+\bar{\beta}^{n}_{E,Ma}(x,z)\bar{\beta}_{E,Ma}(x,z)}{1-\bar{\beta}^{n}_{E,Mm}(x,z)\bar{\beta}_{E,Ma}(x,z)}\right\} \tag{5.5.30}$$

偏移视电阻率 $\rho_m(x,z)$ 在分界面上是第二层的电阻率，在其它处为背景值 ρ_1，因为 $\beta^{n}_{E,Mm}(x,z)$ 在界面上趋近于 1，其它处趋于零。因此，我们应用视反射率和偏移反射率两个函数可以获得地电界面和电阻率比率的同时成像。至于第一层电阻率 ρ_1 可用经典公式从电磁场求出。如在平面波激发下用高频段估计的导纳 $Y(\omega)$ 计算 ρ_1 为

$$\rho_1=1/2\omega\mu_0\mathrm{Re}^2Y(\omega)=1/2\omega\mu_0\mathrm{Im}^2Y(\omega) \tag{5.5.31}$$

用上述方法对一个矩形的高导电率的地质体进行了系列试验。图 5.5.2 是该项试验的

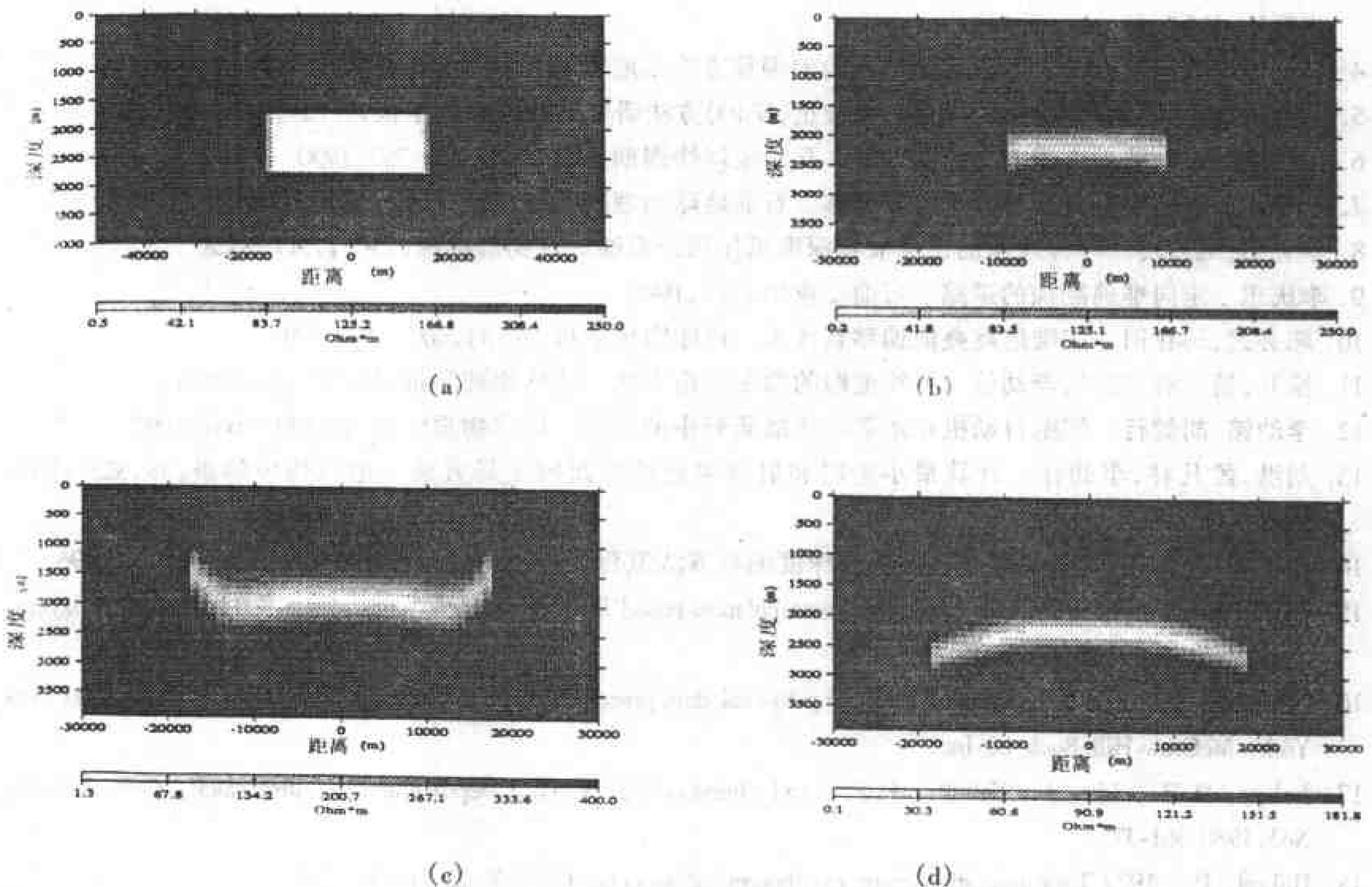


图 5.5.2 EM 偏移用于求导体位置和电阻率的试验研究

（根据 Zhdanov 等，1996）

(a) 电阻率模型；(b) 用正确背景电阻率进行偏移处理的结果；

(c) 背景电阻率从 250Ω·m 增大到 400Ω·m 的计算结果；(d) 背景电阻率从 250Ω·m 降至 180Ω·m 的计算结果

结果。图 5.5.2a 是电阻率 $\rho_i=0.5\Omega\cdot\mathrm{m}$ 的矩形体处于电阻率 $\rho_h=250\Omega\cdot\mathrm{m}$ 的基质中的模型。用这个模型理论观测的视电阻率数据进行 EM 偏移求高导电体的边界和电阻率。当正确地

给出背景电阻率时，可以同时求出导体的顶部边界的位置和电阻率，如图 5.5.2b 所示。如果将背景电阻率 ρ_n 从 250Ω·m 增大到 400Ω·m，则导体结构的两边向上翘，其中心的深度还是对的，求出的导体的电阻率 ρ_i 也是对的，如图 5.5.2c。这种情况类似于地震中的过偏移问题。如果将背景电阻率降低 180Ω·m，则两边的成像图向下弯曲，如图 5.5.2d。这对应地震中的偏移不足问题。所以，正确地估计背景电阻率对于偏移是重要的，如果误差在合理的限度内，就不会破坏成像的结果。这个背景电阻率的估计误差范围，一般取做 $0.2<|\rho_n/\rho_h|<5$，其中 ρ_n 为带有误差的背景电阻率值，ρ_h 为它的真值。

上述方法已开始用于实际的 EM 数据的处理，有明显效果。如在北美中央平原进行导体异常埋藏位置和电阻率的确定的计算，取得了良好的地质效果。

第 5 章　参考文献

1. 马在田．地震成像技术．石油工业出版社，1989
2. 马在田，孙建国．论常炮检距地震剖为叠前偏移方法．石油地球物理勘探，25(2)，1990
3. 马在田，曹景忠，纪少游．波动方程法地震偏移成像的理论与应用．陈嘉庚奖获奖科技成果文集，科学出版社，1994
4. 马在田．共炮检距二维弹性波地震剖为的偏移方法．地球物理学报，38(增刊Ⅰ)，1－10，1995
5. 马在田．P-SV 反射转换波的倾角时差校正(DMO)方法研究．地球物理学报，39(2)，244—250
6. 王振华．三维波动方程 P-R 分裂偏移．石油地球物理勘探，25(4)，375—397，1990
7. 王振华．方向导数法三维 P-R 分裂偏移．石油地球物理勘探，27(2)，174—181，1992
8. 李志明，刘春玲．一种理想的二维波场深度延拓法．石油地球物理勘探，25(5)，517—528
9. 李庆忠．走向准确勘探的道路．石油工业出版社，1993
10. 陈必远，马在田．三维地震叠前偏移新技术．地球物理学报，37(3)，400—407，1994
11. 徐升，杨长春，刘洪，李幼铭．射线追踪的微变网格方法．地球物理学报，38，97—102，1996
12. 李幼铭，胡健行．细胞自动机在地震波传播研究中的应用．地球物理学报，38，651—661，1995
13. 刘洪，孟凡林，李幼铭．计算最小走时和射线络径的界面网全局方法．地球物理学报，38，823—832，1995
14. 李长春，刘兴材，李幼铭等．地震叠前深度偏移方法流程及应用．地球物理学报，39，409—415，1996
15. Jin Shengwen and Ma Zaitian, Wavefield-extrapolation-based imaging for echo data of sea-bed sedimentary layers, C.J. of Acoustics 15(4), 1996.
16. Claerbout, J, F, 1976 Fundamentals of Geop hysical data processing with application to petroleum prospecting: New York, McGraw-Hill Book Co Inc.
17. Judson, D.R., Lin, J., Sehultz, P.S., and Sherwood, J.W.C., Depth migration after stack, G-S, Vol 45, No3, 1980 361-375
18. Hubral, P., 1977 Time migration-Some ray theoretical aspects, G-P, V.25, p738－745
19. Goupillaud, P.L., 1961, An approach to inverse filtering of near suface layer effects from seismic records; G-S v26, P754－760
20. Robinson, E.A., 1967 Multichannel time series analysis with digital computer programs: San Francisco, Holdeu-Day. Inc. 298P
21. Marchuk, G.I., Methods of numerical mathematies, Springer-Verlag, New York, 1975
22. Backus, G., and F.Gilbert, Numerical applicatious of a formulism for geophysical inverse problems, Geop, Journal of the Royal. Astronomical Society 13, 247－276

23. The resolving power of gross Earth data. the Geop. Journal of the Royal Astronomical society 16:169 – 205

24. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data, Philosophical Transactious of the Royal Society of London A266:123 – 192

25. Aki, Keiibi., and Richards, P.G., Quantitative Seismology: Theory and Methods. W.H. Freeman and Company, San Franasco 1980

26. Ware, J.A., and Aki, K., Continuous and discrete inverse scattering problems in a stratified elastic medium, Journal of the Acoustical Society of America 45:911 – 921

27. Tarantola, A., Inverse Problem Theory, Elsevier Science Publishers B.V., 1987

28. Claerbout, J.F., 1985, Imaging the Earth's interior, Blackwell.

29. Gel'fand, I.M., and Levitan, B.M., 1955, On the determination of a differential equation by its spectral function, Amer, Math, Socs Transl. 1, ser 2, 253 – 304.

30. Marchenko, V.A., 1955 Sturm-Liouville operators and their applications (in Russion) Naukova Dumka, kiev

31. Tikhonov, A.N., 1963, Resolution of illposed problems and the regularization method (in Russian), Daul Akad, Nauk SSSR, 151,501 – 504

32. Larner, K., Hatton, L., Gibson, B., and Hsu, I – C., Depth migration of imaged time sections, Geophysics Vol 46 pp734 – 750,1981

33. Loeweuthal, D., Lu, L., Poberson, R., and Sherwood, J.W.C., The wave equation applied to migration, Geophysical prospecting Vol, 24,1976

34. Zhiming Li, Wavefield extrapolation by the lineary transformed wave equation operator, Geophysics Vol, 51, 1986

35. Hale, D., 1991, 3D depth migration via McClellan transformations: Geophysics, Vol, 46 pp734 – 750

36. Gazdag, J., Wave equation migration with phase shift method, Geophysics, Vol 43 pp1324 – 1351, 1978

37. Tygel, M., schleicher, J., and Hubral, P., A unified approach to 3 – D seismic reflection imaging, Part II: Theory, Geophysics, Vol, 61 759 – 761

38. Soubaras, R., Explicit 3 – D migration using equiripple polynomial expansion and Laplacian synthesis, Geophysics, Vol 61, 1386 – 1397

39. Zhdanov, M.S, Underground imaging by frequency – domain electromagnetic migration, Geophysics, Vol, 61 666 – 680

40. Larner, K., Dip – moveout error in transversily isotropic media with linear velocity variation in depth Geophysics, Vol, 58(10) 1442 – 1453,1993

41. Larner, K., Migration error in transversely isotropic media with linear velocity variation in depth, Geophysics, 58 (10), 1454 – 1548. 1993

42. Sena, A.g., Kirchhoff migration and velocity analysis for converted and nonconverted waves in anisotropic media, Geophysics 58(2) 265 – 276, 1993

43. Beylkin, G., Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform, J. Math, Phys, 26 99 – 108,1985

44. Holberg, O., Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in Large – scale simulation of wave pheomena, Geophysical prospecting, 35(6) 629 – 655,1987

45. Lee, K.H.,, New approach to modeling the electromagnetic response of conductive media Vol, 54(9) 1180 – 1193,1989

46. Wu, R, S., Wide-angle elastic one-way propagation in heterogeneous media and an elastic wave complex – screen method, J. Geophys. Res, 99,751 – 766

第6章 波动方程反问题

在地球物理学的各个分支中,经常会遇到“反演”和“反问题”的术语。在其它学科领域,如海洋学,数学物理,电子医学,材料科学和自动控制等领域也都会遇到同样的术语。在数学中“反问题”一语常用于理论问题的分析,反演一语多用于计算问题中。在地球物理界“反演”一词用的更为广泛,几乎包括了所有的对观测数据进行分析解释,从而得出有关地球内部的认识。而地球物理反问题,一般是指以各种地球物理场的方程(位场,电磁场,波场)为基础,对观测数据进行数学求解,得到有关地球内部地质体的几何形态和物性参数的运算过程。其中求物性参数的计算与数理方程反问题中求方程系数的问题相对应。本章就是讨论以波动方程为基础用地震波观测数据求介质的地震参数问题。

6.1 地震反问题概述

地震反问题有三种不同尺度的应用领域,这就是固体地球地震学,勘探地震学和工程地震学。固体地球地震学研究整个地球,目的是对几万米到几百万米的地球内部结构进行研究。勘探地震学的研究目标是要将几公里范围内的几十米到几百米的地质结构及矿体内部的结构研究清楚。工程地震学是在几百米至几十米的范围内把几米长度的地质目标内部结构研究清楚。因此,在观测数据精度上就产生不同的要求,同时对反问题的求解精度也就有不同的要求。本章主要是对勘探地震学的反问题进行讨论。当然,所用的理论与方法对其它方面的地震学问题研究也会有参考价值,甚至能够直接应用。

6.1.1 波动方程反问题的提出

在地表用人工震源产生地震波,它向地下传播时,遇到非均匀地质体就会产生散射(反射)波。根据返回到地面的散射波去求地下结构及物性参数。我们用波动方程来描述波的传播过程,在地层横向均匀各向同性情况下,地震波可用一维波动方程描述:

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0 \tag{6.1.1a}$$

$$0<t<T, \qquad 0\leqslant z\leqslant Z$$

式中 $u(z,t)$为质点位移;

$\rho(z)$为随深度 z 变化的介质密度;

$k(x)$为弹性系数,对纵波它为 $\lambda+2\mu$,对横波为 μ;

$f(z,t)$ 为震源函数。

初始条件:

$$u|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{6.1.1b}$$

边界条件:地表为自由表面,因此有

$$k(0)\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=g(t) \qquad u(z,t)=0 \tag{6.1.1c}$$

附加条件:地表的散射波记录为附加条件,即

$$u(t,0)=f(t)$$

式中 $g(t)$为震源产生的应力,$f(t)$为 $z=0$ 的地震记录,当在很大的深度 Z_{max}上认为无散射波返回地面。ρ 和 k 可以是随深度变化的连续函数,也可以是分层的连续函数。此时 ρ 和 k 是逐段连续函数。在分界面上要求位移 u 和应力 $k(\partial u/\partial z)$对 z 是连续的。有此连续条件,当 ρ 和 k 为已知函数时(6.1.1)式可在定解区域内唯一地求出它的解。这是正问题。现在我们是解反问题,也就是要求 $\rho(z)$和 $k(z)$。此时的解不唯一。因此,一般地要将两个系数转换为一个其它的物性参数,如波阻抗或介质传播速度。现在进行如下的变换:

$$\tau=\int_0^z\sqrt{\frac{\rho(z)}{k(z)}}\mathrm{d}z=\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{v} \tag{6.1.2}$$

则(6.1.1a)式可写为

$$\sigma(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)=0 \tag{6.1.3}$$

式中 $\sigma(\tau)=(\rho k)^{1/2}$ 为波阻抗值。

(6.1.3)仍可用上面的初始条件、边界条件和附加条件求解波阻抗的反问题。

如果(6.1.1)中的弹性系数 k 不随深度 z 变化,则(6.1.1a)式可写为

$$\frac{\gamma}{v^2(z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{6.1.4}$$

式中 $v=(k/\rho)^{1/2}$ 为波的传播速度。

这时反问题求解的目标是速度 $v(z)$,就可以唯一地求出。

对多维反问题,下面用声波方程举例说明,下式

$$\left[\frac{1}{k(r)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho(r)}-\mathrm{grad}\right)\right]u(r,t)=S(r,t)$$

表示波的传播,

式中 $u(r,t)$表示压力波场;

$S(r,t)$表示震源项;

$k(r)$表示体积模量;

$\rho(r)$为密度。

可以把波动方程抽象为

$$u=f[k(r),\quad \rho(r),S(r,t)]$$

令

$$m=\begin{bmatrix}k(r)\\ \rho(r)\\ S(r,t)\end{bmatrix}$$

则有

$$u=f(m)$$

反问题就是根据地面的散射波场 u,反求介质参数 $k(r)\rho(r)$和震源函数 $S(r,t)$,即

$$m=g(u)$$

6.1.2 反问题的特点

波动传播可以是声波,弹性波或电磁波,由它们各自的波动方程控制。地球物理反问

题,也是根据散射波场求介质的物性参数。只是解问题的方法是相当困难的。从原则上讲解反问题是用微分方程和积分方程,包括傅立叶理论和渐近展开法等,此外也常采用数据拟合法解线性和非线性反问题。前者称为反散射方法,后者称为迭代拟合反演法。

我们在第一章里已经论述了,地球物理反问题中多数数学定解问题是病态的,这就是反问题求解的困难所在。解反问题时,特别在解逆散射方法时常常最终会导出第一类 Fredholm 积分方程

$$\int K(x,s)z(s) = u(x)$$

式中　$z(s)$是待求函数,它在(a,b)区间上连续;

　　$u(x)$为已知函数,它在(c,d)区间上连续;

　　$K(x,s)$积分核在$(c,d)\times(a,b)$上连续。

此积分方程可简写成算子方程形式

$$Az = u$$

式中　A 称算子。

对于适定的数学问题求解是容易的,有

$$z = A^{-1}u$$

对于不适定问题表现为 A^{-1}不连续时,应当构造稳定求解方法,这就是正则化方法。正则化方法的基本思想,是构造一个连续的正则算子 $R(Az,\alpha)$,去逼近不连续算子 A^{-1},使得

$$\lim_{\alpha\to 0}R(A,\alpha) = z$$

式中　α　为正则参数;

　　$R(\cdot,\alpha)$　为(6,1,10)式的正则算子。

反问题的另一个特点是非线性。地球物理反问题的非线性性质与介质的不均匀性相关联,即与方程的系数变化有关。当介质物性均匀或方程系数为常数时,反问题是线性问题。如果介质物性渐变且均匀,或方程系数在空间上微扰动,反问题是拟线性的。若介质的性质在空间上变化很大或方程系数在空间上剧烈变化,则反问题是(高度)非线性的。实际情况下,介质物性的渐变和剧变的情况均存在,而且常常是后者情况较多,故非线性问题是反演的重要方面。

一般非线性反问题的求解思路,无非是将非线性问题线形化,然后求出某种积分解,或者逐步线性化,用迭代方法求解。但这种方法对高度非线性变化介质不太适用。对于高度非线性反问题,目前最常用的方法是正、反演数据拟合法。法国地球物理学家 A. Tarantola 提出的基于广义最小平方准则的非线性优化反演算法是目前比较流行的方法。这种方法是给出初始模型,在泛函空间中求正问题的解与观测数据之间的拟合差。用非线性最优算法,如最速下降法,模拟退火法,生物遗传算法等求解。通过不断的修改模型参数,逐步迭代,使拟合差为最小。该方法的不足在于仍有多解性问题存在。真解在那里,没有客观标准判定。同时计算量很大,难以承受。

6.2 一维声波方程波阻抗反演

一维声波方程波阻抗反演方法有特征法和拟合反演法,反散射法,拟合迭代法等。下面

将已用于实际的比较好的特征法和拟合迭代法进行阐述。

6.2.1 特征法

从(6.1.3)式可得(Santosa and Schwetlick, 1982)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\sigma(\tau)\frac{\partial u}{\partial\tau}\right] \tag{6.2.1}$$

由于我们在 $z=0$ 处发生爆炸,因此,(6,1,1c)式变为

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial\tau}=\frac{1}{\sigma(0)}g(t) \tag{6.2.2}$$

静止的初始条件为

$$u(t\leqslant 0,x)=0$$

和附加条件,即在 $z=0$ 处的散射响应函数为

$$u(t,0)=f(t) \tag{6.2.4}$$

我们可用数值方法的特征线方法解此反问题。取 $g(t)$为激发的输入子波,代替常用的脉冲 $\delta(t)$。现在令

$$s_1(t,0)=f'(t)$$

$$s_2(t,0)=g(t)$$

则(6,2,1a)式表示为

$$\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\end{bmatrix}_t=\begin{bmatrix} 0 & \sigma(\tau)^{-1}\\ \sigma(\tau) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\end{bmatrix}_\tau \tag{6.2.7}$$

假定 $\sigma(0)$为已知。将(6,2,7)式的矩阵对角化,引入对角化用的矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$\boldsymbol{TA}\cdot\boldsymbol{T}_{-1}=-\boldsymbol{\Lambda} \tag{6.2.8}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \sigma(\tau)^{-1}\\ \sigma(\tau) & 0\end{bmatrix} \tag{6.2.9}$$

和

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6.2.10}$$

将(6,2,7)式左端乘 T,得

$$\boldsymbol{TS}_t=\boldsymbol{TAT}^{-1}=\boldsymbol{TS}_\tau \tag{6.2.11}$$

式中

$$\boldsymbol{S}_t=\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\end{bmatrix}_t \qquad \boldsymbol{S}_\tau=\begin{bmatrix} s_1\\ s_2\end{bmatrix}_\tau$$

由(6,2,8)式,得

$$\boldsymbol{TS}_t=-\boldsymbol{\Lambda TS}_\tau \tag{6.2.12}$$

由此求得特征方向为

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\lambda_j \qquad j=1,2 \tag{6.2.13}$$

现在我们求对 τ 的特征导数 $D/D\tau$

$$\frac{DS}{D\tau}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial t}\frac{d\tau}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\lambda_j\frac{\partial S}{\partial \tau}\quad j=1.2 \tag{6.2.14}$$

将(6,2,12)式代入(6,2,14)式,得

$$\sigma(\tau)\frac{Ds_1}{D\tau}=\frac{Ds_2}{D\tau}\qquad 对\frac{dt}{d\tau}=\lambda_1=1 \tag{6.2.15}$$

和

$$-\sigma(\tau)\frac{Ds_1}{D\tau}=\frac{Ds_2}{D\tau}\qquad 对\frac{dt}{d\tau}=\lambda_2=-1 \tag{6.2.16}$$

很容易地在 $\tau-t$ 平面上解此反问题(图 6.1.1)。我们根据沿 $t=\tau$ 时,$s=0$ 的边界条件,其次,有 $g(t=0)=0$,和

$$S=0,当\ t\leqslant\tau\ 时 \tag{6.2.17}$$

因此,在 $t>\tau>0$ 时,满足(6,2,14)式和(6,2,15)方程。

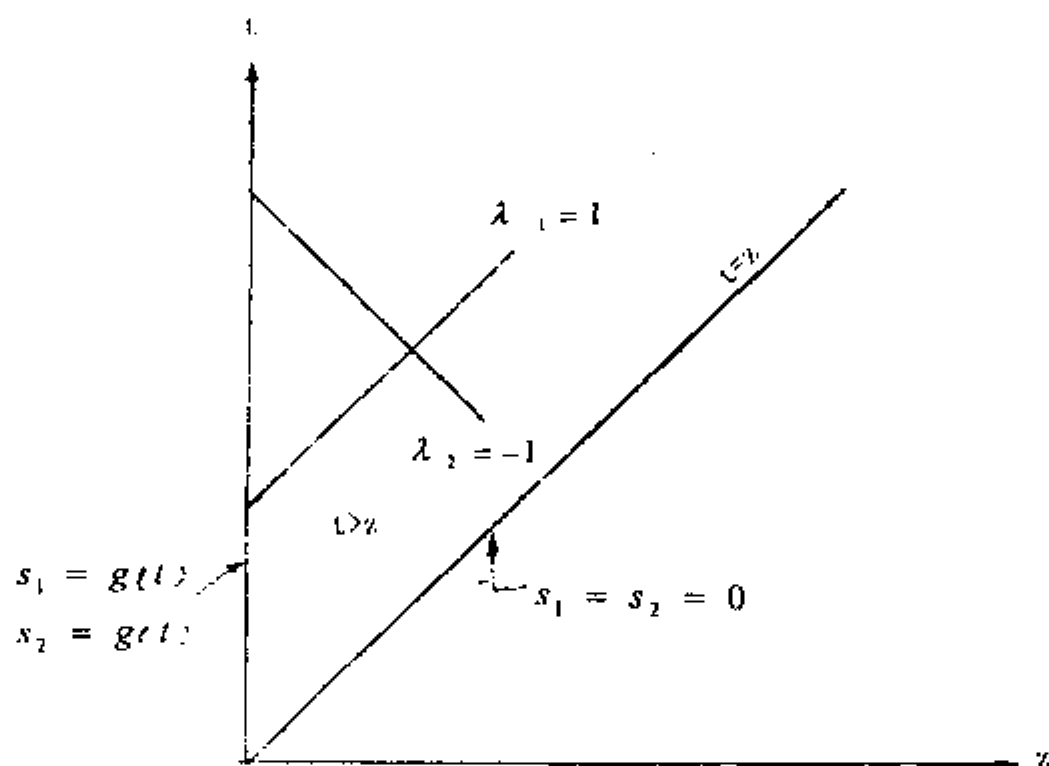


图 6.1.1 边值问题的图解

1. 有限差分解

令 $g(t)$和 $f(t)$对 $2t_{max}\geqslant t\geqslant0$ 为已知,则边值问题的定义域为 $t-\tau\geqslant0$ 和 $t+\tau\leqslant2t_{max}$ 的区域 S(图 6.1.2)。S 域的点可表示为

$$(t,\tau)=[2mh+(n-m)h,(n-m)h]=[(n+m)h,(n-m)h] \tag{6.2.18}$$

式中 $0\leqslant n\leqslant M$ 和 $0\leqslant m\leqslant M$, $M=t_{max}/h$。

因此,$s(t,\tau)$表示在节点上。我们将 $s(t,\tau)$表示为 $s(m,n)$,二者之间由(6,2,18)式关系确定。$\sigma(\tau)$用 $\sigma[(n-1)h]$离散化。我们用 In 表示位于经过节点$(n,0)$ 的垂直线上的点集(图 6.1.2)$\tau=0$ 上的离散值为

$$s_1(m,n)=f'(2mh)\qquad M\geqslant m\geqslant0$$

$$s_2(m,n)=g(2mn)\qquad M\geqslant m\geqslant0$$

它们表示 I_0 垂直线上的信息。我们有边界条件

$$s_1(m=0,n)=s_2(m=0,n)=0\qquad M\geqslant n\geqslant0 \tag{6.2.19}$$

现在我们写出(6,2,15)式和(6,2,16)式的一阶差分近似式

$$\sigma[(n-m)h][s_1(m,n)-s_1(m,n-1)]$$
$$=s_2(m,n)-s_2(m,n-1)$$
$$-\sigma[(n-m)h][s_1(m,n)-s_1(m+1,n)]$$
$$=s_2(m,n)-s_2(m+1,n)$$

从上列方程组可求出 $s(m,n)$ 为

$$s(m,n)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1/\sigma[(n-m)h]\\ \sigma[(n-m)h] & 1\end{bmatrix}$$
$$s(m+1,n)=\frac{1}{2}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 1/\sigma(n-m)\\ -\sigma[(n-m)h] & 1\end{bmatrix}s(m+1,n)$$
$$(6.2.20)$$

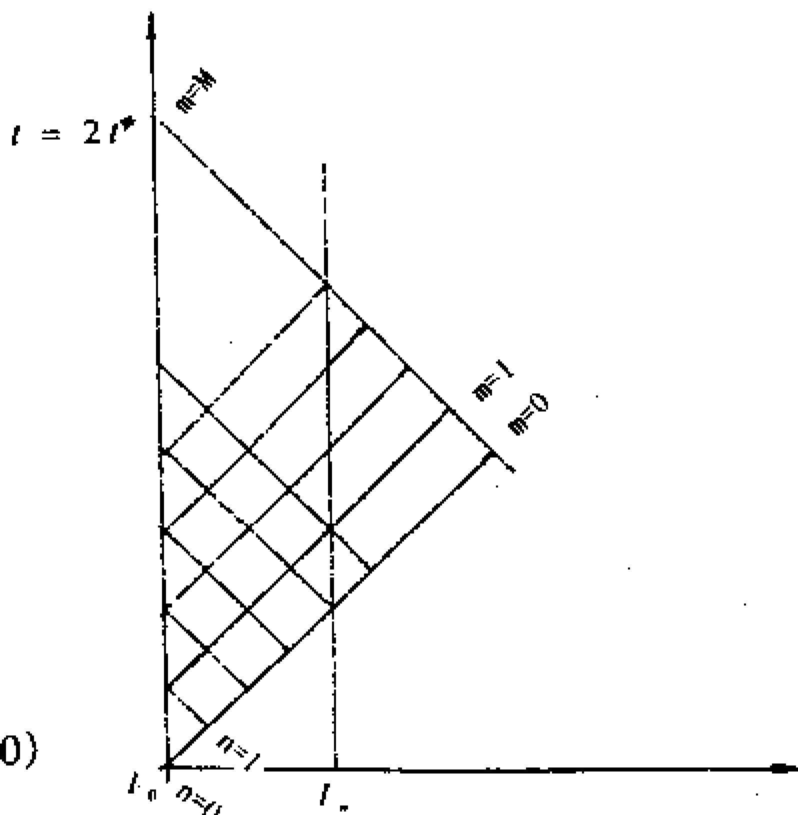


图 6.1.2　差分网格

将上式用于 I_0 边界,得

$$\sigma(n,h)=-s_2(1,n)/s_1(1,n) \tag{6.2.21}$$

现在的目的是根据 I_0 垂直线上的数据,用(6,2,20)式和(6,2,21)式进行迭代计算整个 S 区域上的 $\sigma(\tau)$ 值。这首先要用(6,2,21)式计算 $\sigma(1h)$。其次用(6,2,18)式。我们将数放到 I_0 线上,用 $\sigma(1h)$ 数据求出 I_1 上的数据。然后用(6,2,21)式计算 $\sigma(2h)$。用 I_1 上的数据和计算出的 $\sigma(2h)$。我们可求出 I_2 的 S 值和 $\sigma(3h)$。这个过程一直在重复,一直进行到 I_{M-1} 直线,并计算出 $\sigma(Mh)$ 为止。用此简单的迭代过程,我们从震源函数 $g(t)$ 和反射数据 $f(t)$ 可重建波阻抗剖面 $\sigma(Mh)$。$M\geqslant n>1$, 这是一阶精度的差分近似式。我们同样可以用中心差分求出二阶精度和四阶精度的迭代计算式。

为了获得二阶近似式的解,将特征导数用中心差分逼近,再将这个二阶精度的差分式代入(6,2,15)式和(6,2,16)式,然后解出 $s(m,n)$ 为

$$S(m,n)=(1/2)\begin{bmatrix}1 & 1/\sigma[(n-m-1)h]\\ \sigma[(n-m-1)h] & 1\end{bmatrix}s(m+2,n)$$
$$+(1/2)\begin{bmatrix}1 & -1/\sigma[(n-m-1)h]\\ -\sigma[(n-m-1)h] & 1\end{bmatrix}s(m,n-2) \tag{6.2.22}$$

应用 $M=0$ 时,$s_1=s_2=0$ 的边界条件,我们可求出

$$\sigma(nh)=-s_2(2,n+1)/s_1(2,n+1) \tag{6.2.23}$$

首先我们将 I_0 上的数据用于(6,2,23)以求得 $\sigma(1h)$。然后用 $\sigma(1h)$ 和 I_0 上的 s 求出 I_2 上的 s 值。将上面的结果用于(6,2,22)式和(6,2,23)式可求出 $\sigma(3h)$ 和在 I_4 上的 s 值。重复此过程 $M/2$ 次,我们可在 $(M/2)-1\geqslant n\geqslant 0$ 的情况下重建 $\sigma[(2m+1)l]$。

最后,我们还可以用四阶差分对特征导数逼近,这时解出的 $s(m,n)$ 为

$$s(m,n)=(1/2)\begin{bmatrix}1 & 1/\sigma[(n-m-2)h]\\ \sigma[(n-m-2)h] & 1\end{bmatrix}[s(m+4,n)$$

$$
\begin{aligned}
&-8s(m+3,n)+8s(m-1,n)] \\
&+(1/2)\begin{bmatrix} 1 & -1/\sigma[(n-m-2)h] \\ -\sigma[(n-m-2)h] & 1 \end{bmatrix}[s(m,n-4) \\
&-8s(m,n-3)+8s(m,n-1)]
\end{aligned}
\tag{6.2.24}
$$

和

$$
\sigma(nh) = -\frac{s_2(4,n+2)-8s_2(3,n+2)+8s_2(1,n+2)}{s_1(4,n+2)-8s_1(3,n+2)+8s_1(1,n+2)} \tag{6.2.25}
$$

开始迭代时，我们要知道 I_0, I_1, I_2 和 I_3 上的 s，而只有 I_0 上的 s 是已知的。其它的 s 可用上面的近似式计算出来。我们把这些信息用于(6,2,24)式和(6,2,25)式可求得 $\sigma(2h)$ 和 I_4 上的 s。然后根据 I_1 到 I_4 上的数据，我们求出 $\sigma(3h)$ 和 I_5 上的 s。这样重复一直到求出 $\sigma(nh), M-2\geqslant n>1$。

2. 数值计算例子

用特征反演方法于合成反射数据。合成记录用的震源函数 $g(t)$ 为一最小相位子波，与一多层波阻抗模型相褶积而成。然后用上述反演方法求此波阻抗模型。图 6.2.1a 为波阻抗模型。图 6.2.1b 为给出的震源函数 $g(t)$。图 6.2.1c 为合成地震记录。图 6.2.1d 为用特征法于合成地震记录求出的波阻抗曲线。此波阻抗曲线与原始波阻抗模型是一致的。从这个结果看，反演试验是成功的。

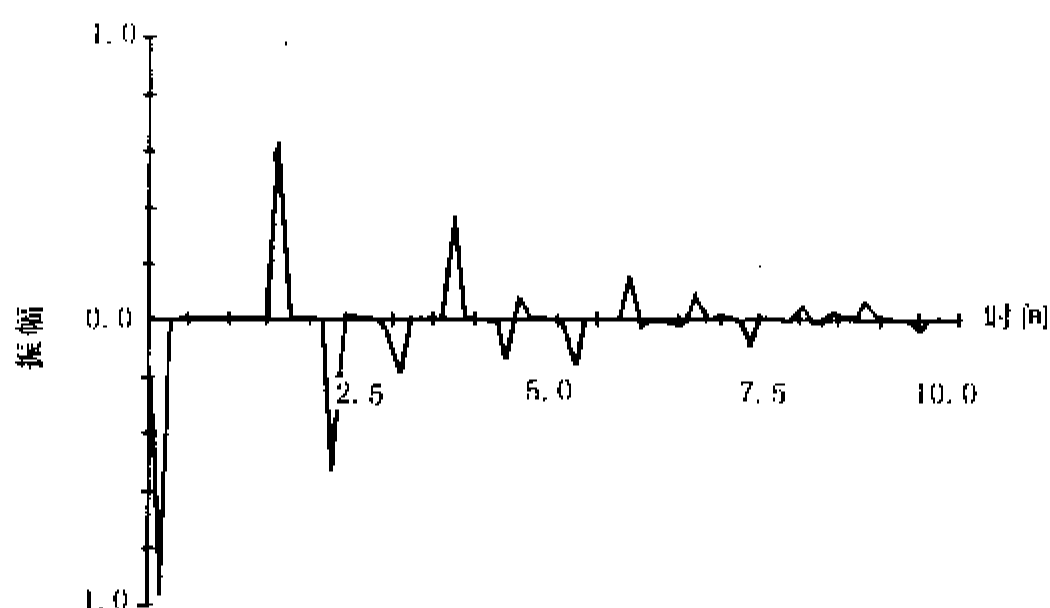


图 6.2.1(a) 设计的波阻抗模型

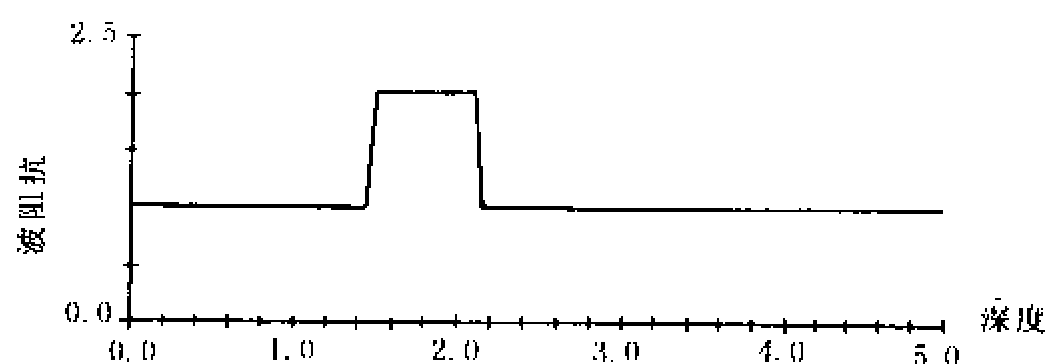


图 6.2.1(b) 震源函数 $g(t)$

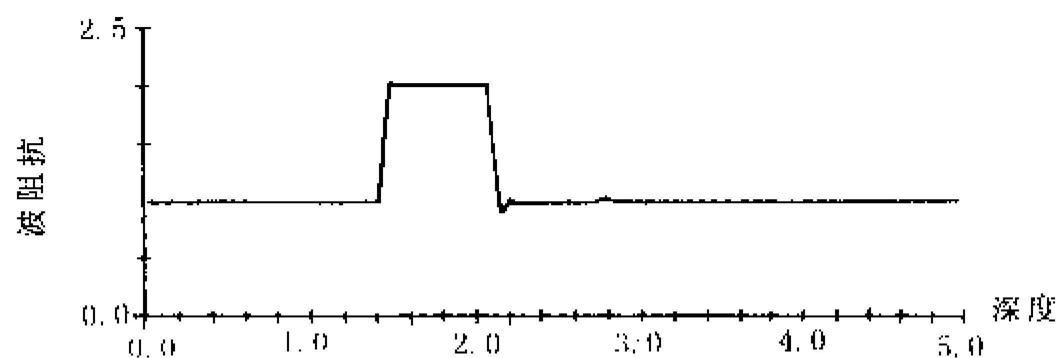


图 6.2.1(c) 合成地震记录

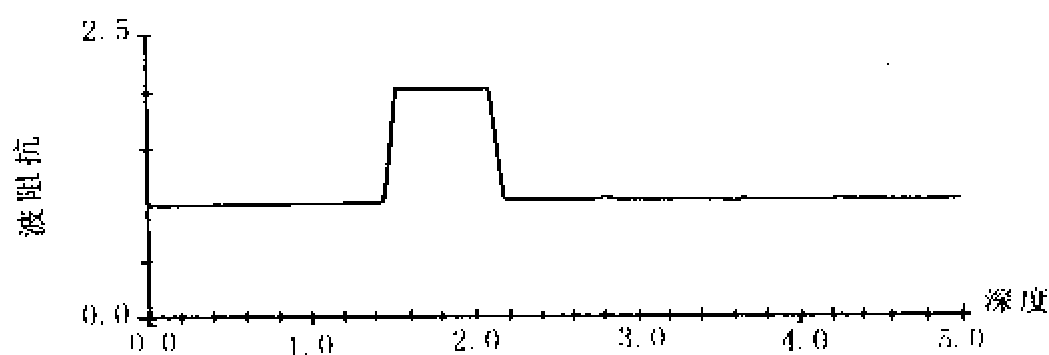


图 6.2.1(d) 用特征法求出的波阻抗曲线

本方法的优点是计算效率高,但抗噪能力较差。如果在数据中有噪声,则计算结果会与实际的波阻抗有差异。如果信噪比较低,则计算结果可能与实际阻抗相差较远,甚至造成计算发散,计算的稳定性欠佳。为了提高计算的收敛性,在对实际地震数据处理时,常常要进行各种约束,其中主要用测井资料进行约束,以提高反演波阻抗的效果。

6.2.2 拟合迭代反演

特征方法是逐层递推的方法,一次可以完成反演计算的工作。这类方法计算量小,占存储空间少。但是计算误差传播快,抗噪能力差,不宜用于带有误差的实际地震资料。比较实用的方法是拟合反演法。这种数据反演方法,一般是要对整个数据序列进行拟合迭代,反演计算求出其波阻抗曲线。这种方法的优点是计算精度较高,有一定的抗噪能力,但计算量较大,占存储空间较多。由于计算量较大,整体反演方法一直未能得到使用。刘家琦等人于(1994)采用了分段折叠的技术,才使此方法得到实用。

1. *方法原理*

我们从(6,2,1)式出发,通过波动方程正、反演数据的拟合,求出最佳波阻抗函数。现在的定解问题归结为:给出震源函数 $g(t)$和 $\sigma(\tau)$,用(6,2,1)、(6,2,2)和(6,2,3)式解出正问题的地面波场值 $u(\sigma,0,t)$,然后取此波场值与实际地震记录的方差做为目标泛函 $J(\sigma)$:

$$J(\sigma)=\| u(\sigma;0,t)-f(t)\|^2 \tag{6.2.26}$$

然后求出泛函的最小,即

$$J(\sigma^*)=\min J(\sigma) \qquad \sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2 \tag{6.2.27}$$

这样求出的 $\sigma^*(\tau)$即为我们需要的波阻抗函数。 采用牛顿 - 正则化法进行计算求解。令

$$w(\sigma)=u(\sigma;0,t)-f(t) \tag{6.2.28}$$

给出初始值 σ_0,在 σ_0 处对上式进行线性化展开

$$w(\sigma) = w(\sigma_0) + (\partial w/\partial\sigma)\Delta\sigma = 0 \tag{6.2.29}$$

式中 $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$,令其用 y 表示。同时令

$$\begin{aligned} A &= (\partial w/\partial\sigma)|_{\sigma=\sigma_0} \\ B &= -w(\sigma_0) \end{aligned} \tag{6.2.30}$$

这样,(6,1,38)式可表示为代数方程组

$$Ay = B \tag{6.2.31}$$

式中 $B = -w(\sigma_0)$ 为已知初始值数列;

$\boldsymbol{A}$ 为矩阵。

由此求出 $\Delta\sigma$ 序列,得到波阻抗函数 $\sigma(\tau)$。

但是,由于反问题的不适定性,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是严重病态的。因此要进行正则化处理。令目标函数 $S(y)$为

$$s(y) = \| \boldsymbol{A}y - \boldsymbol{B} \|^2 + \alpha \| y - y_0 \|^2 + \alpha_1 \| L_1 y \|^2 + \alpha_2 \| L_2 y \|^2 \tag{6.2.32}$$

式中 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ 为正则化参数;

$\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 为一阶和二阶求导算子。

通过使

$$\partial s/\partial y = 0$$

求得解 y 函数的线代数方程为

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{I} + \alpha_1\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_1 + \alpha_2\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_2)y = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}B + \alpha y_0 \tag{6.2.33}$$

式中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 A 的转置矩阵;

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵;

$\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}$ 为 L_1 的转置矩阵;

$\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}$ 为 L_2 的转置矩阵;

y_0 为 y 的初始值;

$\boldsymbol{A}$ 与 B 同前。

用(6,2,33)式求出 y,由 $\sigma = \sigma_0 + y$ 求出阻抗值。再以 σ 作为σ_0 进行迭代,构造一个迭代循环。这样不断迭代,一直到相邻两次迭代的结果差值小于予先给定的精度为止。

2. 折叠反演计算方案

由于计算整体反演过程要求工作站甚大。故提出(刘家琦,1994)逐段折迭计算方案。这个方案在计算量,存储空间方面都比整体迭代计算做法要小得多。在计算稳定性和误差积累方面比特征法有较大的改善。

这个计算方法是将一个数据序列,即反射波地震道分为 k 段,每段的长度为 $n_k(k=1,2,3,\cdots)$下一段和上一段要重复一段,即折叠一段,这个折叠长度表示为 L_k。
首先在第一段 L_1 上进行反演求解,得 $\sigma_1(\tau)$。然后,去掉折叠部份长度 L_1,在 $n_1 - L_1$ 的区域上进行波场向下延拓,解一个双曲方程的正问题,得到 $\tau = T_{n_1 - L_1}$处的 u 和 $\partial u/\partial\tau$ 值做为下一段的反演条件,重复这一过程,直至全长度结束为止。图 6-2-2a 是地震记录的折叠分段示意图。图 6.2.2b 是折叠反演模型。

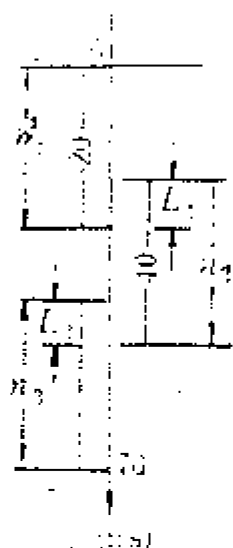


图 6.2.2(a) 地震记录折叠分段图

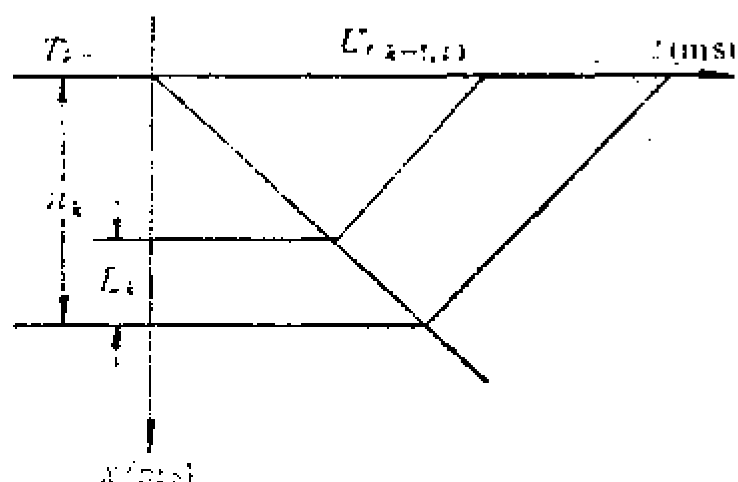


图 6.2.2(b) 折叠反演模型

根据 T_{k-1}点的数据，计算出 T_k 点的 u 和 $\partial u/\partial \tau$ 的值时用下列方程及条件

$$\sigma(\tau)[\partial u/\partial t^2]-(\partial/\partial x)\{\sigma(\tau)[\partial u/\partial x]\}=0$$

$$u(\tau,\ )|_{\tau}=T_{k-1}=f(t)$$

$$\sigma(\tau)[0u(\tau,t)/0\tau]|\tau=T_{k-1}=g(t)$$

解 Cauchy 问题。求出的 T_k 点的 u 和 $\partial u/\partial \tau$ 值做为下一段反演的(初始)条件。对折叠部分的两次反演结果，应该进行对比分析验证，以保证逐步计算的正确进行。

3. 计算实例

在实用中，首先遇到的是震源子波的选取。一般应当在实际记录上选取，但这是很困难的。常常采用 Ricker 子波或其合成结果。对反射数据的要求，应当是去噪后有振幅和波形保真的记录。因此选加工不过份的原始记录为好。计算中由于多种原因，主要是噪声等会使稳定性不佳，因此正则化参数不应固定不变的。可以根据情况有小的摄动。

图 6.2.3 是测井波阻抗与用合成地震记录反演出来的波阻抗的对比，及反射系数的对比，效果良好。

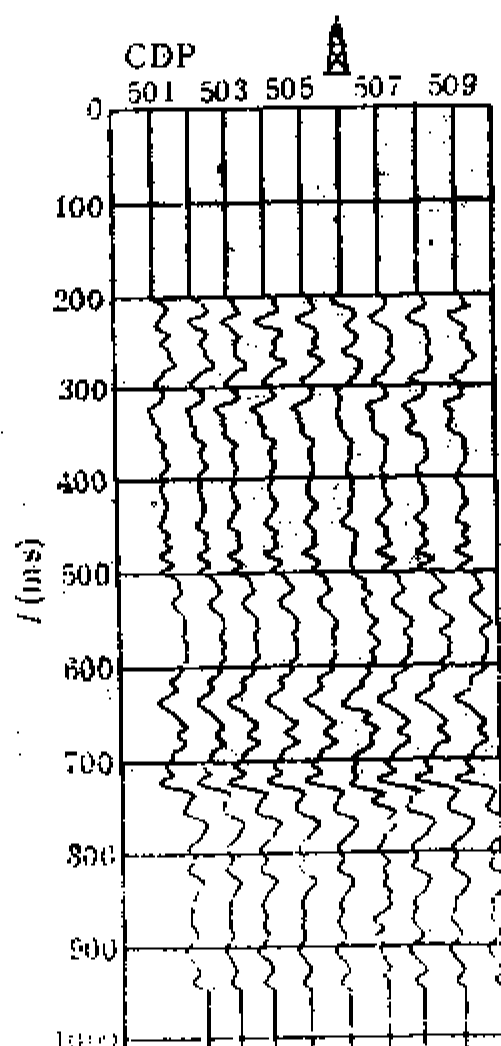


图 6.2.3 测井波阻抗和反射系数与用合成地震记录求得的波阻抗和反射系数的比较

由于记录中无低频，所以不可能求出绝对波阻抗，因此是相对的，但各道的干扰背景不同，频带也有变化，震源子波也不同，因此实际计算出的波阻抗曲线是有各种各样的“漂移”现象。为了便于横向对比，要对波阻抗曲线进行对称中心偏移至一条直线的处理。这样处理后波阻抗称为相对波阻抗剖面。实际例子如图 6.2.4 所示

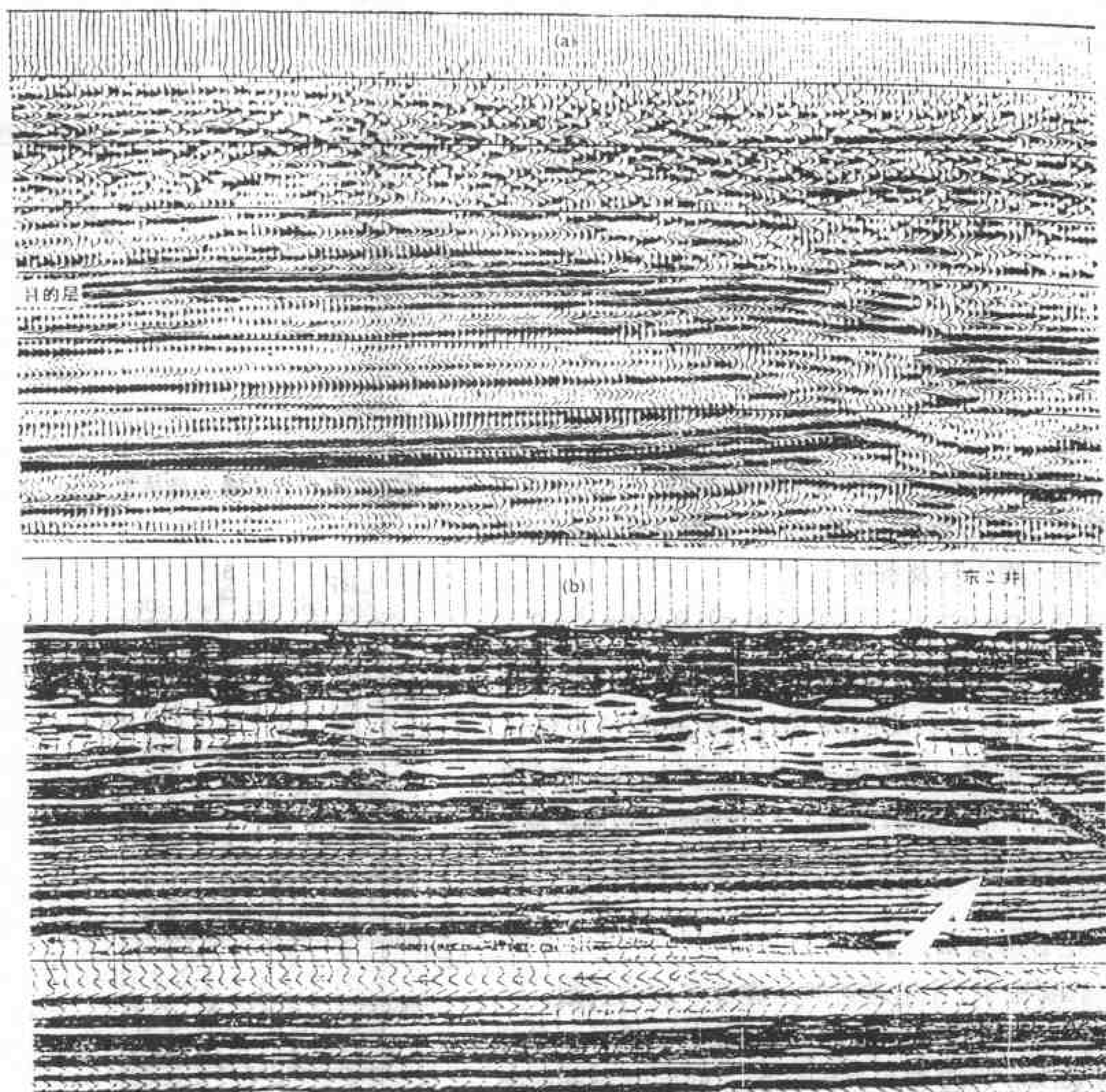


图 6.2.4　实际的相对波阻抗剖面

6.3 层状介质弹性参数反演

关于介质地震参数反演问题确实讨论很多了。但是这一问题从实用角度来看，并未解决问题。其中的困难在于地震反演的解不唯一或解的不稳定性以及计算量巨大等，特别是高维的参数反演问题。因此，许多的基础研究工作又从高维回到一维和一维半空间的问题中。特别是层状介质的多参数反演具有实用的背景。成为地球物理学家广泛关注的研究领域之一。利用多分量叠前地震数据反演层状介质的多个弹性参数，具有理论的和实际的意义。在这一节里，我们主要讨论纵波震源、两分量接收反射波的弹性参数反演问题（张关泉，1993，1995，宋海斌等，1995，1996A，1996B）。

6.3.1 层状介质弹性参数反演基本原理

1. 弹性波方程组及其标准型

弹性波的基本方程组由运动方程和应力-应变关系构成。用 v 表示位移速度，ρ 为密度，σ 表示应力张量矩阵。根据牛顿第二定律得出运动方程为

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{6.3.1a}$$

各向同性弹性介质的应力-应变关系有

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{6.3.1b}$$

式中

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

式中　λ 和 μ 为拉梅系数。

我们讨论二维平面问题，所以自变量取 $x_1 = x, x_3 = z$，弹性波场矢量为 $V_0(u, w, \sigma_{xx}, \sigma_{xz}\sigma_{zz})^{\mathrm{T}}$，则(6－65)式可写为

$$R\frac{\partial V_0(x,z,t)}{\partial t} = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial z}\right)V_0(x,z,t) \tag{6.3.2}$$

式中 $R = \mathrm{diag}(\rho, \rho, 1, 1, 1)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于我们是在平面波的意义下进行计算的，因此我们要将炮记录进行倾斜叠加，有

$$V_c(t_0, p, z) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0(t = t_0 + px, x, z)\mathrm{d}x \tag{6.3.3}$$

式中 t_0 为截距时间，p 为射线参数。

$Vc(t_0, p, z)$满足方程组

$$(R + pA_1)\frac{\partial V_c}{\partial t} = A_2\frac{\partial V_c}{\partial z} \tag{6.3.4}$$

这个方程组经特征化处理可化为标准型(张关泉，1992)。引进走时变量

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}\xi}{C_{\mathrm{P}}(\xi)} \tag{6.3.5}$$

和波场新表示：

$$U=(u_P,D_P,u_S,D_S)^T$$
$$=E_cA_c(u,w,\sigma_{zz},\sigma_{zx}) \tag{6.3.6}$$

则 U 在(t_0,τ)坐标内满足波动方程的标准型为

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\phi\frac{\partial U}{\partial \tau}=-\phi Bu \tag{6.3.7}$$

上两式中

$$E_c=\text{diag}\left(\frac{\rho(0)C_P(0)}{\rho(\tau)C_P(\tau)}\cdot\frac{\rho(0)C_P(0)}{\rho(\tau)C_P(\tau)}\cdot\frac{\rho(0)C_S(0)}{\rho(\tau)C_S(\tau)}\cdot\frac{\rho(0)C_S(0)}{\rho(\tau)C_S(\tau)}\right)$$

$$A_c=\begin{bmatrix}-2\mu p & C_P(\rho-2\mu p^2) & 1 & -pC_P\\ -2\mu p & -C_P(\rho-2\mu p^2) & 1 & pC_P\\ C_S(\rho-2\mu p^2) & 2\mu p & pC_S & 1\\ -C_S(\rho-2\mu p^2) & 2\mu p & -pC_S & 1\end{bmatrix}$$

$$\phi=\text{diag}(1,-1,C_S/C_P,-C_S/C_P)$$

$$C_S=(\mu/(\rho-\mu p^2))^{1/2}$$

$$C_P=\{(\lambda+2\mu)/[\rho-(\lambda+2\mu)p^2]\}^{1/2}$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & -a & -r_0b & r_0c\\ -a & 0 & -r_0c & r_0b\\ b/r_0 & -c/r_0 & 0 & d\\ c/r_0 & -b/r_0 & d & 0\end{bmatrix}$$

式中 $r_0=\sqrt{C_P(0)/C_S(0)}$；

$a=\frac{1}{2}\frac{\partial l_n(\rho C_p)}{\partial\tau}-\frac{2p^2}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\tau}$；

$b=\sqrt{\frac{C_P}{C_S}}\left[\frac{1}{\rho C_P}\frac{\partial\mu}{\partial\tau}-\frac{C_S}{2\rho}\frac{\partial(\rho-2\mu p^2)}{\partial\tau}\right]p$；

$c=\sqrt{\frac{\varphi}{C_S}}\left[\frac{1}{\rho C_P}\frac{\partial\mu}{\partial\tau}+\frac{C_S}{2\rho}\frac{\partial(\rho-2\mu P^2)}{\partial t}\right]P$；

$d=-\frac{1}{2}\frac{\partial l_n(\rho C_s)}{\partial\tau}+\frac{2p^2}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\tau}$；

U_P 为上行纵波；

D_P 为下行纵波；

U_S 为上行横波；

D_S 为下行横波。

(6.3.7)式称为平面波波动方程组的标准型或特征型，它描述了$(t-\tau)$域波场的传播和耦合。可用此方程组在连续情形下将波场沿 τ 方向，即深度方向延拓。因此也称该方程组为波场延拓方程。

2. 初、边值条件

为了能够进行波场延拓及参数反演计算需要已知一定的初、边值条件。(6.3.7)式的初值为

$$U(t,\tau)=0 \qquad \forall t\leqslant 0, \quad \tau\geqslant 0 \tag{6.3.8}$$

此外在 $\tau=0$ 处,边界条件为 $\sigma_{z\tau}=0$ 和 $\sigma_{zz}=0$,因此根据(6.3.6)式得自由边界条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\mu}{\rho C_S}(U_S-D_S)+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2\mu P^2}{\rho}\right)(U_P+D_P)=0\\ \dfrac{\mu}{\rho C_P}(U_P-D_P)+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2\mu p^2}{\rho}\right)(U_S+D_S)=0\end{cases} \tag{6.3.9}$$

如在 $t=0,\tau=0$ 处施加一纵波 δ 脉冲,则 δ 奇性沿特征线传播,下行纵波特征线为 $t-\tau=0$,上行纵波沿 $t+\tau=0$ 传播。在 $t=\tau$ 处满足特征线边界条件:

$$\begin{cases}U_P(\tau,t)=-\mathrm{d}pb_{12}/2\\ U_S(\tau,\tau)=-\mathrm{d}pb_{32}C_S/(C_S+C_P)\\ D_S(\tau,\tau)=\mathrm{d}pb_{42}C_S/(C_S-C_P)\end{cases} \tag{6.3.10}$$

式中 b_{ij} 为矩阵 B 的第 i 行第 j 列元素;

d_P 为激发的下行纵波强度。

如果考虑水平分量和垂直分量同时接收的情况,即认为 $u(t,x,z=0)$ 和 $w(t,x,z=0)$ 为已知,由此条件和(6-59)式可得地面接收的辅助条件

$$\begin{cases}\left[\dfrac{1}{2\rho C_S}(U_S-D_S)-\dfrac{p}{2\rho}(U_P+D_P)\right]\Bigg|_{\tau=0}=h_u(t)\\ \left[\dfrac{1}{2\rho C_P}(U_P-D_P)+\dfrac{p}{2\rho}(U_S+D_S)\right]\Bigg|_{\tau=0}=h_w(t)\end{cases} \tag{6.3.11}$$

式中
$$\begin{cases}h_u(t)=\displaystyle\int u(t+px,\ x,\ z=0)\mathrm{d}x;\\ h_w(t)=\displaystyle\int w(t+px,\ x,\ z=0)\mathrm{d}x。\end{cases} \tag{6.3.12}$$

$h_u(t)$ 和 $h_w(t)$ 是已知的。

如果 v_S,v_P 和 ρ 均为未知,方程组和初、边值条件加上辅助条件可构成平面波反演问题。因此,层状介质弹性参数的反演问题,通过 $\tau-p$ 变换即变为平面波反演问题。

3. 反问题讨论

如已知地面($\tau=0$)处的弹性参数和上行波和下行波场,利用特征线边界条件,可反演得到下一个步长处的多个弹性参数,然后可利用波场延拓方程得到下一个步长的上、下行波场。参数反演与波场延拓如此交替进行,即可实现层剥离的反演方法。我们这里只介绍了纵波激发,P-P 波和 P-SV 波的两分量接收时的反问题。也可以处理纵波和横波激发、P-P、P-SV、SV-P 和 SV-SV 四分量接收的反问题。还可以进行纵波和横波同时激发,两分量同时接收的反问题。在所有的反问题中都能处理多次波和纵、横波之间的转换。

6.3.2 层状各向同性介质多参数有限带宽反演

我们现在讨论纵波激发、纵波和横波同时接收的层状介质两参数(纵波速度和横波速

度）和三参数（密度、纵波速度和横波速度）的反演方法。

1. 两参数同时反演

层状介质弹性参数反演主要有两种方法，一个是基于层剥离原则的直接反演方法和优化方法。其中优化方法计算效率低，且要有一个较好的初始模型。而直接反演方法不需要初始模型，只要求表层的参数值为已知。此外，该方法计算效率高。前人对层状介质弹性参数的直接反演已有一定的研究。但只限于平滑介质、无噪声的脉冲数据，对有限带宽反演研究很少。这里我们提出了一种有限带宽的弹性参数反演方法。根据波场沿特征带传播的有限带宽反演方法中引入了两个控制参数用于自动确定层位。此外还引入了均匀层一次时移及多个特征点计算反射系数的技术。这些技术的引入不但使方法适合于有限带宽数据的反演，在一定程度上也提高了方法的抗噪能力和提高稳定性。利用该方法成功地用单个入射角的平面波的有限带宽记录的密度和在激发子波已知的情况下能同时反演出纵、横波速度。所得的反演结果明显优于前人的反演结果（Yagle 等，1985；Carazzone，1986）。利用本方法，我们还对含有一定强度噪声的记录做了试验，结果表明本方法具有较好的抗噪能力。该方法的具体算法简述如下。

在 $t=0$ 时，$\tau=0$ 处奇性强度为 d_P 的下行纵波 δ 脉冲激发条件下得到特征线 $t=\tau$ 上的边界条件为

$$\begin{cases} U_P(\tau,\tau)=\mathrm{d}pa/2 \\ U_S(\tau,\tau)=\mathrm{d}pc.\,C_S/[(C_P+C_S)r_0] \end{cases} \tag{6.3.13}$$

式中　a,c,r_0 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的元素。

因此，特征线 $t=\tau$ 处的边界条件可表示如下

$$\frac{U_P(\tau,\tau)}{D_P(\tau,\tau)}=\frac{1}{2}\,\frac{[\rho C_P]}{\rho(\tau)C_P(\tau)}-\frac{2p^2}{\rho(\tau)}[\mu] \tag{6.3.14a}$$

$$\frac{U_S(\tau,\tau)}{D_P(\tau,\tau)}=\sqrt{\frac{C_P(\tau^-)C_S(0)}{C_S(\tau^-)C_P(0)}}\left(\frac{1}{\rho(\tau)C_P(\tau)}[\mu]+\frac{C_S(\tau)}{2\rho(\tau)}[\rho-2\mu P^2]\right)p \tag{6.3.14b}$$

式中　$[\mu]=\mu(\tau^+)-\mu(\tau^-)$；其余的[·]项也有同样含意。

其它的几个特征线边界条件为

$$\frac{U_P(t_S(\tau),(\tau)}{D_S(t_S(\tau),\tau)}=-\sqrt{\frac{C_P(\tau^-)C_P(0)}{C_S(\tau^-)C_S(0)}}\left(\frac{1}{\rho(\tau)C_P(\tau)}[\mu]+\frac{C_S(\tau)}{2\rho(\tau)}[\rho-2\mu p^2]\right)p \tag{6.3.14a}$$

$$\frac{U_S(t_S(\tau),\tau)}{D_S(t_S(\tau),\tau)}=\frac{1}{2}\,\frac{[\rho C_S]}{\rho(\tau)C_S(\tau)}-\frac{2p^2}{\rho(\tau)}[\mu] \tag{6.3.15b}$$

它们是间断情形下特征边界条件的近似式，或称为弱间断条件的边界条件。

现在假定地面处的密度、纵波速度和横波速度为已知，在纵波激发下可根据（6.3.14）式反演出下面一层的波速。再根据界面两侧纵横波的关系式：

$$U(\tau^+)=E_c(\tau^+)A_c(\tau^+)A_c^{-1}(\tau^-)E_c(\tau^-)U(\tau^-)=GU(\tau^-) \tag{6.3.16}$$

可推得下一层的波场。这就是波场延拓。将延拓结果又可进行新一层的波速反演。如此反演－波场延拓反复递推、交替进行，可实现从浅层至深层的层剥离反演方法。

当激发的震源不是脉冲，而是某种子波时，可考虑子波宽度，形成宽度为子波宽度 W 的特征带，进行有限带宽的反演。反演中通过判断在有限带宽范围内，上下行波相关值最大来确定层位，并进行下面层位的反演。

数值试验的结果说明了这种反演方法的可靠性。我们用反射率法获得了数值模拟记录，直接得到 $\tau=0$ 处的 $\tau-P$ 域上行纵波和上行横波的记录。在反演中假设密度为已知，激发子波和地表处($\tau=0$)的纵、横波速度也为已知。对模型进行了试验。分别为常密度模型、变密度模型。同时进行了有限带宽反演和含噪声数据的反演。取得了满意的结果。

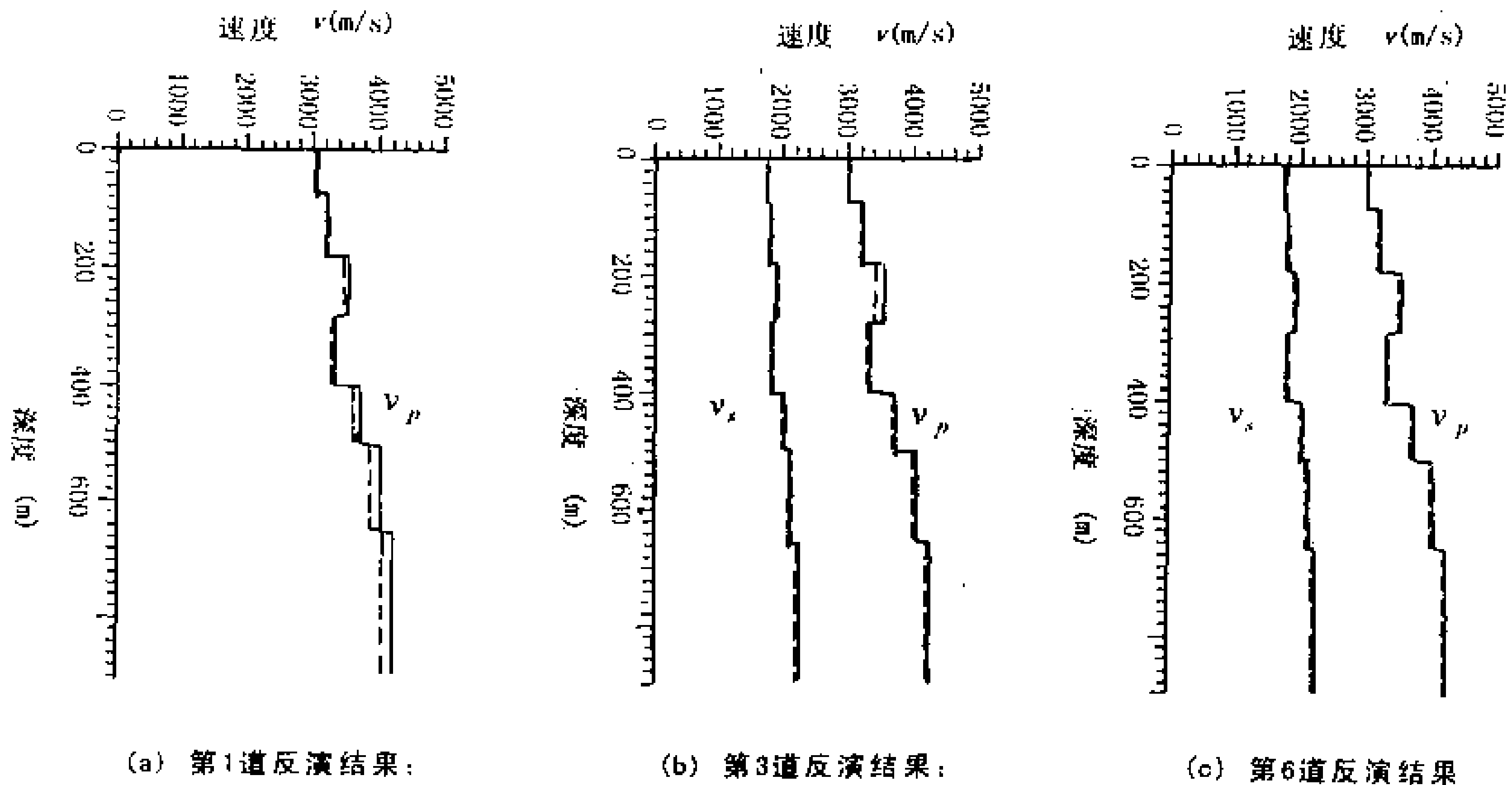


图 6.3.1 七层模型含 20% 噪声的三个地震道的反演速度图

本方法运算速度快，稳定性好和有一定的抗噪能力。另外，由于可以使用多道记录，可以对反演结果进行统计分析。

2. 三参数同时反演

三参数同时反演的基本思路是 τ 为深度 z 和参数 p(水平慢度)的函数，故可以将 P-P 波反射系数和 P-SV 波的反射系数写为

$$r_{PP}(p,z)=U_P(\tau,\tau)/D_P(\tau,\tau) \tag{6.3.17a}$$

$$r_{PS}(p,z)=U_S(\tau,\tau)/D_P(\tau,\tau) \tag{6.3.17b}$$

在纵波激发条件下，把两个或多个入射角(p 值)的平面波地震记录在各自的(t,τ)域内分别延拓至 $\tau(z_n,p)$，z_n 为第 n 层的深度附近。再根据 Z_n 处的 $r_{PP}(p)$ 和 $r_{PS}(p)$，利用特征线边界条件反演下一层的弹性参数。根据特征线的波场延拓公式，又可得到下一层的波场。反演与波场延拓交替进行，便构成了层状弹性介质三参数同时反演方法。该方法的特点是在(t,τ)域对波场分别延拓，在(p,τ)域同时反演。

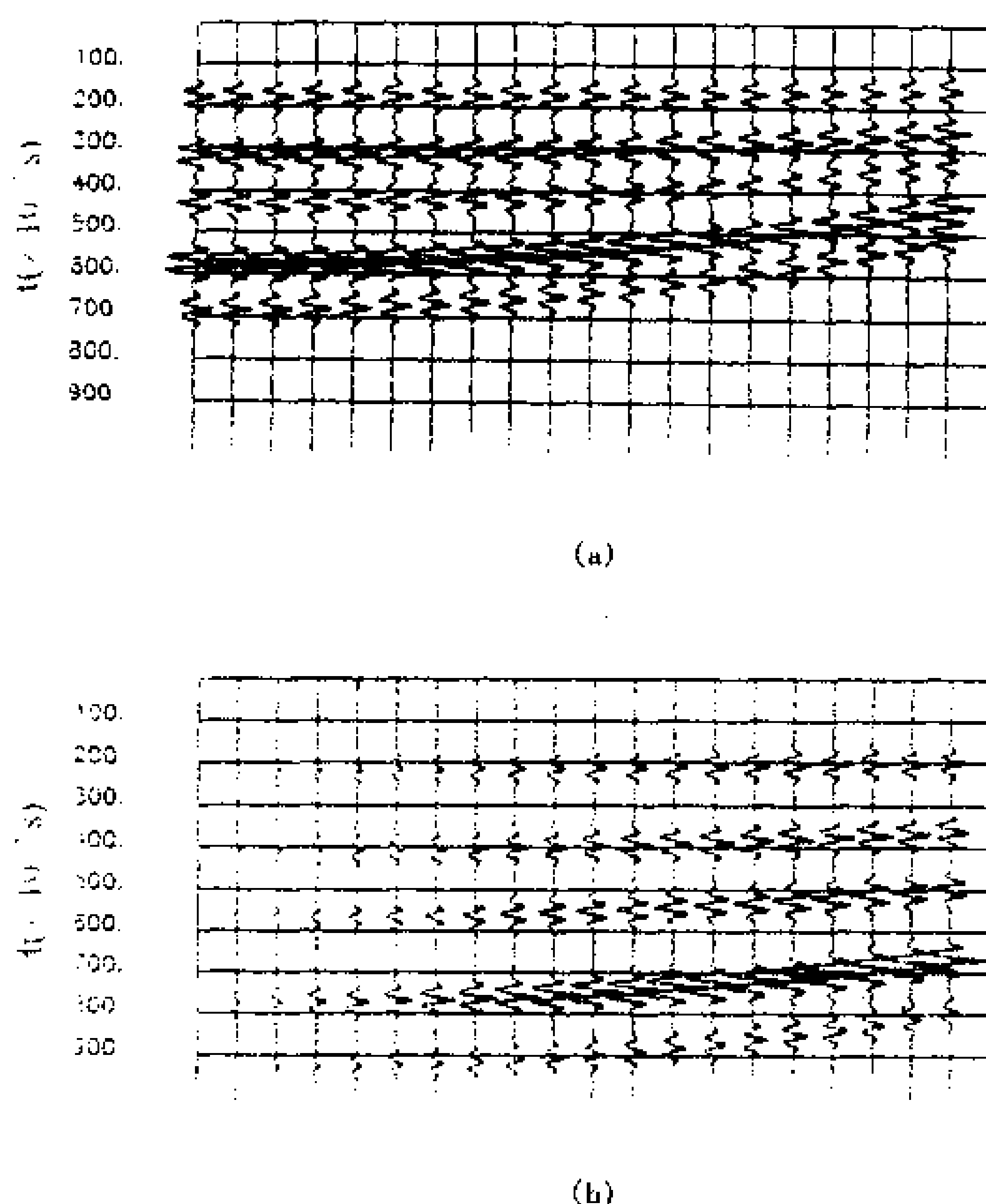
多道地震记录波场延拓时，所用的波场延拓公式形式相同，但由于 p 值不同，速度参数 C_P，C_S 和矩阵 G 等均不同，延拓计算也就有所不同。与两参数反演一样，三参数反演也可

以用有限带宽的反演方法进行。当利用两道记录进行三参数同时反演时,应尽量选取 p 值相差较大的两道记录进行。因为 p 值相近时,从特征线边界条件得到的四个方程两两相似,反演效果不佳。

我们对三参数反演进行了试验。首先仍然用反射率法计算了上行纵波共炮点记录(图6.3.2a)和上行横波共炮点记录(图6.3.2b)。激发震源为纵波源,主频为60Hz的零相位子波。假设 $\tau=0$ 处的弹性参数和激发子波为已知。

(1) 两道记录反演的数值试验

无噪声记录的反演结果表示在图6.3.3上,是用第3和第6道反演的结果。对生成的理论记录分别加5%,10%和20%的随机噪声,然后进行反演, 均取得了良好结果。图6.3.4上是加20%噪声用第3和第7道进行反演三参数的成果图。说明本方法具有一定的抗噪能力。



(a)

(b)

图6.3.2 反射率法计算的七层反射记录

(2) 多道记录反演的数值试验

在进行多道地震记录反演时,我们对反演方法做了些修正。原方法中波场延拓是通过某一层时需进行两次波场插值。现在,确定层位全部放在当前步长上进行。波场延拓时直接延拓至整节点或半节点层位的上侧。这样,便可通过界面两侧的波场关系式得到整节点和半节点层位下侧的波场而无需插值。使波场延拓到某一层时只进行一次波场插值。另

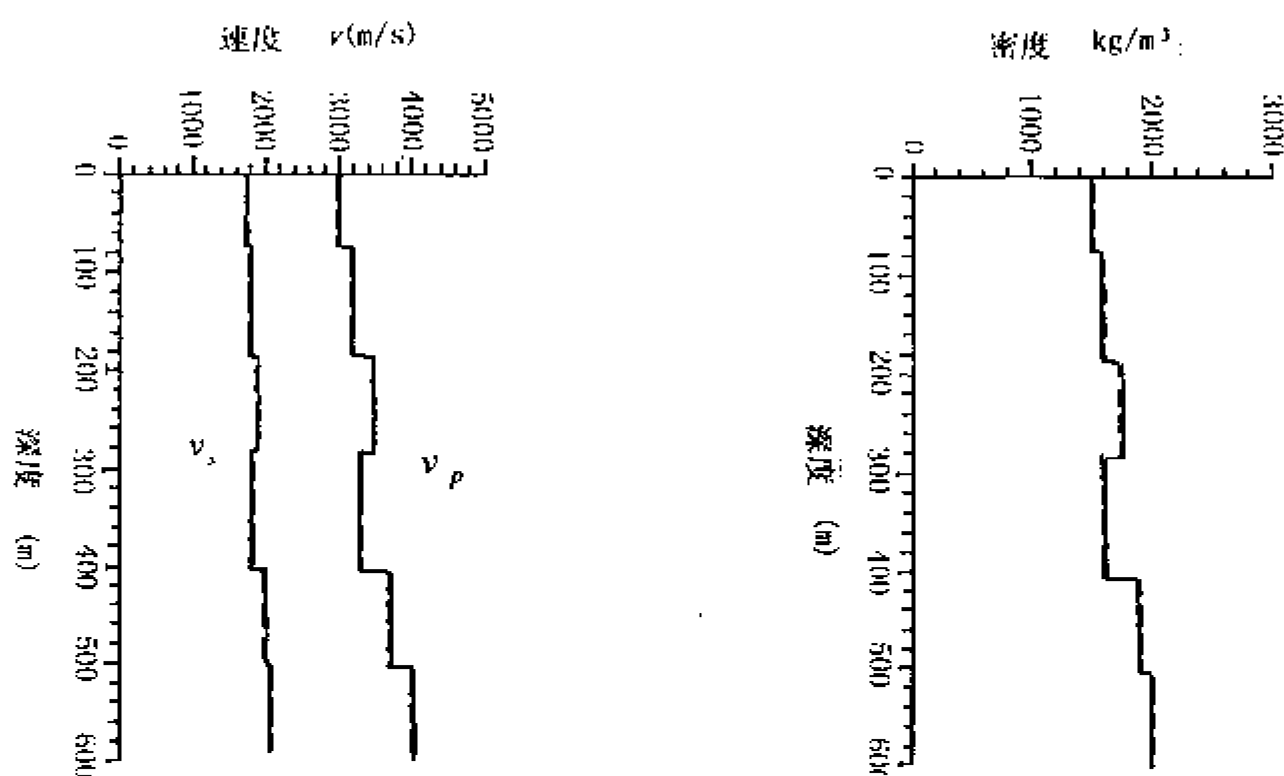


图 6.3.3 无噪声记录的反演结果

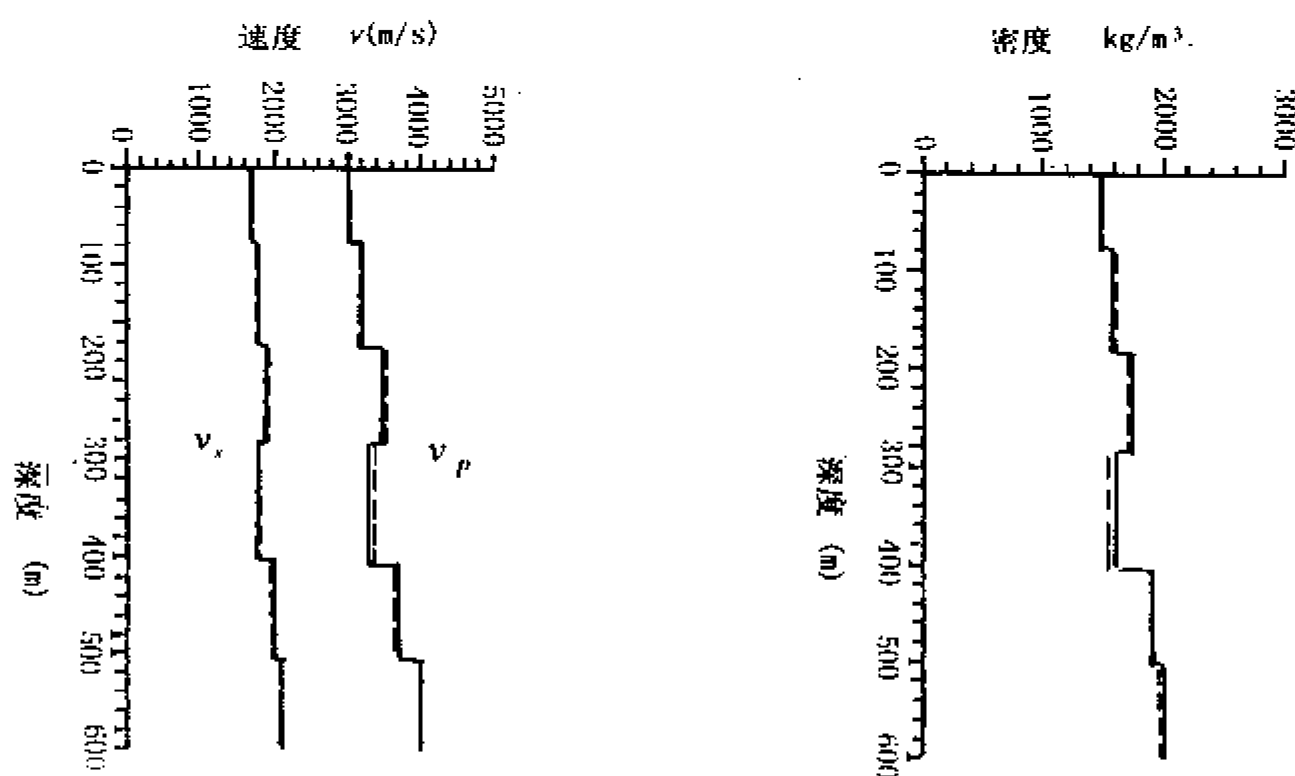


图 6.3.4 加 20%噪声记录的反演结果

外,用多道记录确定层位,可较好地得到当前层的层厚和纵,横波速度。

图 6.3.5 是第 3 至第 7 道的反演结果。图 6.3.6 是第 6 道至第 20 道的反演结果。图 6.3.7 是全部 20 道的反演结果。对比这些反演结果说明,随着使用地震道数的增加,反演中的抗噪能力明显提高。同时说明上一层的反演结果对下一层的反演结果影响较小。

试验的结果表明,利用两个以上入射角的 P-P 反射波和 P-SV 反射波的资料,在已知子波的情况下采用波场分别延拓的准特征带方法同时反演层状介质的密度、纵波速度和横波速度是一种可行的多参数的反演方法。有限带宽数值和含噪声的数据的反演取得良好的效果。同时也证明,该方法运算速度快,稳定性好。可以考虑用于实际地震资料的处理。当然,由于要对实际资料进行 τ-p 变换。因此有保真处理的问题。

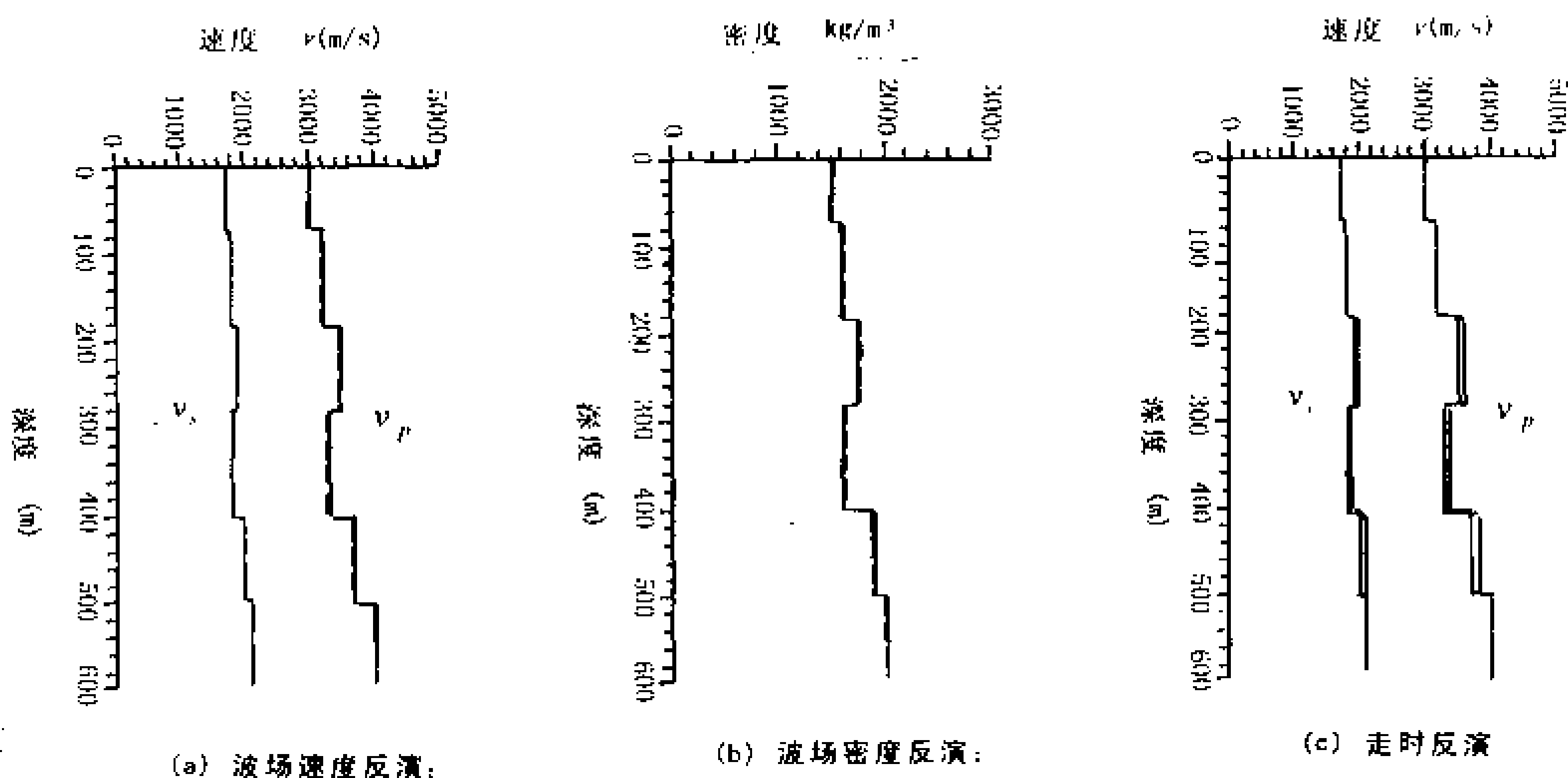


图 6.3.5　用第 3 道至第 7 道的反演结果

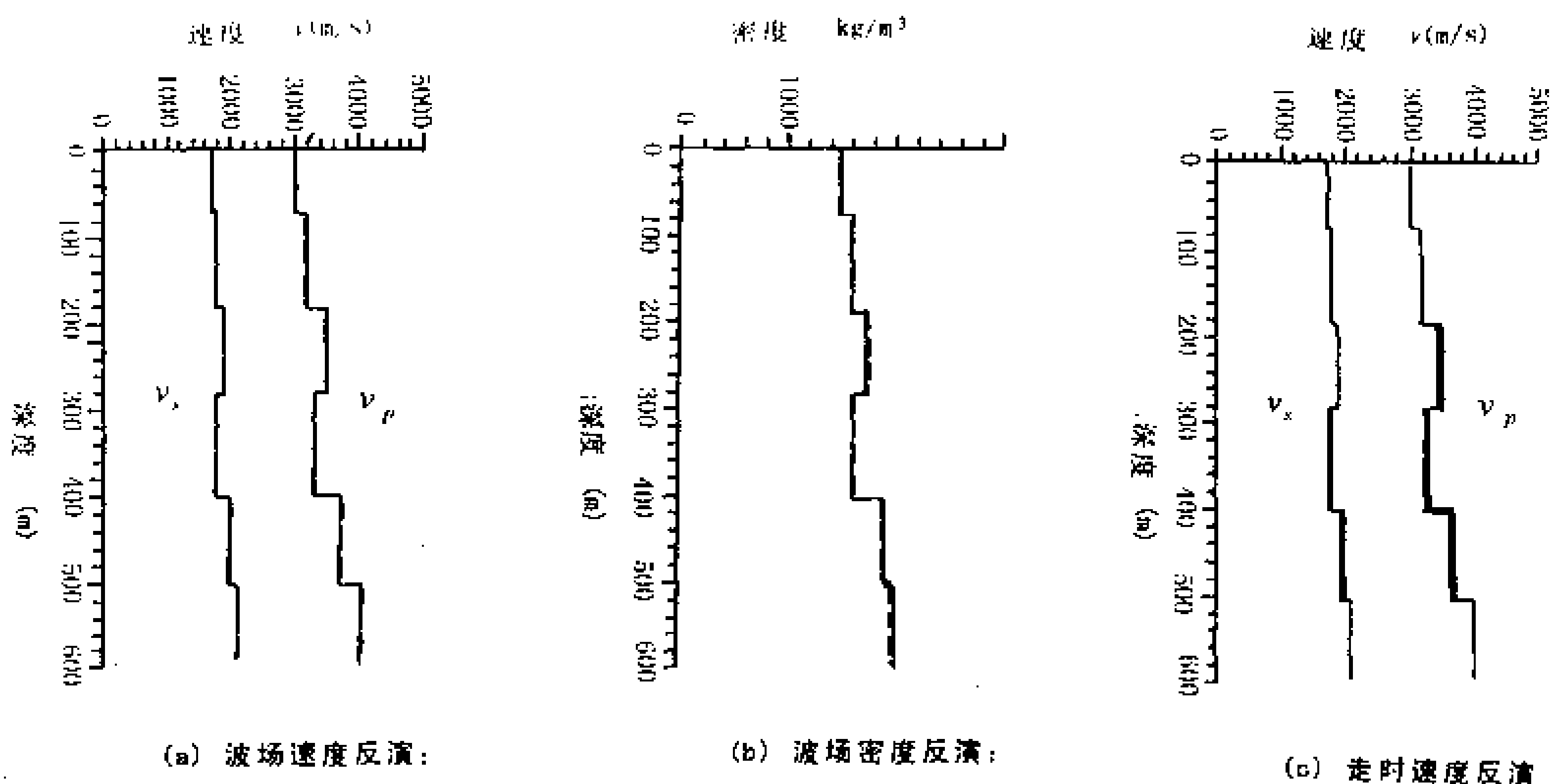
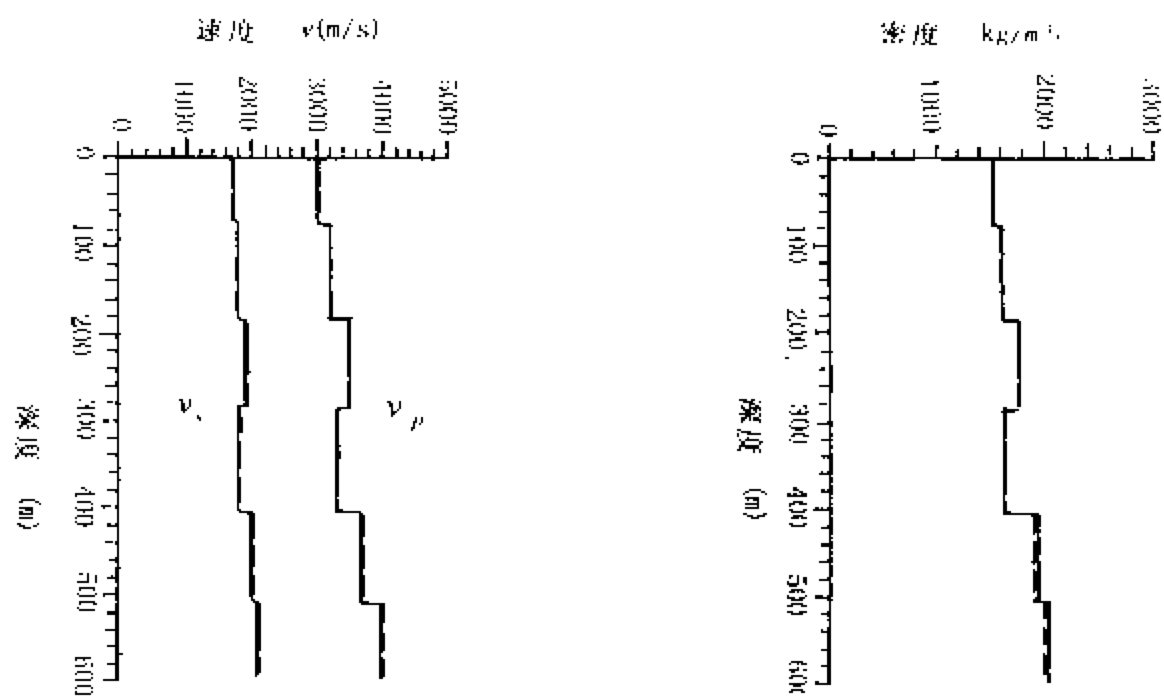


图 6.3.6　用第 6 道至第 20 道的反演结果

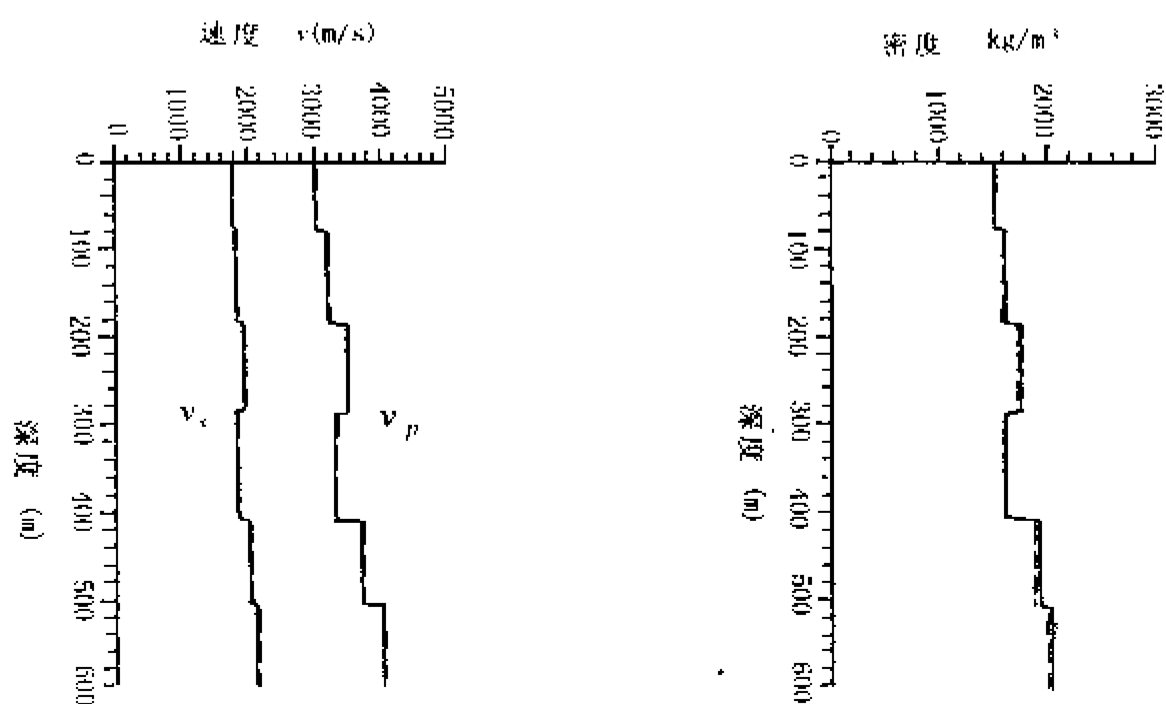
在研究过程中我们也对层状横向各向同性介质和层状分层方位各向异性(EDA)介质的参数反演问题进行了研究。也取得了一些理论成果。

横向各向同性介质通过退化为各向同性弹性介质,完全可以用上述的方法即使用特征线边界条件与波场延拓的方法进行反演。

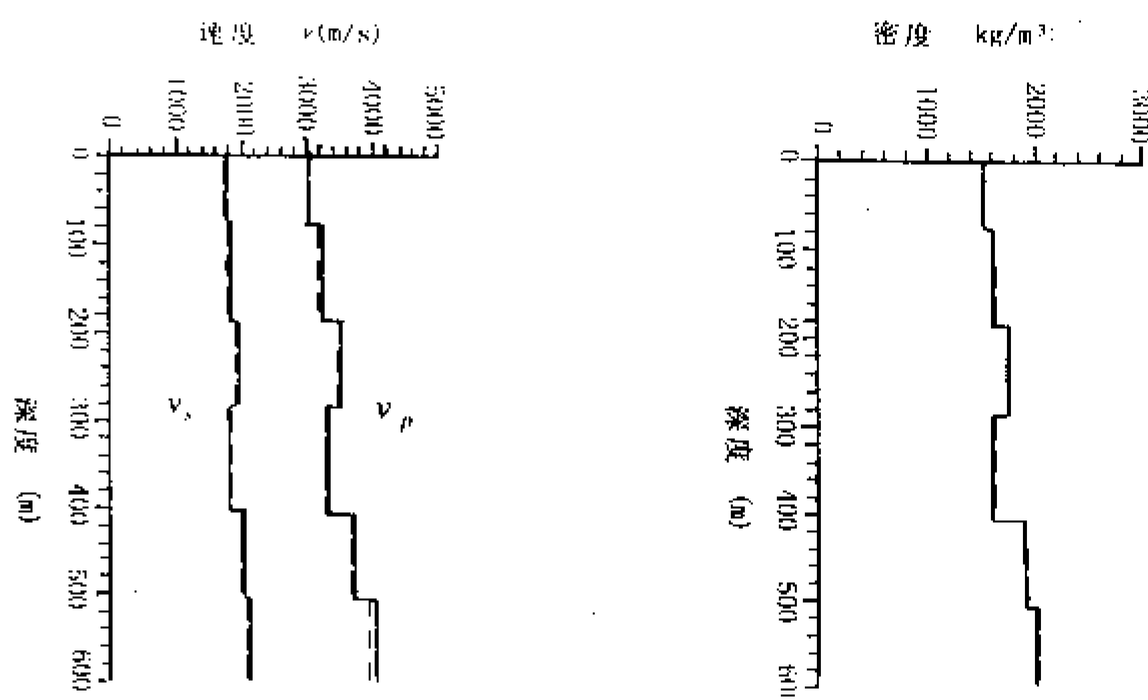
对于层状 EDA 介质我们也导出了相应的特征线边界条件和波场延拓方程组。从理论上讲,也可以进行相应的反演计算。



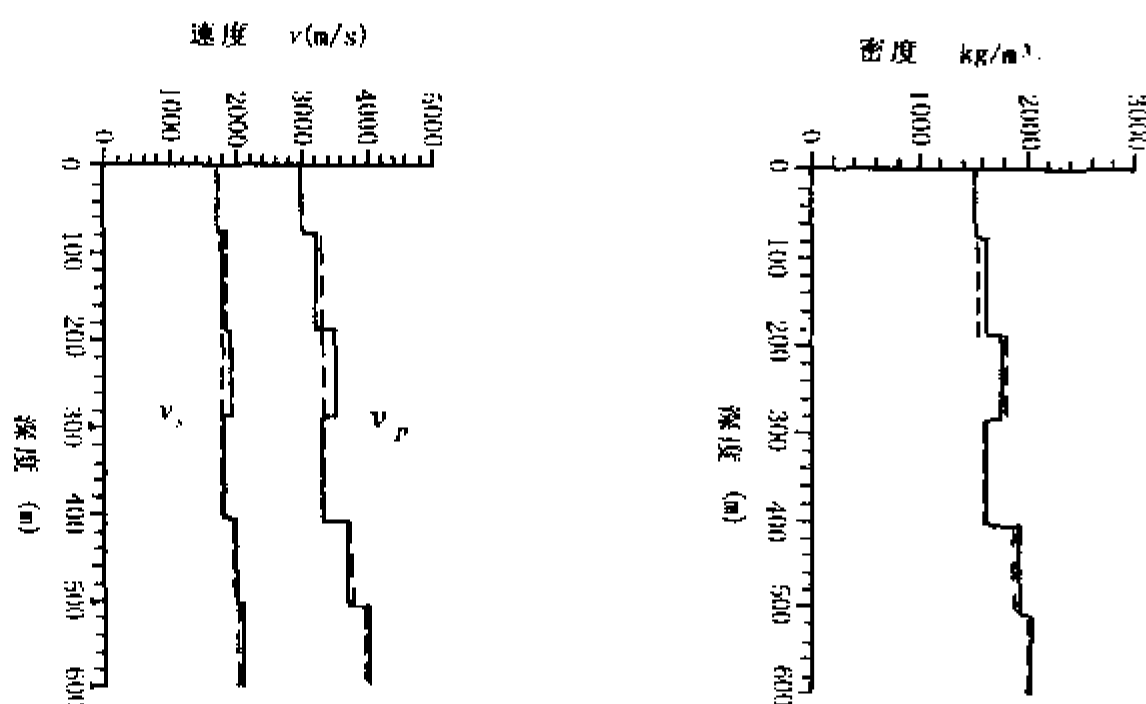
(a) 无噪声速度和密度反演



(b) 含20%噪声的速度和密度反演



(c) 含30%噪声的速度和密度反演



(d) 含40%噪声的速度和密度反演

图 6.3.7 用全部 20 道的反演结果

6.4 高维逆散射反演

用逆散射数据求介质速度的方法,可以用于一维情况,也可以用于高维情况。我们在这里用于二维和三维的地震波传播速度的反演,其原理是一样的(Bleistein, 1982 – 1985)。

6.4.1 散射场

由 x_s 点和 $t=0$ 时发出的有限带宽的脉冲波,被设在接收点 x_g 处的检波器接收到。此地震波由三维波动方程描述

$$Lu(x,x_s,t)=f(t)\delta(x-x_s), \tag{6.4.1}$$

式中 算子 $L=\nabla^2-\dfrac{1}{v^2(x)}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$

对时间 t 进行傅立叶变换,上式变为

$$Lu(x,x_s,w)=-F(w)\delta(x-x_s) \tag{6.4.2}$$

波场 $u(x,x_s,\omega)$假设其满足索莫菲辐射条件:

$$ru \text{ 有界}, r[(\partial u/\partial r)-(\mathrm{i}\omega/v)u]\to 0 \qquad \text{当 } r\to\infty \tag{6.4.3}$$

式中 $r=|x|$。

上面的条件,使得无限介质中的 Helmholtz 方程(6.4.2)有唯一解。

现在我们将介质速度 $v(x)$表示成背景部分 $c(x)$和摄动部分,表示如下

$$\frac{1}{v^2(x)}=\frac{1}{c^2(x)}(1+a(x)) \tag{6.4.4}$$

这样选择的原因是为了保持 Helmholtz 方程的形式。将(6.4.4)式代入(6.4.2)式形成等价 Helmholtz 方程为

$$L_0u(x,x_s,\omega)=-F(\omega)\delta(x-x_s)-[(\omega^2)/c^2(x)]a(x)(u,x_s,\omega) \tag{6.4.5}$$

是背景速度为 $c(x)$的 Helmholtz 的算子。

(6.4.5)式形成的全波场 $u(x,x_s,\omega)$,是由脉冲源 $-F(\omega)\delta(x-x_s)$和'散射源' $-[\omega_2/c_2(x)]\alpha(x)u(x,x_s,\omega)$引起的。由这个'散射源'产生的散射波是我们要关心的信息。由于它来自地下深处,因此,可以从它计算出介质的传播速度。我们可以认为全波场是由入射波场 $u_I(x,x_s,\omega)$和散射波场 $u_s(x,x,\omega)$相加的结果。u_I 是不存在速度摄动时的波场,而 u_s 是由于存在速度摄动产生的 u 的变化。因此有

$$u(x,x_x,\omega)=u_1(x,x_x,\omega)+u_s(x,x_s,\omega) \tag{6.4.7}$$

u_I 是无速度摄动情况下的波动方程

$$L_0u_I(x,x_s,\omega)=-F(\omega)\delta(x,-x_s) \tag{6.4.8}$$

的解。我们将(6.4.7)式代入(6.4.5)式,得

$$\begin{aligned}L_0[(u_I(x,x_s,\omega)+u_s(x,x_s,\omega)]&=-F(\omega)\delta(x-x_s)\\&\quad-[\omega^2/c^2(x)]a(x)[u_I(x,x_s,\omega)+u_s(x,x_s,\omega)]\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

利用(6.4.8)式,从上式可得散射场 u_s 的波动方程为

$$L_0u_s(x,x_s,\omega)=-[\omega^2/c^2(x)]a(x)[x,x_x,\omega)+u_s(x,x_s,\omega)] \tag{6.4.10}$$

(6.4.10)是一个重要的结果。为了求 u_s 的解,需要给出 green 函数 $g^*(x,x_g,\omega)$,它是下式

$$L_0^*g^*(x,x_g,\omega)=-\delta(x-x_g), \tag{6.4.11}$$

式中 $*$号用来表示伴随算子和伴随 green 函数,

的解。现在我们对(6.4.10)式和(6.4.11)式用 green 定理

$$\iiint_D dV\{g^*L_0u-uL_0^*g^*\}=\iint_{\partial D}dS\left\{g^*\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial g^*}{\partial n}\right\} \tag{6.4.12}$$

式中 $\partial/\partial n$ 表示向界面 ∂D 内法线方向的导数。

因此可以把体积积分转换为面积分。不过,对于无限介质面积分项为零。在此条件下也可简化表示出

$$g^*(x,x_g,\omega)=g(x_g,x,\omega) \tag{6.4.13}$$

对于常密度 Helmholtz 方程是自伴的,即

$$g(x_g,x,\omega)=g(x,x_g,\omega) \tag{6.4.14}$$

将(6.4.10)式、(6.4.11)式和(6.4.13)式代入(6.4.12)式,且(6.4.12)式右端项等于零,因此可将散射场表示成积分方程为

$$\begin{aligned}u_s(x_g,x_s,\omega)=\omega^2\iiint&[a(x)/c^2(x)][u_I(x,x_s,\omega)+u_s(x,x_s,\omega)]\\&\times g(x_g,x,\omega)d^3x\end{aligned} \tag{6.4.15}$$

由于 $\alpha(x)$是在半空间$(z>0)$存在。因此积分域 D 应当是半无限空间$z>0$。

6.4.2 BORN 近似

(6.4.15)式是一个含有 $\alpha(x)$, $u_s(x,x_s,\omega)$项的积分方程,它是一个有两个未知项的非线性方程。如果 $\alpha(x)$很小,$u_s(x,x_s,\omega)$也是小项,因此可以线性化,即这一项可以忽略。这时散射场的 Born 近似积分方程为

$$u_s(x_g,x_s,\omega)=\omega^2\iiint[\alpha(x)/c^2(x)]u_I(x,x_s,\omega)g(x_g,x,\omega)\mathrm{d}^3x \tag{6.4.16}$$

上式是一个一般式,对于具体情况,可根据它求出具体公式

1. 常背景速度下零炮检距反演

一个比较简单的问题是震源和接收点相重合,即在平表面 $z=0$ 上,$x_s=x_g$ 和背景速度 $c(x)=c_0=\mathrm{const}$。在此条件下

$$x_s=x_g=\xi=(\xi_1,\xi_2,0) \tag{6.4.17}$$

Green 函数解:

$$g(\xi,x,\omega)=\frac{e^{\mathrm{i}\omega r/c_0}}{4\pi r} \tag{6.4.18}$$

背景场解:

$$u_I(x,\xi,\omega)=F(\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c_0}}{4\pi r},r=|x-\xi| \tag{6.4.19}$$

散射场解:

$$u_s(\xi,\omega)=F(\omega)\left[\frac{\omega}{4\pi c_0}\right]^2\iiint_{z>0}\alpha(x)\frac{e^{2\mathrm{i}\omega r/c_0}}{r^2}\mathrm{d}^3\mathrm{x} \tag{6.4.20}$$

当我们取 α 为一个自由度,即 $\alpha(x)=\alpha(z)$,且只有一个记录时,则(6.4.20)式可表示为

$$u_0(0,0,\omega)=F(\omega)[\omega/4\pi c_0]^2\iiint\alpha(z)[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega r/c_0/r^2}]\mathrm{d}^3x \tag{6.4.21}$$

式中 $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$。

在极座标系(ρ,θ)中,上式表示为

$$u_s(0,0,\omega)=F(w)\frac{\omega^2}{8\pi c_0}\iiint_{z>0}\alpha(z)\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega r/c_0}}{r^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \tag{6.4.22}$$

现在对 ρ 进行分部积分,用高频近似,只保留主项,积分结果为

$$\exp\{2\mathrm{i}\omega r/c_0\}\cdot\rho/r$$

最终的结果为

$$u_s(0,0,\omega)=F(\omega)\frac{\mathrm{i}\omega}{16\pi c_0}\iiint_{z>0}\frac{\alpha(z)}{z}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega z/c_0}\mathrm{d}z \tag{6.4.23}$$

当 $F(\omega)=1$ 时,上式说明观测数据可做为 $\alpha(z)/z$ 的傅立叶变换。用反傅立叶变换,可求出 $\alpha(z)$的有限带宽近似为

$$\alpha_B(z)=16z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_s(0,0,w)}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega z/c_0}\mathrm{d}\omega \tag{6.4.24}$$

这实际上是一个相当于一维反演公式。但它与一维公式

$$\alpha_z=-\frac{4}{\pi c_0}\int_{-\infty}^{\infty}u_s(0,\omega)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega z/c_0}\mathrm{d}\omega \tag{6.4.25}$$

还是有区别的。因为(6.4.24)式是在三维上观测的。(6.4.25)式是从一维波动方程求出的。上面用到的高频近似主项是用 WKBJ 级数展开式表述的,即

$$u_s(x,\omega)\approx\theta^{\mathrm{i}\omega\tau(x)}\Sigma[A_n(x)/(\mathrm{i}\omega)^n] \tag{6.4.26}$$

式中 $\tau(x)$为旅行时。

假设有水平反射面位于深度 h 上,设背景速度为 c_0,α 是 z 的函数。这时,反射波的渐近解的主项可表示为

$$u_s(0,0,\omega)RF(\omega)[e^{2i\omega h/c_0}/8\pi h] \tag{6.4.27}$$

式中　R 是法线反射系数；

　　$2h/c_0$ 是双倍旅行时；

　　$8\pi h = 4\pi\times 2h$ 为波传播中的几何扩散因子。

将(6.4.27)式代入(6.4.24)式，可得

$$\alpha_B = \frac{2ZR}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega[z-h]/c_0}}{i\omega}d\omega$$

$$= -4R\frac{2}{h}H_B(z-h) \tag{6.4.28}$$

上式说明有限带宽的有关速度的摄动量是一个阶跃函数。如果我们首要关心的是不连续性。则最好的办法是将反变换的数据变成有限带宽的狄尔塔函数。因为有限带宽的狄尔塔函数比有限带宽的阶跃函数易于辨认。这要求引入一个乘数因子 $\pm i\omega$ 或 $\pm k$，这与频率域和波数域的正反问题有关。对我们反问题来说应当取 $-i\omega$，因为反傅立叶变换需要一个核 $\exp\{-i\omega t\}$。图 6.4.1 是一个 10－50Hz 带宽的阶跃函数。图 6.4.2 是图 6.4.1 的阶跃函数用了 $-i\omega$(求导)算子之后的狄尔塔函数。不连续位置很清楚，由狄尔塔脉冲的峰值确定。而且可以证明，脉冲的高度等于阶跃函数的幅度除以滤波器面积。我们如能恰当地引入一个求导因子$(-2i\omega/c_0)$和一个适当比例因子$(-1/2)$，就会得一个与滤波器 $F(\omega)$的面积成比例的反射系数如下式：

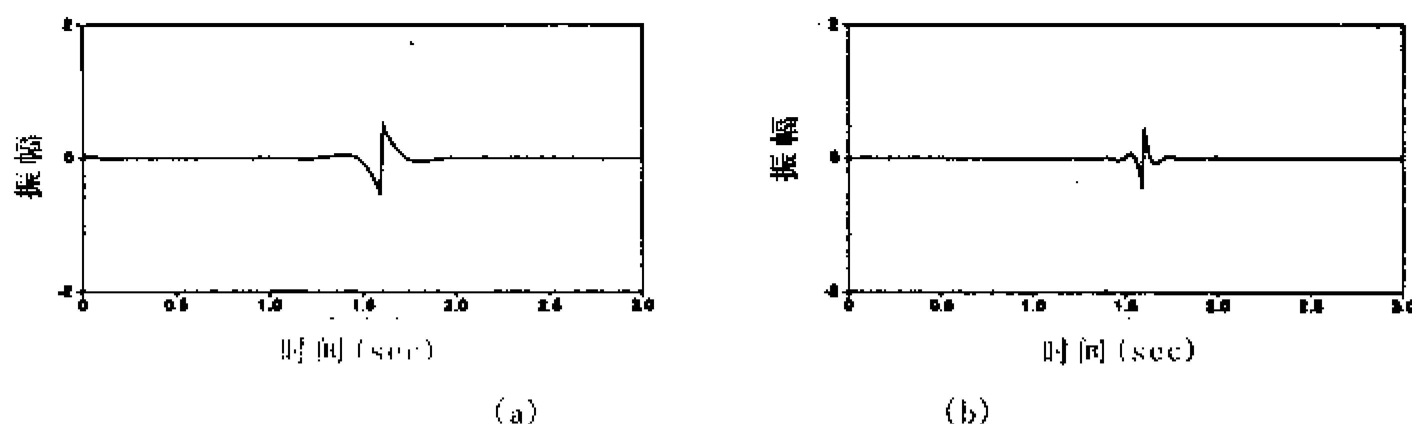


图 6.4.1　10-50Hz 带宽的阶跃函数

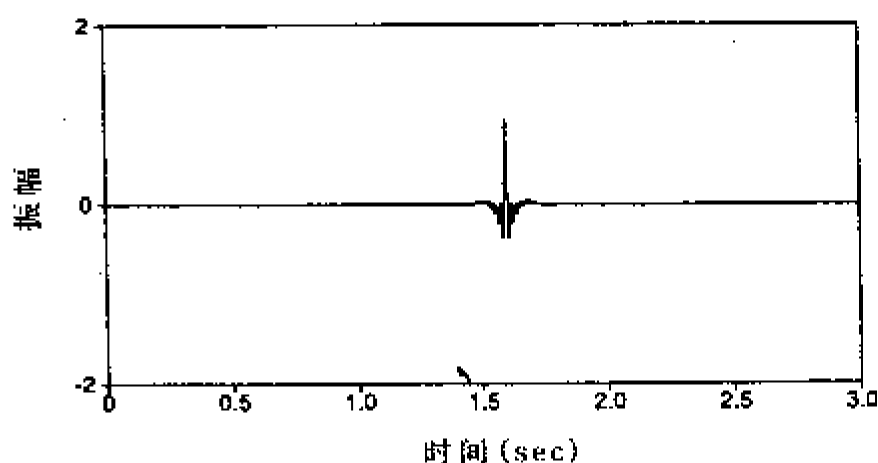


图 6.4.2　阶跃函数求导之后的狄尔塔函数

$$\beta_B(z) = (8z/c_0)\int u_s(0,0,\omega)e^{-2i\omega z/c_0}d\omega \tag{6.4.29}$$

(6.4.28)式就变为

$$\beta_B(z) = R(z/h)\delta_B(z-h)$$

这就是一维反演应当得到的结果。

2. 三维零炮检距常背景值时情况

上面我们讨论了单个零炮检距的反演问题。现在我们回到 $\alpha(x)$的情况,即返回到(6.4.20)式,但令 $F(\omega)=1$,则有下式

$$u_s(\xi,\omega)=\left[\frac{\omega}{4\pi C_0}\right]^2\iiint_{z>0}\alpha(x)\frac{e^{2i\omega r/c_0}}{r^2}dx^3 \tag{6.4.30}$$

式中 $\xi=x_s=x_g$;

$r=|x-\xi|$。

所以有

$$u_s(x_g,x_s,\omega)=u(\xi,\omega)$$

将上式两边乘上 c_0^2/ω^2,并对 ω 求导,得

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\iiint_D\frac{e^{2i\omega r/c_0}}{(4\pi r)^2}\alpha(x)dx^3=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{c_0^2}{\omega^2}u_s(\xi,\omega)\right) \tag{6.4.31}$$

上式简化表示为

$$\iiint_D dx^3\alpha(x)g_1(\xi-x,\omega)=-2\pi i c_0^3\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{u_s(\xi,\omega)}{\omega_2}\right) \tag{6.4.32}$$

式中 $g_1(\xi-x,\omega)=e^{2i\omega r/c_0}/4\pi r$。

(函数 g_1 是常速为 $c_0/2$ 介质的自由空间 green 函数)

现在引入一种有用的横向空间傅立叶正、反变换。此时的波数表示为 $2\omega/c_0$。正变换为

$$\bar{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^2\rho e^{-2ik\cdot\rho}f(\rho) \tag{6.4.34}$$

反变换为

$$f(\rho)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^2ke^{2ik\cdot\rho}\bar{f}(k) \tag{6.4.35}$$

式中 $\rho\equiv(x_1,x_2)$;

$k\equiv(k_1,k_2)$,是波的矢量,由两维波数定义。

应用空间傅立叶变换将(6.4.32)式中的褶积关系变为相乘关系,其频域表示为

$$\int_0^{\infty}dx_3\bar{\alpha}(k,x_3)\bar{g}_1(k,x_3,\omega)=-2\pi c_0^3\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\tilde{u}_s(k,\omega)}{\omega^2}\right) \tag{6.4.36}$$

上式中的 $g_1(x,\omega)$的横向傅立叶变换为

$$\tilde{g}(k,x_3,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^2\rho\frac{\exp(-2ik\cdot\rho+\frac{2i\omega}{c_0}[\rho^2+x_3^2]}{4\pi[\rho^2+x_3^2]^{1/2}}$$

可以直接用上式求 $g_1(k,x_3,\omega)$。但是最简单的方法是将 (6,4,33)式做为波速为 c_0/z 的 Helmholtz 方程的 Green 函数求解,取

$$\left[\nabla^2+\frac{4\omega^2}{c_0^2}\right]g_1(x_1,x_2,x_3,\omega)=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)。$$

上式中已令 $\xi=0$。用上面的横向空间傅立叶变换,上式可表示为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-4K^2+\frac{4\omega^2}{c_0^2}\right]\tilde{g}(k,x_3,\omega)=-\delta(x_3).$$

我们知道,在三维情况下波数关系为 $k^2=\omega^2/c_0^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$。因此 k_3 有如下关系式:

$$k_3^2=\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2\right) \tag{6.4.37}$$

因此可以写出 green 函数的 Helmholtz 方程为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+(2k_3)^2\right]\tilde{g}_1(k,x_3,\omega)=-\delta(x_3).$$

上式实际是一维方程,它又可表示为

$$\tilde{g}_1(k,x_3,\omega)=\frac{1}{4ik_3}e^{2ik_3|x_3|},$$

将它直接代入(6.4.36)式,可得到

$$\int_0^\infty dx_3\tilde{\alpha}(k,x_3)e^{2ik_3|x_3|}=-8\pi k_3c_0^3\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{u_s(k,\omega)}{\omega^2}\right) \tag{6.4.38}$$

式中的 k_3 是实值的。在假定 k_3 是实值时,应当说明 k_3 的定义。k_3 是波数

$$k=(k,k_3)=(\omega/c_o)k$$

的垂直分量。$\hat{k}$ 是单位矢量。我们定义 k_3 为

$$k_3=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\omega)\left[\dfrac{\omega^2}{c_0^2}-k^2\right]^{1/2} & 当|\omega|\geqslant c_0k 时\\ i\left[k^2-\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\right]^{1/2} & 当|\omega|<c_0k 时\end{cases} \tag{6.4.39}$$

为了保证倏逝波衰减呈 $\exp(-|k_3|x_3)$形式,要求 k_3 必须是实的。上述对 k_3 的定义的一个重要结果是 ω 在$|\omega|\geqslant c_0k$ 可以表示为:

当 ω 从 $-\infty$变到 $-c_0k$ 和从 c_0k 变到∞时,k_3 从 $-\infty$变到∞,这说明 k_3 对 x_3 有共轭傅立叶变换的合适性质。因此有相应的正向傅立叶变换为

$$\tilde{f}(k_3)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_3)e^{2ik_3x_3}dx_3 \tag{6.4.41}$$

反傅立叶变换为

$$f(x_3)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k_3)e^{-2ik_3x_3}dk_3 \tag{6.4.42}$$

现在我们重新回到解 $\alpha(x)$的问题上,我们重写(6.4.38)为

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_3\tilde{\alpha}(k,x_3)e^{2ik_3x_3}=-8\pi k_3c_0^3\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{u_s(k,\omega)}{\omega^2}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_0} \tag{6.4.43}$$

将(6.4.41)式和(6.4.42)式用于(6.4.43)式,则可以求得 $\tilde{\alpha}(k,x_3)$为

$$\tilde{\alpha}(k,x_3)=-8c_0^3\int_{-\infty}^{\infty}dk_3k_3\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\tilde{u}_s(k,\omega)}{\omega^2}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_0}e^{-2ik_3x_3}$$

通过反傅立叶变换得到 $\alpha(x)$为

$$\alpha(x) = \frac{-8c_0^3}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 k\, k_3 \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\tilde{u}_s(k,\omega)}{\omega^2}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_0} e^{2i(k\cdot p - k_3x_3)} \tag{6.4.44}$$

首先我们把 $u_s(k,\omega)$写为 $u_s(\xi,\omega)$的空间反傅立叶变换,得

$$\alpha(x) = \frac{-8c_0^3}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 k\, k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}_\xi^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{u_s(\xi,\omega)}{\omega^2}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_0} e^{2i[k\cdot(\rho-\xi) - k_3x_3]} \tag{6.4.45}$$

再将 $u_s(\xi,\omega)$变到时间域,有

$$\alpha(x) = \frac{-8c_0^3}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 k\, k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^2\xi e^{2i[k\cdot(\rho-\xi) - k_3x_3]} \times \int_0^{\infty} u_s(\xi,t)\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_0}$$

由于微分项可表示为

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\omega^2}e^{i\omega t}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left[it - \frac{2}{\omega}\right]e^{i\omega t},$$

最后可将 $\alpha(x)$写为

$$\alpha(x) = \frac{8c_0^3}{i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k^3 \frac{k_3}{\omega_0^2} e^{2i[k\cdot(\rho-\xi) - k_3x_3]} \times \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, tu(\xi,t)e^{i\omega_0 t}\left[1 + \frac{2i}{\omega_0 t}\right], \tag{6.4.46}$$

式中　ω_0 由(6.4.40)定义。

这是积分方程(6,4,31)的精确解。

事实上,(6.4.31)是真积分方程的理想化,其实空间 - 频率域都是有限的。有两种方法达到有限孔径反问题的解。第一,人们可以直接解此有限孔径问题。第二,可将上式用于有限空间延伸的高频数据。如此,积分极限将反映有限孔径。它将可以得到反射率函数。类似于前面的讨论,有限带宽和有限孔径的数据表示为 $\alpha_B(x)$,定义为

$$\alpha_B(x) = \frac{8c_0^3}{i\pi^2}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\xi^2 \int_{\Omega} \mathrm{d}k^3 \frac{k_3}{\omega_0^2} e^{2i[k\cdot(\rho-\xi) - k_3x_3]}\int_0^{\infty} \mathrm{d}t + u_s(\xi,t)e^{i\omega_0 t} \tag{6.4.47}$$

式中　Σ表示地面记录 ξ 的全部区域;

Ω 表示对应 ω 的有限带宽的范围;

k_3 是实的。

将(6.4.47)式乘上 $i\omega/2c_0$,得反射率函数。上面的方程与 Stolt 傅立叶偏移公式完全相似。但导出的方法是不同的。

此反射率函数可以写出另外的两种表达式,这可以用(6.4.40)定义的 $\omega = \omega_0(k)$作为一个变量,由此可得

$$\mathrm{d}\omega = c_0 \mathrm{sgn} k_3 \frac{k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}}\mathrm{d}k_3 = c_0^2 \frac{k_3}{\omega}\mathrm{d}k_3$$

将此结果用于(6.4.47)式,得

$$\beta(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\xi^2 \int_{\Omega} \mathrm{d}k^2 \int \mathrm{d}\omega e^{2i[k\cdot(\rho-\xi) - k_3x_3]}\int_0^{\infty} \mathrm{d}t + u_s(\xi,t)e^{i\omega_0 t} \tag{6.4.48}$$

式中的 k_3 仍如前面定义的,Ω 是数据的有限带宽中 k 的实际定义域。上式用 ω 上的分部积分,消除出现在傅立叶变换中的 t 的幂。在分部积分中采取对 $\exp\{i\omega t\}$进行积分,对 exp

$\{-2ik_3z\}$项进行微分。积分的终点无贡献，因为数据是有限带宽并且逐步消逝的。这个结果表示为

$$\beta(x)=\frac{8x_3}{\pi^2c_0^2}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\xi^2\int_{\Omega}\mathrm{d}k^2\int\mathrm{d}\omega\,\frac{\omega}{k_3}\mathrm{e}^{2i[k\cdot(\rho-\xi)-k_3x_3]}\int_0^{\infty}\mathrm{d}tu_s(\xi,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tag{6.4.49}$$

我们常常对单个地震剖面，进行速度反演，因此需要给出2.5维的计算公式，这时 $k_2=0$，因此有

$$\beta(x)=\frac{8x_3}{\pi^2c_0^2}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\xi^1\int_{\Omega}\mathrm{d}k^2\int\mathrm{d}\omega\,\frac{\omega}{k_3}\mathrm{e}^{2i[k_1\cdot(x_1-\xi)-k_3x_3]}\int_0^{\infty}\mathrm{d}tu_s(\xi,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tag{6.4.50}$$

用上式进行计算，可以得到偏移后的反射率函数曲线。由于这是反射系数剖面，带宽有限，反射系数表现为带有脉冲波形。因此，结果与偏移剖面非常相似。这是可以理解的。如果我们求出的反射率函数 $\beta(x)$，确能比偏移剖面上的振幅更反映反射系数的变化，则可以用常规方法求出波阻抗，至少能用它求相对波阻抗的变化，从而获得高维相对波阻抗剖面。如能通过其它途径，给出波阻抗的低频分量，我们可求出绝对波阻抗剖面。

6.4.3 非均匀介质中的反演

在上一节中，我们讨论了常背景速度和零炮检距观测记录的情况下的反演问题。我们导出了法线入射的反射系数，即反射率函数 $\beta(x)$。但是，这个结果是不充分的，因为它不能处理全部实际问题。我们需要发展更一般的公式，以便能用于更复杂的几何观测形式和变背景速度的情况。这些扩展，通过高频渐近方法可以实现。

1. Born 近似积分方程的渐近反演

根据上一节的散射场的 Born 近似积分方程(6.4.16)，有

$$u_s(x_g,x_s,\omega)=\omega^2\iiint_D\frac{\alpha(x)}{c^2(x)}u_I(x,x_s,w)g(x_g,x,w)\mathrm{d}x^3\tag{6.4.51}$$

我们假定震源和接收点位于某个表面(地面)，这个表面不一定是水平面，它可以用矢量 $\xi(\xi_1,\xi_2)$来表示，而 ξ_1 和 ξ_2 又可以是(x_1,x_2,x_3)的函数。对共炮点道集来说，可用 $x_s=\text{const}$ 和 $x_g=x_g(\xi)$来表示。对共接收点来说，表示形式相反。共炮检距道集用 $f(\xi)$表示地面。炮检距在 ξ 的座标中用矢量 $h=(h_1,h_2)$表示。h_1 和 h_2 也是(x_1,x_2,x_3)的函数。最后，令 $x_s(\xi)=f(\xi-h)$和 $x_g(\xi)=f(\xi+h)$。如果表示地面的 f 不是平的，则选择常矢量 h 不构成一个常量的 x_s 和 x_g 间的常炮检距。$h=0$ 时为零炮检距情况。

如果入射场 u_I 表示为

$$u_I(x,x_s,\omega)=F(\omega)g(x,x_s,\omega)\tag{6.4.52}$$

则(6.4.51)式表示为两个 green 函数的积分，即

$$u_s(x_g,x_s,\omega)=\omega^2F(\omega)\iiint_D\frac{d(x)}{C^2(x)}\mathrm{g}(x,x_s,w)\mathrm{g}(x_g,x,\omega)\mathrm{d}x^3\tag{6.4.53}$$

我们对 green 函数做高频渐近替代，即将它用 WKBJ Green 函数代替。即取如下近似式

$$\mathrm{g}(x,x_0,\omega)\sim A(x,x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau(x,x_0)}$$

式中　τ 是从 x_0 到 x 的旅行时；

$A(x,x_0)$是高频近似(射线理论)振幅。

它们是由程函方程

$$\nabla\tau\cdot\nabla\tau=\frac{1}{c^2(x)}\qquad \tau(x_0,x_0)=0 \tag{6.4.54}$$

输运方程

$$2\nabla\tau\cdot\nabla A+A\nabla^2\tau=0 \tag{6.4.55}$$

其条件为

$$4\pi A|x-x_0|\to 1,\ 当|x-x_0|\to 0 时 \tag{6.4.56}$$

将 WKBJ Green 函数代入(6.4.53)式,得求得的。

$$u_s(x_g,x_s,\omega)\approx\omega^2F(\omega)\iiint dx^3\frac{\alpha(x)}{c^2(x)}a(x,\xi)e^{i\omega\phi(x,\xi)} \tag{6.4.57}$$

式中

$$\phi(x,\xi)=\tau(x,x_g(\xi))+\tau(x_g(\xi),x) \tag{6.4.58a}$$

$$a(x,\xi)=A(x,x_s(\xi))A(x_g(\xi),x) \tag{6.4.58b}$$

对于标量波动方程来说,算子是自伴的。其它波动算子(如变密度声波算子)是非自伴的。(6.4.57)式具有特殊结构。在此非自伴问题上,只有振幅因子是渐近的。可以做为一般反演公式。

类似前面的反演,我们建立的摄动量的反演公式,应当有下列形式:

$$\alpha(y)=\int d\omega\int d\xi^2B(y,\xi)e^{-i\omega\phi(y,z)}u_s(x_g,x_s,\omega) \tag{6.4.59}$$

式中,核 $B(y,\xi)$是要求出的。

有三种解法解此反问题[Cohen 等 1985, Sullivan 等 1987, Beylkin1985]。现在将(6.4.57)式代入(6.4.59)式

$$\alpha(y)=\int\omega^2F(\omega)d\omega\iint d\xi^2B(y,\xi)\iiint dx^3e^{i\omega\{x,\xi)-\phi(y,\xi)\}} \tag{6.4.60}$$

式中 $c(x,\xi)=a(x,\xi)/c_0(x)$。

上式是 $\alpha(x)$乘某个核函数的三重积分。此核函数在某种近似下,应当具有狄拉克–狄尔塔函数 $\delta(y-x)$的移动性质

$$\alpha(y)\approx\iiint dx^3\delta(x-y)\alpha(x)$$

和

$$\delta(x-y)\approx\int\omega^2F(\omega)d\omega\iint d\xi^2B(y,\xi)C(x,\xi)\exp i\omega\{\phi(x,\xi)-\phi(y,\xi)\} \tag{6.4.62}$$

实际上我们关心的是,$y=x$ 附近的振幅函数 $c(x,\xi)$和相位函数 $i\omega\{\varphi(x,\xi)-\varphi(y,\xi)\}$。因此,振幅函数可用 Taylor 级数第一项来近似

$$c(x,\xi)\approx C(y,\xi)$$

相位差用下面近似式表示

$$\phi(x,\xi)-\phi(y,\xi)\approx\nabla_x\phi(x,\xi)|_{x=y}(x-y)$$

根据上式可得

$$i\omega\{\phi(x,\xi\}-\phi(y,\xi)\}\approx ik(x-y) \tag{6.4.63}$$

这里,将 $\omega\Delta\phi$ 解释为波矢量 k,表式为

$$k \equiv \omega \nabla_y \phi(y,\xi) \equiv \omega \nabla_x \phi(x,\xi)|_{x=y} \tag{6.4.64}$$

这个公式定义了积分的变量从(ω,ξ)变到 k,用此新变量可将(6.4.62)式表示成

$$\delta(x-y) \approx \iiint \mathrm{d}k^3 B(y,\xi)\omega^2(k)F(\omega(k))\frac{a(y,\xi)}{c^2(y)} \times a(y)\left|\frac{\partial(\omega,\xi)}{\partial(k)}\right| \mathrm{e}^{ik(x-y)} \tag{6.4.65}$$

函数 $\omega(k)$经过(6,4,64)式定义为

$$\omega(k) = \frac{k \cdot \nabla_y \phi(y,\xi)}{|\nabla_y \phi(y,\xi)|^2} \tag{6.4.66}$$

很容易计算(6.4.65)式中的 Jacobian 矩阵的倒数 $\partial(k)/\partial(\omega,\xi)$。这样做可充分地从(6,4,64)式中对 k 的定义直接计算出必须的导数。其结果为

$$\frac{\partial(k)}{\partial(\omega,\xi)} = \omega^2 h(y,\xi) \tag{6.4.67}$$

$$h(y,\xi) = \det\begin{bmatrix} \nabla_y \phi(y,\xi) \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1}\nabla_y \phi(y,\xi) \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_2}\nabla_y \phi(y,\xi) \end{bmatrix}$$

因此,$\omega^2\partial(\omega\xi)/\partial(k)$只是 y 和 ξ 的函数。(6.4.65)式的右端是正向和反向傅立叶变换,但有两个例外。第一,从(6.4.65)看出,ξ 是在$K/k=\hat{k}$ 中的两个独立变量的函数,因为

$$\hat{K} = \mathrm{sgn}(\omega)\nabla_y \phi(y,\xi)/|\nabla_y \phi(y,\xi)|$$

是与$|\omega|$的选择无关的两个变量有关。这样,$a(y,\xi)$与 $\hat{k}$ 和 x 有关。第二,被积函数的振幅也与 y 有关。进而,如果 $F(\omega)$不全等于 1, 这不可能是一个精确的反变换。我们希望这个积分是一个直接渐近的反变换。所以我们提出一个弱化的问题:使 $F(\omega)=1$,则全部被积函数应当变为 $1/[2\pi]^3$。即

$$\frac{B(y,\xi)a(y,\xi)}{|h(y,\xi)|C^2(y)} = \frac{1}{8\pi^3},$$

使

$$B(y,\xi) = \frac{1}{8\pi^3}\frac{|h(y,\xi)|C^2(y)}{a(y,\xi)} \tag{6.4.68}$$

将此值代入(6.4.59)式,得到用观测数据求波速摄动的高频反演式为

$$\alpha(y) = \frac{1}{8\pi^3}\iint \mathrm{d}\xi^2 \frac{|h(y,\xi)|C^2(y)}{a(y,\xi)}\int \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-i\omega\phi(y,\xi}u_s(x_g,x_s,\omega) \tag{6.4.69}$$

现在说明一下,(6.4.64)中的傅立叶波矢量 k 为频率和与特定震-检几何关系有关的梯度矢量的函数。为了与大家更熟悉的等价式联系起来,说明在背景场值和零炮检距反演时(6.4.58)式中的旅行时之和正好是两倍旅行时,$2r/c_0 = 2|y-x_s|/c_0$,因而有 $k=2\omega r/c_0$。这实际上也是稳相法求出的结果。在此情况下 $\omega(k)$变为 ω。(6.4.57)式中的行列式 $h(y,\xi)$是定义源-检几何关系,应当是有限和非零的。对任意源-检几何和背景速度,用此行列式项进行,空间加权是 Beylkin 对高频反演的贡献[*Beylkin*, 1985],故称为 Beylkin 行列式。

2. *反射率函数的反演*

摄动函数 $\alpha(y)$假定是分块平滑,且其不连续性面表示反射面。由于数据必须假设是带宽和孔径是有限的,因此 $\alpha(x)$必定产生有限带宽和有限孔径的阶耀函数。后者的过零点对应反射界面位置,这很难被表现出来。因此要修正(6.4.65)方程转换用于反射率函数 $\beta(y)$,使反射界面用有限带宽和有限孔径的脉冲来描述。 和在上一节采用的手段一样,修正(6.4.65)是用一个对称滤波器 $ik = i\omega|\nabla_y\phi(y,\xi)|$。如此,我们从(6.4.59)式求得第一次的反射率函数为

$$\tilde{\beta}(y) = \iint d\xi^2 B(y,\xi)|\nabla_y\phi(y,\xi)|\int i\omega d\omega e^{-i\omega\phi(y,\xi)} \times u_s(x_g,x_s,\omega) \tag{6.4.70}$$

和前面常背景值情况所述相似,我们期望得到一个用某种有限带宽的奇异函数标定反射面,这个函数与反射系数成正比。在常速背景值和零炮检距反演中是将反射系数乘上奇异函数的结果用除4来实现的。在当前情况下,可以证明正确的除项应当是 $c^2(y)|\nabla_y\phi(y,\xi)|^2$,它在零炮检距时会变成4的数。这样,我们利用(6.4.68)式和(6.4.70)式和这个新除项,得到新的反演公式为

$$\beta(y) = \frac{1}{8\pi^2}\iint d\xi^2 \frac{|h(y,\xi)|}{\alpha(y,\xi)|\nabla_y\phi(y,\xi)|}\int i\omega d\omega e^{-i\omega\phi(y,\xi)} u_s(x_g,x_s,\omega) \tag{6.4.71}$$

关于上式的详细推导,有兴趣的读者,可查阅有关文献[Beylkin,1985; Bleistein,1988]。如果能够保持求出的反射率函数与散射波振幅的比例关系, 则可根据此反射率函数求出相应的波阻抗剖面。

6.5 数据拟合法非线性参数反演

地球物理场主要是在地面进行观测的,这些观测值的集合组成某种空间,常称为数据空间,用 $d=\{d_i\}$表示。这些观测数据可以是地震记录、电磁场、重力场、磁力场、热流值或其它可测的物理量。这些物理量是由物理介质本身的性质和场源的特性决定的。这些性质和特性可用一组参数来表征,它们组成物体的参数集合,可代表该物体的空间存在,是物体的某种物理模型,故称参数集合为模型空间,用 $m=\{m_\alpha\}$表示。数据空间和模型空间可以是一维、二维和三维的, 有时也可用任意高维表述。

如果模型空间 M 和数据空间 D 的映射是线性的,则可通过一个线性算子 G 把二者联系起来

$$d = Gm$$

如果 G 是一个可逆的算子,则可表示出反关系

$$m = G^{-1}d$$

如果模型空间与数据空间并非一一映射的,即它们之间是非线性的,上面的表述就不满足。因此一般的关系式为

$$d = f(m)$$

和反关系式为

$$m = g(d)$$

拟合法的基本思想[Tarantola, 1987],是用先验的模型参数 m,再用观测数据满足的微分方程计算出一种理论数据 d,将此数据与实测数据 d_0 去比较,研究其误差 E,通过修正先验给出的模型参数 m,使 E 在某种最佳意义下为最小为止。这时所取的模型参数即为我们要求解的反演结果。当然,这样的问题,一般都是非线性的。非线性问题可以通过线性化求解,但是解的真实性常常是可信度不高的,特别是在先验知识不能较好预测的情况下,反演结果是危险的。关于一维情况下的拟合反演的线性化问题已经在 6.1 节中被应用过。在此不再详叙。

6.5.1 正问题

关于地球物理正演在本书的第 2 章中有详细的论述。为了便于对反问题进行讨论,在此对正问题做原则性的叙述。

我们以声波方程为例,讨论其正问题。该方程表示为

$$\left[\frac{1}{k(r)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho(r)}\mathrm{grad}\right)\right]u(r,t)=S(r,t) \tag{6.5.5}$$

式中 $S(r,t)$ 为声波源;

$u(r,t)$ 为波场强度的函数;

k 和 ρ 为介质的物性参数,即弹性模量和密度。

为了简化表示,我们知道 u 是 K,ρ 和 S 的函数,因此(6,5,5)式的解可写为

$$u=f(k,\rho,S)$$

式中 f 为非线性函数。

实际上可用任何数值方法进行正问题求解,模拟相应的地震波场。为了解析地研究正问题的解,我们引进格林函数 $g(r,t)$,它是下述方程的解

$$\left[\frac{1}{k(r)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho(r)}\mathrm{grad}\right)\right]g(r,t;r',t')=\delta(r-r')\delta(-t') \tag{6.5.7}$$

因此,上述的解可表示为

$$u(r,t)=\int\mathrm{d}r'\int\mathrm{d}t'g(r,t;r',t')s(r',t') \tag{6.5.8}$$

式中 r' 和 t' 表示震源的位置和起始时间。

由于 k 和 ρ 与时间无关,因此格林函数可做时间移动,有

$$g(r,t;r',t')=g(r,0;r',t'-t) \tag{6.5.9}$$

所以(6.5.8)式又可写为

$$u(r,t)=\int\mathrm{d}r'g(r,t;r',0)*S(r',t) \tag{6.5.10}$$

由于震源为空间点源,并令 $r'=r_s$,表示震源位置,则源函数为

$$S(r,t)=\delta(r-r_s)S(t)$$

所以 $u(r,t;r_s)$ 可表示为

$$u(r,t;r_s)=g(r,t;r_s,0)*S(t) \tag{6.5.11}$$

式中 $*$ 表示为褶积分。

简化正问题解的表示为

$$u=f(k,\rho,S) \tag{6.5.12}$$

令 $r=r_g$ 表示检波器位置,用 $u(r_g,t;r_s)$表示地震记录的理论值。

现在,我们对数据集信息进行一些分析。由于观测数据总是有误差的。假设数据分布的概率密度是高斯型的,则数据间和误差间的相关值常用协方差算子表述。最常用的协方差算子 C_u 取为

$$C_u(r_g,t;r_s|r_g',t';r_s')=\sigma_{gs}^2\delta_{gg'}\delta_{tt'}\delta_{ss'} \tag{6.5.13}$$

式中 σ_{gs}^2 表示为第 g 个检波器和第 s 个炮点的地震记录中的估计误差。

如果模型参数的先验信息的概率密度也是高斯的,则它们的协方差表示为

$$\begin{cases} C^{KK}(r,r')=\sigma_k^2\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x-x')^2+(y-y')^2+(2-2')^2}{L^2}\right]\right\} \\ C(r,r')=\sigma_\rho^2\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x-x')^2+(y-y')^2+(2-2')^2}{L^2}\right]\right\} \\ C_{SS}(r,r')=\sigma_S^2\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\ \dfrac{t-t'}{T^2}\right\} \\ C_{k\rho}(r,r')=0,C_{PS}(r,t')=0,C_{SK}(t,r')=0 \end{cases} \tag{6.5.14}$$

式中 σ 表示偏差,即真值与先验值的偏差;

L 为相关距离或长度;

T 是震源的误差的相关时间长度。

设模型的参数向量为

$$m=\begin{bmatrix} K \\ \rho \\ S \end{bmatrix} \tag{6.5.15}$$

模型的先验信息为

$$m_0=\begin{bmatrix} k_0 \\ \rho_0 \\ S_0 \end{bmatrix}$$

因而,模型的先验信息的协方差算子为

$$c_m=\begin{bmatrix} C_{kk} & & 0 \\ & C_{pp} & \\ 0 & & C_sS \end{bmatrix} \tag{6.5.16}$$

6.5.2 反问题

我们已知正问题的解简化表示为

$$u=f(m) \tag{6.5.17}$$

我们给出模型的先验向量 m_0,并认为实测值是此先验模型向量 m_0 产生的。因此,反问题的提法是,要找到一对 u 和 m,它们满足(6.5.17)式,并且与已知的 u_0 和 m_0 的空间距离最近。也就是说要找到这样的(u,m)点,它和(u_0,m_0)点间的距离为最小,这个距离由 L_2 范数定义为

$$\| (u,m) \|^2 = \| u \|^2 + \| m \|^2 = u^* C_u^{-1} + m^* C_m^{-1} m$$

式中 $*$ 表示共轭；

C_u 为数据的协方差；

C_m 为参数的协方差。

令 $\tilde{u} = C_u^{-1}u, \tilde{m} = C_m^{-1}m$，则相应地表示出

$$u * \tilde{u} = u * C_u^{-1}u = \sum_g \sum_t \sum_S u(r_s, t; r_s)\tilde{u}(r_g, t; r_s)$$

和

$$m^* \tilde{m} = m^* C_m^{-1}m = \int \mathrm{d}rk(r)k(r) + \int \mathrm{d}r(\rho)\rho(r) + \int \mathrm{d}ts(t)S(t)$$

因此，非线性反问题就是通过使

$$(u_0 - u)^* C_u^{-1}(u_0 - u) + (m_0 - m)^* C_m^{-1}(m_0 - m) = \min$$

寻找出满足 $u = f(m)$ 的 u 和 m 对。这相当于使目标泛函

$$S(m) = [u - f(m)]^* C_u^{-1}[u_0 - f(m)] + (m_0 - m)^* C_m^{-1}(m_0 - m) \tag{6.5.18}$$

为最小

式中 C_u 是数据的协方差矩阵，它反映数据质量的好坏，表现数据

C_m 是模型参数的协方差矩阵，它表现反演结果的分辨率，故也称模型的分辨率矩阵，当 C_m 是对角矩阵时，模型的分辨率为最高。

这样的目标泛函是非线性的。解这种问题的方法，有线性迭代法，简单穷举法，非线性迭代法，模拟退火法和生物基因算法等。其中线性迭代法在问题的非线性很强时不合适，而且算法在多个极性情况下，对初值的依赖性很强。另外，算法本身不健全，抗噪能力差。因此，在多维反演中不常使用。简单穷举法在实用中几乎是不可行的，因为计算工作量是无限大的。目前常用的方法是非线性迭代法，该方法是在梯度的导引下求目标函数的最小值，算法精度高，但是，如果初值选择不合适，也会陷人局部极值，得不到最优的结果。因此，人们用模拟金属自然冷却而结晶过程的模拟退火法和生物进化过程的基因算法来克服非线性迭代解法有陷人局部极值的缺点，实现探求目标函数全局极值，解出真实的模型参数。后两种算法都很强健，不依赖于初始值，同时较少受噪音的影响。下面概述这三种方法及其计算结果。

6.5.3 非线性求解方法

1. 非线性迭代法

用(6.5.18)式可以稳健地求解，数据的充分度对它影响不大，随着数据的增加，m_0 对最终模型求解的影响趋于零。当然这是在目标函数为凸函数的情况下是正确的，解也是真的。

求解上述最优化问题，需引入一个线性算子 F，F 是 f 在 m 点的导数：

$$f(m + \delta m) = f(m) + F\delta m + 0(\| \delta m \|^2) \tag{6.5.19}$$

令 $\partial S/\partial m = 0$，有

$$-\mathrm{grad}S = C_m F^{\mathrm{T}} C_m^{-1}[u_0 - f(m)] + (m_0 - m) \tag{6.5.20}$$

因此有如下的迭代求解公式：

$$\begin{aligned} m_{KH} &= m_k - \alpha(\mathrm{grad}S)_k \\ &= m_k + \alpha\{C_m F^{\mathrm{T}} C^{-1} u[u_0 - f(m_k)] - (m_0 - m_k)\} \end{aligned} \tag{6.5.21}$$

α 为迭代步长，可以取常数，但一般应随迭代次数增加而变短。迭代公式(6.5.21)中的

$$C_m F^T C_u^{-1}[u_0 - f(m_k)] + (m_0 - m)$$

相当于梯度，此处梯度的求解思想是：首先正演求解 $f(m_k)$，然后把波场余量 $[u_0 - f(m_k)]$ 逆时反传播，最后把反传波场与正传波场作相关，就得到空间每一点的波场相对于参数的变化量(即梯度)。有了梯度，可以利用最优化技术中的很多方法求解，如最速下降法，拟牛顿法，变尺度法，共轭梯度法等。这些方法之间的优劣只应响计算效率及收敛情况，不涉及非线性迭代算法的本质。

用共轭梯度法对一维反射地震数据进行了反演速度的计算，结果如图 6.5.1 所示

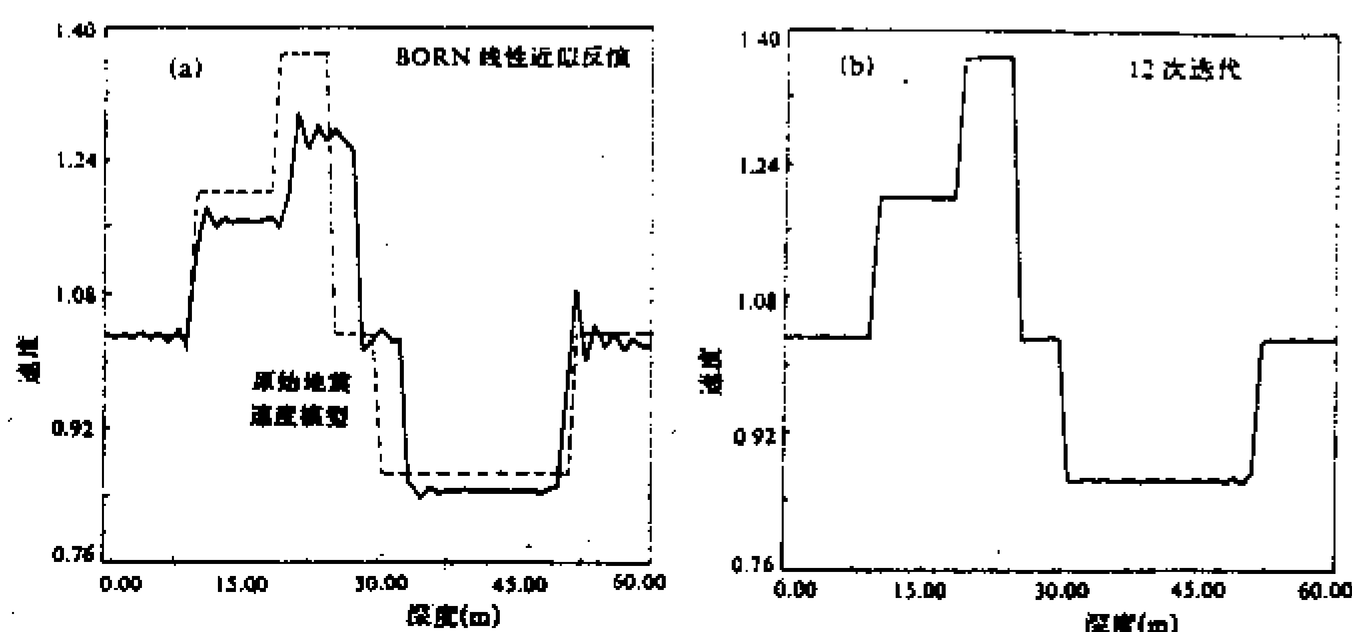


图 6.5.1 用共轭梯度法对一维反射地震数据进行的反演速度计算。

(a) 图中虚线是原始地层速度模型，实线是用 Born 线性化近似计算(反演)的结果；

(b) 是共轭梯度法非线性迭代反演的地层模型(12 次迭代的结果)，可以看出与原型几乎一致，而 Born 方法的结果误差甚大

2、模拟退火法

模拟退火法是模拟物理上熔融金属的逐渐冷却而结晶的过程，属于一种非线性寻优方法。在勘探地震学的非线性反演中，已知观测数据 d_0，需在模型空间 X 中找到一个模型 x，它在数据空间 D 中对应一个正演合成数据 $d = G(m)$，G 是正演算子，当 d 与 d_0 之间的"距离"在模型空间中全局最小时，x 就是反演结果。由于模型空间非常之巨，简单枚举法不可能用于反演实际。

因此在 Bayes 理论的基础上，提出在模型先验概率的控制下，求后验概率的最大值，使后验概率最大的模型就是要求的结果。利用模型先验概率，可以让我们只在模型先验概率大的部分模型空间中搜索，从而大大提高了枚举法的效率。这就是模拟推火法在勘探地震学非线性反演中应用的基本思想。

在模型空间中随机搜索最优模型参数的过程可以认为是一个 Markov 过程，随机搜索过程必须受制于 Markov 过程的概率分布。因此 Markov 过程的概率分布即所需的先验概率分布。

所有的 Markov 随机场都表现为 Gibbs 概率分布，所有的 Gibbs 分布也都定义了一个 Markov 过程。可以证明：Gibbs 分布是 Markov 随机场的稳态概率分布。从而可知 Gibbs 分布

为我们提供了先验概率分布的表达式：

$$P(M=m)=\frac{1}{Z}\exp\left[\frac{-E(m)}{T}\right]$$

式中　$E(m)=-\sum\phi_{Aij}(x)$ 是能量，$\phi_{Aij}(x)$是局部势函数；

T 是温度；

Z 为波尔兹曼常数。

从 Bayes 公式出发可以导出后验概率公式：

$$P(M=m\mid D=d\mid)=\frac{1}{Z}\exp\left[-\frac{E(m,d)}{T}\right] \tag{6.5.22}$$

式中　$E(m,d)=E(m)+(T/2)(\|d-G(m)\|_p/\delta)^p$。

在实用地震学中，具体的后验概率可取为：

$$P(m_{ij})=\frac{\exp(-E(m_{ij})/T}{\sum_{j=1}^{M}\exp(-E(m_{ij})/T)} \tag{6.5.23}$$

式中　E 用来衡量 d 与 d_0 之间的“距离”；

$i(1\leqslant i\leqslant N)$ 表示模型中有 N 个参数；

$j(1\leqslant j\leqslant M)$ 表示每个参数有 M 个可能的取值；

T 是温度参数。

在实用中，E 一般取规格化互相关函数

$$E=-\frac{1}{N_P}\sum_{1}^{N_P}\frac{d_0\otimes d_c}{(d_0\otimes d_0)^{1/2}(d_c\otimes d_c)^{1/2}}$$

式中　$\otimes$代表相关，d_0 为观测是数据，d_c 为正演数据。

E 或取失配函数

$$E=\sum_{i=1}^{N}(d_{c_i}-d_{0i})^2$$

实际反演过程是，在每个状态 m_{ij}固定 i，j 从 1 变化到 N，摄动修改第 i 个参数，然后计算 $P(m_{ij})$。若 $\Delta E>0$ 则放弃摄动修改；若 $\Delta E\leqslant 0$，则当 $P(m_{ij})\geqslant\alpha$（α 为一选定的门槛值），就接受修改，否则放弃修改值，维持上一个状态的值，接着变化 i 值，重复上述过程，直到 $i=N$，该状态搜索结束，进入下一个状态，这些随机变化的状态构成一个 Markov 链，随温度的逐渐下降，Markov 链会收敛到一个平衡状态，此时后验概率达到最大，最后状态对应的模型就是反演的结果。图 6.5.2 表明了这个过程。

模拟退火法仍然存在一些问题：①冷却过程的温度难以控制，起始温度不易选择。② Markov 过程的前后状态间有比较强的依赖性，尤其门槛率值取低的时候，这样算法在模型空间中搜索的效应会受影响。

3. 生物基因算法

生物基因算法模拟了生物进化的优胜劣汰的过程，也是一种非线性寻优算法。它的基本思想是：在模型空间中随机地选择一个初始族。按一定的规则选择两个模型作父本，把父本模型参数二进制化，进行杂交。把子本性状与父本性状相比较，性状差者舍弃；性状优于父本，按一定概率保留。如此进行一代代地优化。优化过程中，还需按一定概率施加变异算子于随机选择的模型上。最终可得到一族最优解，其中包括的某些模型对应目标函数的全

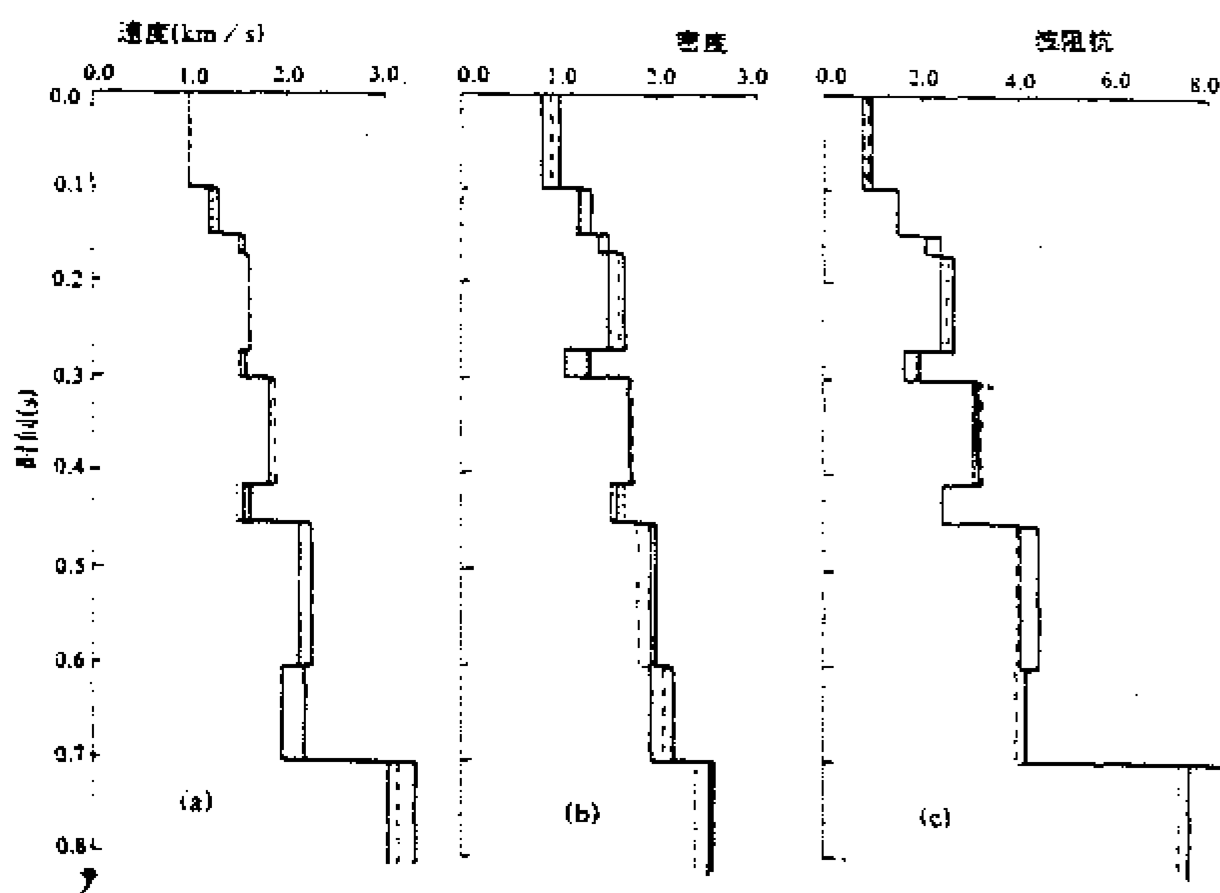


图 6.5.2 模拟退火法的反演结果

(a)为速度反演结果;

(b)为密度反演结果;

(c)为波阻抗(速度与密度的乘积)反演结果

(图中的粗实线代表原始模型,细实线和虚线分别是根据加噪 30% 和 10% 的记录反演的结果,由图同样可以看出,模拟退火法的抗噪能力较强)

局最小(或最大)值,它不依赖于初始值,而且可以在模型空间中随机地大跨度搜索,避免落入局部极值。它是一种比较好的非线性寻优算法。

生物基因算法由三个基本算子组成:选择算子,杂交算子和变异算子。

选择算子:按选择概率 $P_{si}=E(m_i)/\sum E(m_j)$ 在模型族中随机地选择两个模型作父本。它保证选择的父本在选择概率的限制下是较优的。选择概率大,性状好的父本配对的机会大,算法在模型空间中搜索时定向性较强。一般地 P_s 取为 0.7~0.8 之间。

杂交算子:按杂交概率 P_x 控制配对的父本是否杂交。一般地,按掷骰子(十点骰子)的规则算出一种概率,若该概率大于杂交概率就进行杂交运算,否则不杂交。 杂交概率一般是在 0.85~0.95 之间,保证模型参数在模型空间中有较多的变化。

变异算子:由于选择初始族时,族中模型参数的基因可能不包括使目标函数达到全局极小(或极大)值的染色体,因此,在代代进化的过程中,需施加变异算子,使新的染色体加入到族中某模型参数的基因中。这样可以使搜索过程不致于达不到全局最优。变异概率一般取 0.1 左右。

在实用地震学中,已知观测数据 d_0,在模型空间 M 中选择 m,m 在数据空间中对应一个正演数据 $d=G(m)$,定义归一化互相关函数

$$E=\frac{1}{N_p}\sum_{1}^{N_p}\frac{d_0\otimes d_c}{(d_0\otimes d_0)^{1/2}(d_c\otimes d_c)^{1/2}} \tag{6.5.24}$$

生物基因算法即寻找 m 使 E 在模型空间中达到全局最大。图 6.5.3 表示出生物基因解法

的反演结果。

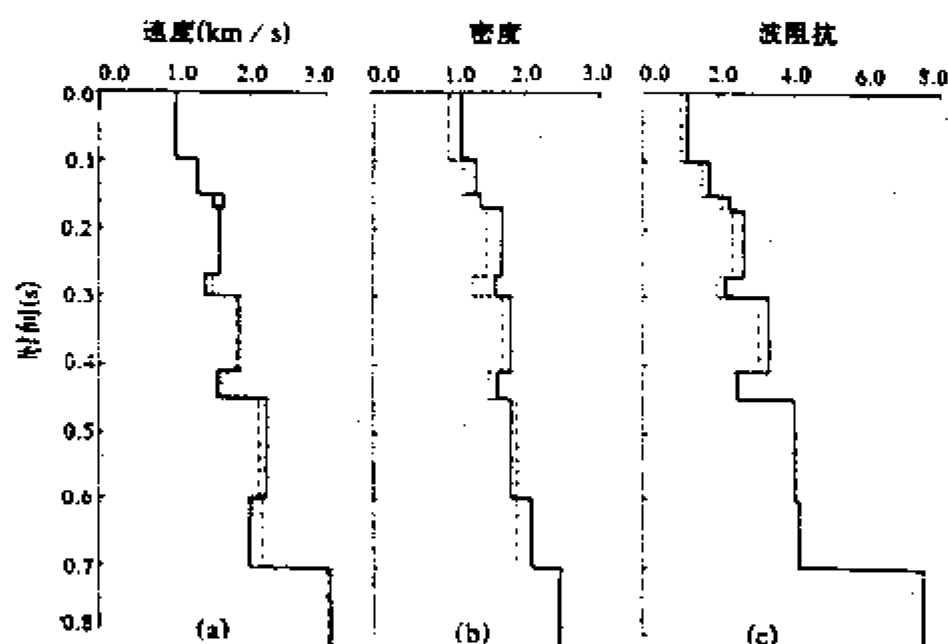


图 6.5.3 生物基因解法的反演结果。

(a) 为速度反演结果;

(b) 为密度反演结果;

(c) 为波阻抗反演结果

(图中的实线表示真实地层模型,虚线表示反演的地层模型)

反演结果图 6.5.3 显示出,反演结果与真实模型的差距不大,由此可见生物基因法是解决非线性波动方程反问题的一种可行方法。

生物基因算法也存在一些问题。一是算法没有规定明确的终止准则,迭代次数需试验确定。二是算法最终得到一族解。没有对解作出评价。我们认为,应考虑到数据 d 中的噪音分布,对解作出一定的估计。

地震数据反演的非线性方法目前还处于探索研究阶段,很少有用于实际数据处理的例子,其原因大致有如下几个方面:①用于模拟实际地震记录的正演模拟方法不够理想。其中包括地震源子波是未知的,它也是反演求解的内容。②反演的模型参数变化范围很大(即模型空间很大),解的非唯一性很强,不同的参数组合得到的正演结果相同,我们只能求一定意义下的最佳估计。③数据不完备。在层析成像中,观测角度太小;在非线性优化反演中,数据中缺乏低频成份,使我们很难得到介质参数的低频变化信息,同时,高频部分也损失很多,致使反演的分辨率达不到理想的程度。另外,噪音性质不明,因此很难评价解的分布特征,也难于找到一个很好的解的估计准则。这些因素都严重地制约着反演的分辨率。④单纯从数学上彻底解决不适定的和非线性的地震反问题,事实上是不太现实的。因此,必须充分利用各种先验信息,得到数学上最优,地质上合理的反演结果。但是如何合理地利用各种不同的先验信息也是十分棘手的问题。也还没得到很好地解决。(⑤地震反演计算工作量很大,目前性能最好的计算机也无法承受二维地震反演的巨大计算量,三维地震反演就更不用讲了。

当前和今后一段时期理论研究工作还要继续。一是计算方法问题,如何寻找更高效的非线性反演算法。二是向更复杂的数学模型扩展。这里介绍的仅限于单一波型,即只讨论标量波(声波)的非线性反演问题。对于以弹性波为基础的多波多分量地震数据的非线性反

演还远未得到充分的发展,多相介质、各向异性和随机地球介质的非线性反演问题还没提上研究日程。

总之,问题很多,难度很大,但一朝突破,将在地学研究中引起深刻的影响,同时也会促进其他相关学科领域的发展。

第6章参考文献

1. 马在田,王华忠. 地震数据反演中的非线性问题. 自然杂志,17(2) 78—86,1995
2. 刘家琦,刘克要. 微分方程反演波阻抗剖为. 地球学报,37(1),101—107,1994
3. 宋海斌,马在田,张关泉. 利用平为波地震记录同时反演层状介质纵、横波速度. 中国科学 D辑,26(3),282—288,1996
4. 宋海斌,马在田,张关泉. 层状弹性介层三参数同时反演,石油地球物理勘探,31(1),1—7,1996
5. 宋海赋,马在田,张关泉. 层状横向各向间同性介反质反问题初探. 地球物理学报,40(1),105—119,1997
6. 宋海斌. 层状 EDA 介质反问题初探. 枫林学苑,214—218,同济大学出版社,1996
7. 张关泉,屠浩敏. 平为弹性波耦合方程组的波阻抗反演,地球物理学报,39(3),1996
8. 张关泉,一维波动方程的反演问题. 中国科学 A辑 18,707—721,1988
9. 张关泉,马在田. 地球物理反演若干问题的讨论. 地球物理学报,33(专辑Ⅱ)1—4,1990
10. 栾文贵. 地球物理中的反问题,科学出版社,北京,1989
11. 李幼铭. 从矢量波动方程出发反演层状地球结构的方法. 地球物理学报,33(专辑Ⅱ),19—29,1990
12. Bleistein, N., Cohen, J.K., and Hagin, F.G., 1985, Computational and asymptotic aspects of velocity inversion: Geophysics, vol.50 1253—1265
13. Bleistein, N, Coheu, J,K., and Hagiu, F.G., 1987 Two-and-one-half dimensional Born inversion with an arbitrary reference: Geophysics, vol5,2,26—36
14. Cohen, J.K., and Hagin, F.G., 1985, Velocity in-Version using a stratified reference: Geophysics, vol50, 1689—1700
15. Cohen, J.K., Hagin, F., Bleistein, N., 1986, Three-dimen-sional born inversion with an arbitrary referance: Geophysics, vol50, 1552—1558
16. Dong, W., Emanuel, M.J., Bording, P., and Bleistein, N., A computer implementation of 2.5—D common-shot inrersion, val56 p1384—1394
17. Sullivan, M.F., and Cohen, J,K., 1987, Prestack Kirchhoff inrersion of common-offset data: Geophysics, vol52, 745—754
18. Carazzone, J.J., Inversian of P-SV seismic data, Geophysics vol51, 1056—1068, 1986
19. Yagle, A.E., and Levy, B.C., A layer-stripping Solution of the inverse problem for one-dimen sional elastic medium, Geophysics, vol50 425—433
20. Song Haibin, Ma Aaitian, Zhang Guanquan, Finite band-Width simultaneous inversion of three parameters in stratified elastic media, 65th Ann. Internat. Mtg., Soc Expl. Geophys., Expomded Abstracts, 643—646, 1995.
21. Song Haibin, Ma Zaition, Zhamg Guanquan, A primarg Study on an inverse problem for stratified tromsversely isotropic media, Acta Geoplysica siuica 40(1), 1997.
22. Bube, K.P., and Burridge, R., The one-dimensional inverse problem of reflection seismalogy, SIAM Review, 25,

497—559, 1983

23. Berryman J.G., and Greene, R.R., Discrete inverse for elastic waves in legered media, Geophysics, 45, 213—233, 1980

24. Romonov, V.G., Inverse problems of mathematical physics, VNU Science Press. Urtrecht, 1987

第7章 地球物理层析成像

7.1 概述

层析的英文词是 tomography,此字源于西腊语的 tomos 本意是断面或切片,所以层析成像就是依据在物体外部观测到的数据(其物理意义一般是沿具有某物理性质的路径的积分),建立起物体截面的图像,这也是一种无损探测成像技术。医学上的 X-射线 CT(Computer Tomography)就是一种层析成像。地球物理层析成像则是研究如何利用地震波、电磁波或其他场的数据对地球内部成像。

地球物理层析可以分为两大类,一类是以射线为基础的图象重建方法,一类是以波动方程为基础的衍射成像方法。目前虽然 X-射线 CT 已成为很成熟的成像技术,但地球物理层析成像无论在理论上及技术上还处在发展之中,特别在技术上距离实际应用还有不小距离。这里只在基础理论和测验方面作一简单的介绍。

7.2 射线理论层析成像

为了研究地球内部的构造,我们在地面发射地震波,利用在地面或井中接收的数据来推断地层的速度分布及构造。虽然这是地球物理中的基本问题,但又具有一定的普遍性,因为许多其他物理、天文、X-射线成像问题、工程问题都可归结为这种模式。现以2维空间为例来讨论这个问题,设 $v(x,y)$为一速度场,$t(P_1,P_2)$为波从 P_1 点旅行到 P_2 点的旅行时,那么则有

$$t(P_1,P_2)=\int_{L(P_1,P_2)} n(x,y)\mathrm{d}S \tag{7.2.1}$$

其中 $n(x,y)=\dfrac{1}{v(x,y)}$,叫做慢度,$L(P_1,P_2)$是连接 P_1 和 P_2 两点的射线。这样就化为这样的问题,即积分号内的 $n(x,y)$是否可由任意两点间的 $t(P_1,P_2)$反演出来,这是积分几何的一个特例(Lavrentiev,1982),这早在1917年已由 Radon 解决了(Gel'fand 等,1966)。

7.2.1 Radon 变换(RT)

下面我们以直射线为例,讨论 Radon 变换及 Radon 反变换。设 $f(x,y)$为平面上某区域的函数,L 为一直线,则 $f(x,y)$的 Radon 变换定义为

$$\hat{f}(p,\phi)=\int_L f(x,y)\mathrm{d}S \tag{7.2.2}$$

这是 $f(x,y)$沿直线 L 的线积分,直线 L 的法线式方程为

$$p=x\cos\phi+y\sin\phi \tag{7.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x,y)=(r,\theta)$,$\phi$ 为 y 轴与 L 的夹角或 x 轴与 L 的单位法线 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的夹角,p 是坐标原

点到 L 的距离(见图 7.2.1)。在式(7.2.2)中,$f(x,y)$叫做模型,$\hat{f}(p,\phi)$叫做射影。Radon 变换是个线性变换,有着许多与 Fourier 变换相似的性质。

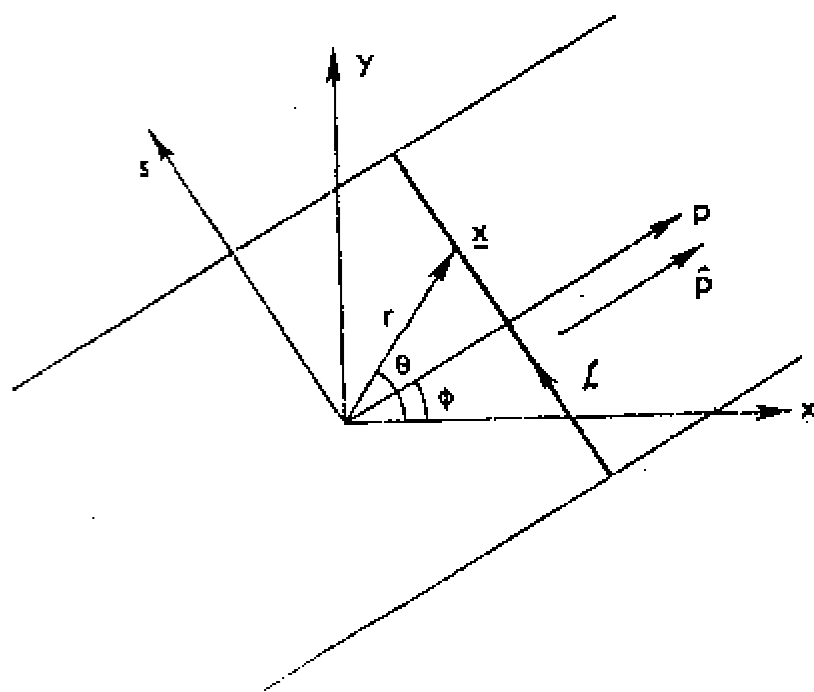


图 7.2.1 Radon 变换中,变量的几何关系。(x,y)是直角坐标,(r,θ)是极坐标,由投射角 ϕ 又定义了坐标(p,s)。积分是在 L 上沿 S 方向,最终给出关于(p,ϕ)的函数。

Radon 反变换有多种形式,我们首先给出 Chapman(1988)的一种。作如下的 2 维 Fourier 变换。

$$\tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x}) e^{-i2\pi R\cdot x} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x} \tag{7.2.4}$$

Fourier 反变换为

$$f(\boldsymbol{x}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i2\pi \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{k} \tag{7.2.5}$$

现在求 $\hat{f}(p,\phi)$的关于 p 的 1 维 Fourier 变换,则有

$$\tilde{\hat{f}}(k,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p,\phi) e^{-i2\pi pk} dp \tag{7.2.6}$$

Fourier 反变换则为

$$\hat{f}(p,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\hat{f}}(k,\phi) e^{i2\pi kp} dk \tag{7.2.7}$$

我们把 Radon 换变(7.2.2)叫做射影的原意是指 $f(\boldsymbol{x})$的面积分在一条直线上的投影,因此式(7.2.2)又可藉助于 Dirac 函数写为

$$\hat{f}(p,\phi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x}) \delta(p - \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{7.2.8}$$

其中 $\hat{p} = (\cos\phi, \sin\phi)$是 L 的单位法线,也是 p 轴上的单位向量。

对(7.2.8)式作关于 p 的 Fourier 变换,则得到

$$\tilde{\hat{f}}(k,\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\iint_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\delta(p-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i2\pi kp}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}p$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\int_{-\infty}^{\infty}\delta(p-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i2\pi kp}\mathrm{d}p\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{-i2\pi k\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{7.2.9}$$

最后一式实际上是 2 维的 $f(\boldsymbol{x})$的 Fourier 变换 $\tilde{f}(k\hat{\boldsymbol{p}})$，因此

$$\tilde{f}(k\hat{\boldsymbol{p}})=\tilde{\hat{f}}(k,\phi)\tag{7.2.10}$$

这样就建立了模型的 2 维 Fourier 变换和 *Radon* 变换的 1 维 Fourier 变换之间的关系。

令 $\boldsymbol{k}=k\hat{\boldsymbol{p}}$，由于 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 是一任意单位向量，因此 $\boldsymbol{k}$ 是一平面(或空间)，平面上的任一点可表示为(k,ϕ)，$-\infty<k<\infty$，$0\leqslant\varphi<\pi$。作式(7.2.9)的 Fourier 反变换，并利式(7.2.10)，得

$$f(\boldsymbol{x})=\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k\hat{\boldsymbol{p}})\mathrm{e}^{i2\pi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\tilde{\hat{f}}(k,\phi)\mathrm{e}^{i2\pi k\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}}|k|\mathrm{d}\phi\mathrm{d}k\tag{7.2.11}$$

这里所以要用$|k|$，是因为 $k\in(-\infty,\infty)$，与普通极坐标不同。

如令

$$\hat{f}^{*}(p,\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}|k|\tilde{\hat{f}}(k,\phi)\mathrm{e}^{i2\pi kp}\mathrm{d}k\tag{7.2.12}$$

其中 $p=\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}$，则

$$f(\boldsymbol{x})=\int_{0}^{\pi}\hat{f}^{*}(p,\phi)\mathrm{d}\phi\tag{7.2.13}$$

这就是 Radon 反变换的公式。

如果我们把式(7.2.12)看作是求$|k|$和 $\tilde{\hat{f}}(k,\phi)$之积的 Fourier 反变换的话，根据褶积定理，则有

$$\hat{f}^{*}(p,\phi)=-\frac{1}{2\pi2}\hat{f}(p,\phi)*\frac{1}{p^{2}}\tag{7.2.14}$$

(7.2.14)式右端作为运算符号的 *，表示褶积。右端的褶积是正则化的(Gel'fand and Shilov, 1964)。

从式(7.2.14)可以看出 $\hat{f}^{*}$ 是经对数据 $\hat{f}(p,\phi)$滤波而得到的，式(7.2.13)叫做反投影，它是对滤波后的数据对每个投射角 ϕ 沿射线方向投影，然后再对各个角度的投影进行积分。这个 Radon 反变换又叫做滤波反投影。

另一种常见的 Radon 反变换是这样给出的(Deans, 1985)首先求$|k|$的 Fourier 反变换

$$|k|=k\cdot\mathrm{sgn}k=2\pi ik\cdot\frac{\mathrm{sgn}k}{2\pi i}\tag{7.2.15}$$

其中 sgn 是符号函数

$$\mathrm{sgn}k=\begin{cases}1 & k>0\\0 & k=0\\-1 & k<0\end{cases}\tag{7.2.16}$$

为了书写方便我们用算子 F 表示 Fourier 变换，F^{-1}表示 Fourier 反变换，由式(7.2.15)有

$$F^{-1}\{|k|\} = F^{-1}\{2\pi \mathrm{i}k\} * F^{-1}\left\{\frac{\mathrm{sgn}k}{2\pi \mathrm{i}}\right\} \tag{7.2.17}$$

按 Fourier 变换关于导数的性质有

$$F\{\delta'(p)\} = 2\pi \mathrm{i}k \cdot F\{\delta(p)\} = 2\pi \mathrm{i}k \tag{7.2.18}$$

因而

$$F^{-1}\{2\pi \mathrm{i}k\} = \delta'(p) \tag{7.2.19}$$

另外已知

$$F\left\{\frac{1}{p}\right\} = -\mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}k \tag{7.2.20}$$

因此

$$F^{-1}\left\{\frac{\mathrm{sgn}k}{2\pi \mathrm{i}}\right\} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{p} \tag{7.2.21}$$

由式(7.2.21)及式(7.2.19)得

$$F^{-1}\{|k|\} = \delta'(p) * \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{p} \tag{7.2.22}$$

对式(7.2.12)应用褶积定理并利用等式(7.2.22)有

$$\begin{aligned} \hat{f}^*(p,\phi) &= F^{-1}\{|k|\} * F^{-1}\{\tilde{f}(k,\phi)\} \\ &= \hat{f}(p,\phi) * \delta'(p) * \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{p} \end{aligned} \tag{7.2.23}$$

又由于　　$f * g' = f' * g$ 得

$$\hat{f}(p,\phi) * \delta'(p) = \hat{f}_p(p,\phi) * \delta(p) = \hat{f}(p,\phi) \tag{7.2.24}$$

其中　$\hat{f}_p(p,\phi)$是 $\hat{f}(p,\phi)$关于 p 的导数，把(7.2.24)式代入(7.2.23)式再代入(7.2.13)式得

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \hat{f}_p(p,\phi) * \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{p} \tag{7.2.25}$$

其中　$p = \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{x}$，进一步写为褶积形式，则有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_t(t,\phi)}{t-p}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_t(p,\phi)}{t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{7.2.26}$$

(7.2.26)式右端积分号内的积分实际上是 Hilbert 变换，取 Cauchy 主值，和(7.2.14)一样，也是滤波后投影，首先是对数据求导，然后作 Hilbert 变换(也是一种滤波)，最后进行后投影。

以上是在 L 为直线的情况下得出的，但是实际上地震波传播的射线往往是曲线，因此我们还应研究 L 为曲线的 Radon 变换，就是广义 Radon 变换。我们在这里不作介绍有兴趣的读者可以参考李世雄的“计算机层析成像方法的基本概念与方法”(《应用地震层析成像》P.19—28))。

7.3　地球物理衍射层析

虽然地球物理层析与 X 射线层析有许多相似之处，但是它们之间还有许多差别，首先 X

射线的发射源及接收器可以自由转动，这样可以获取各种角度射线的投影数据；而地球物理层析的发射源及接收器只能在地面或井中，获得的射线投影数据的范围极为有限；第二是由于地球物理场的波长与地质体的比例较大，因而衍射和散射起着重要的作用。这样 X 射线中的直射线模型解决不了地球物理的层析问题，地球物理层析必须解决地质体对波场的衍射及散射问题。

7.3.1 衍射层析的数据分析

下面以 2 维声波为例讨论地球物理衍射层析的数学问题(Devaney, 1984)。设在一均匀各向同性介质的地层之中有一地质异常体(或地质构造)Ω，均匀地层的速度用 $C_0(w)$ 表示，地质异常用速度 $C(\boldsymbol{r},w)$ 来描述，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ 表示位置，$C_0(w)$ 与 $C(\boldsymbol{r},w)$ 的区别是 C_0 不随位置而变，而 C 是 $\boldsymbol{r}$ 的函数，当然它们都是圆频率 w 的函数(见图 7.3.1)。假设在 $x=l_0$ 处有一口井，在井中安放接收器，可以接收以 s_0 为单位向量的平面波产生的波场，我们的任务就是通过接收到(即测量到)的波形记录来反演出 $C(\boldsymbol{r},w)$。这里使用平面波主要是为了推导的方便。

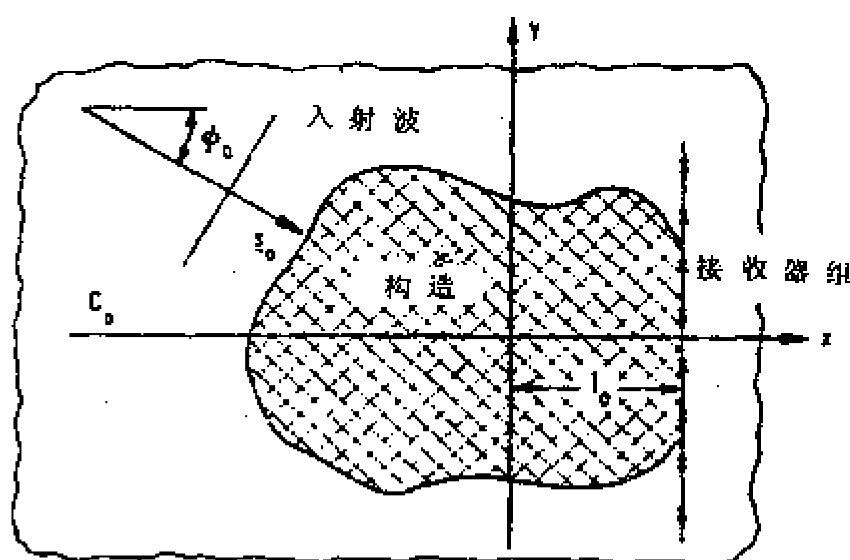


图 7.3.1 井间及 VSP 层析问题模型(Denvaney)

声波的波动方程为

$$\nabla^2 u=\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.3.1}$$

在频率域可写为

$$\left(\nabla^2+\frac{w^2}{C^2(\boldsymbol{r},w)}\right)U(\boldsymbol{r},w,\ s_0)=0 \tag{7.3.2}$$

其中 $U(\boldsymbol{r},w;s_0)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\boldsymbol{r},t,\ s_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}\mathrm{d}t$，为了方便研究，再作如下改写

$$\left(\nabla^2+\frac{w^2}{C_0^2(w)}\right)U(\boldsymbol{r},w,s_0)=\frac{w^2}{C_0^2(w)}\left(1-\frac{C_0^2(w)}{C^2(r,w)}\right)U(\boldsymbol{r},w,s_0) \tag{7.3.3}$$

或

$$(\nabla^2+k^2)U(\boldsymbol{r},w,s_0)=k^2O\boldsymbol{r},w)U(\boldsymbol{r},w,s_0) \tag{7.3.4}$$

其中 $k=w/C_0(\boldsymbol{r},w)$ 及

$$O(\boldsymbol{r},w)=1-\frac{C_0^2(w)}{C^2(\boldsymbol{r},w)} \tag{7.3.5}$$

$U(\boldsymbol{r},w_j s_0)$实际是波场的振,它除依赖 $\boldsymbol{r},w$ 之外,还依赖入射波的射线的方向 s_0。

方程(7.3.4)的解为

$$U(\boldsymbol{r},w_j;s_0)=U_0(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks_0\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}\frac{k^2}{4}\int_\Omega O(\boldsymbol{r}',w)U)\boldsymbol{r}'w;s_0)H_0(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.3.6}$$

其中 $H_0(k\boldsymbol{r})$是第一类零阶 Hankel 函数,而 $U_0(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks_0\cdot\boldsymbol{r}}$则是入射波$u(\boldsymbol{r},t;\ s_0)$的频谱,即

$$u_0(\boldsymbol{r},w;s_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_0(w)e^{\mathrm{i}ks_0\cdot\boldsymbol{r}}e^{-\mathrm{i}wt}\mathrm{d}w \tag{7.3.7}$$

(7.3.6)式中的第二项就是散射项,它表示速度变化与波场之间的相互作用,$\boldsymbol{r}'$表示Ω内的点。如果把(7.3.6)作为正演问题,即已知 $O(\boldsymbol{r},w)$,求 $U(\boldsymbol{r},w,s_0)$,这就是一个第二类的 Fredholm 积分方程。

而反问题是已知 $U(\boldsymbol{r},w,s_0)$在空间中的一些值,求 $O(\boldsymbol{r},w)$。在地球物理中,例如已知 $x=l_0$ 及一些 s_0 的 $U(\boldsymbol{r},w;s_0)$的值,求速度分布。这实际上就是要解一个关于速度分析和测量数据之间的一个联立方程组。一般情况下,反问题比正问题更复杂,除了一些简单情形之外,都是不可行的。我们必须采取近似的方法,最简单的一种近似方法就是一阶 Born 近似,即令在速度异常区内的波场等于入射波场,这时有

$$U(\boldsymbol{r}_0,w;s_0)=U_0(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks_0\cdot\boldsymbol{r}_0}-\frac{k^2}{4}U_0(w)\int_\Omega O(\boldsymbol{r}',w)e^{\mathrm{i}ks_0\cdot\boldsymbol{r}'}H_0(k|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.3.8}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0=(l_0,y)$,是安放接收器的井,s_0 也受到一定限制。这叫做弱散射近似,因为这要求(7.3.6)右端的第二项即散射项远比入射场小。当然这就要求速度异常不能太大而且区域也不能太大。

第二种近似叫做 Rytov 近似,它给出复相位与速度异常之间的关系。复相位函数是由下面方程定义的,令

$$U(\boldsymbol{r},w;s_0)=U_0(w)\exp[\Psi(\boldsymbol{r},w;s_0)] \tag{7.3.9}$$

其中 $\Psi(\boldsymbol{r},w;s_0)$就叫做复相位。Rytov 近似就是

$$\Psi(\boldsymbol{r},w;s_0)=iks_0\cdot\boldsymbol{r}-i\frac{k^2}{4}e^{-iks_0\cdot\boldsymbol{r}}\int_\Omega O(\boldsymbol{r}',w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks_0\cdot\boldsymbol{r}'}H_0(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.3.10}$$

以上两种近似由于假设不同,对不同的物理过程有着不同的效果,估计(7.3.10)式可能更适用于地层层析。

7.3.2 Green 函数法

吴如山和 Toksöz(1987)用 Green 函数给出了目标场的解。考虑在速度为 C_0 的无限均匀介质中,有一个速度异常的地质体,其速度为 $C(\boldsymbol{r})$,接收器距地质体很远,接收到的波可以认为是平面波,见图 7.3.2。

为了简单,我们考虑密度为常数,在频率域有如下的波动方程

$$\nabla^2u(\boldsymbol{r})+\frac{w^2}{C^2(\boldsymbol{r})}u(\boldsymbol{r})=0 \tag{7.3.11}$$

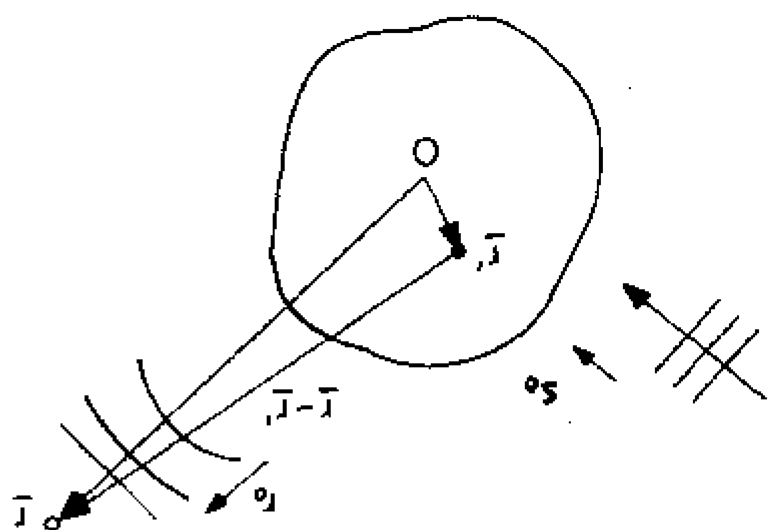


图 7.3.2 散射试验的几何关系(吴如山及 Toksöz)

定义目标函数为 $O(r)$;

$$O(r)=1-\frac{C_0^2}{C^2(\boldsymbol{r})} \tag{7.3.12}$$

作适当运算由(7.3.11)得

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})+k^2 u(\boldsymbol{r})=k^2 O(\boldsymbol{r}) u(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.13}$$

其中 $k=w/C_0$ 是围岩的波数,令

$$u(\boldsymbol{r})=u_0(\boldsymbol{r})+U(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.14}$$

其中 $u_0(\boldsymbol{r})$是入射波,$U(\boldsymbol{r})$是散射波。$u(\boldsymbol{r})$满足波动方程(7.3.13),同时利用$\nabla u_0(\boldsymbol{r})+k^2 u_0(\boldsymbol{r})=0$,则可得到

$$\nabla^2 U(\boldsymbol{r})+k^2 U(\boldsymbol{r})=k^2 O(\boldsymbol{r}) u(\boldsymbol{r}) \tag{7.3.15}$$

此方程的解为

$$U(\boldsymbol{r})=-\int_V k^2 O(\boldsymbol{r}') u(\boldsymbol{r}') G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.3.16}$$

其中 $G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$为自由空间的 Green 函数,上面积分是对地质异常体的积分,$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$为体积元。如果 $C(\boldsymbol{r})$与 C_0 相差不大,散射较弱,在地质异常体内 $u(\boldsymbol{r})\approx u_0(\boldsymbol{r})$,这就是 Born 近似

$$U(\boldsymbol{r})=-\int_V k^2 O(\boldsymbol{r}') u_0(\boldsymbol{r}) G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.3.17}$$

按前面假设入射波为平面波,所以

$$u_0(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r}} \tag{7.3.18}$$

其中 s_0 为平面波传播方向上的单位向量。自由空间的 Green 函数可写为

$$G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)=\frac{e^{ikR}}{R} \tag{7.3.19}$$

其中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$,由于接收器离地质体较远,经 Fraunhofer 近似有

$$G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}_0)}}{r} \tag{7.3.20}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量,$\boldsymbol{r}'$是地质异常中的位置,r 是 $\boldsymbol{r}$ 的长度。代人(7.3.17)式得

$$U(\boldsymbol{r})=-\frac{e^{ikr}}{r}\int_V k^2 O(\boldsymbol{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{s}_0)\cdot\boldsymbol{r}'} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.3.21}$$

右端积分实际是个三维的 Fourier 变换,所以

$$U(\boldsymbol{r})re^{-ikr}=-k^2\widetilde{O}(k(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{s}_0)) \tag{7.3.22}$$

其中 $\widetilde{O}(k(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{s}_0))$是 $O(\boldsymbol{r})$的 3 维 Fourier 变换,令

$$U_{pl}(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{r}_0)=U(\boldsymbol{r})re^{ikr} \tag{7.3.23}$$

这是 $\boldsymbol{s}_0$ 方向上的平面波在 $\boldsymbol{r}_0$ 方向产生的散射响应,则

$$U_{pl}(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{r}_0)=-k^2\widetilde{O}(k(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{s}_0)) \tag{7.3.24}$$

由此我们可以得到 Born 近似或 Rytov 近似。

7.4 2.5 维井间衍射层析

我们在讨 2 维波动方程时,往往把它作为 3 维的一个特例,其震源是线源型的,现在讨论真正点源情形下的 2 维问题,这样的问题叫做 2.5 维问题,Pratt 和 Worthington 给出了有关的结果。

7.4.1 两种近似方法

对于 2 维声波方程的衍射层析成像的两种近似方法即 Born 和 Rytov 方法可归结如下

$$-k_0^2\int_{\Omega}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')O(\boldsymbol{r}')U_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\begin{cases}U_s(\boldsymbol{r}),\text{Born 近似}\\ \Phi_s(\boldsymbol{r})\ \text{Rytov 近似}\end{cases} \tag{7.4.1}$$

其中 $O(\boldsymbol{r})$为目标函数

$$O(\boldsymbol{r})=1-\frac{C_0^2}{C^2(\boldsymbol{r})} \tag{7.4.2}$$

$U_0(\boldsymbol{r})$是在 $\boldsymbol{r}$ 处记录的不会有散射的场,$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$是自由空间的 Green 函数,而 $U_s(\boldsymbol{r})$及 $\phi_s(\boldsymbol{r})$是单频的散射场,分别为

$$U_s(\boldsymbol{r})=U_t(\boldsymbol{r})-U_0(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.3}$$

和

$$\Phi_s(\boldsymbol{r})=U_0(\boldsymbol{r})\ln\frac{U_t(\boldsymbol{r})}{U_0(\boldsymbol{r})} \tag{7.4.4}$$

$U_t(\boldsymbol{r})$是总场,还有

$$k_0=\frac{w}{C_0} \tag{7.4.5}$$

层析反演的目的就是要求出 $O(\boldsymbol{r})$。

7.4.2 2 维及 3 维源函数

在对井间资料进行反演时,我们常用的 2 维衍射层析公式中的点源实际是 3 维空间的线源。但实际试验记录的资料则是 3 维点源的记录。实际上线源及点源在振幅及相位上都有差异,在 $\boldsymbol{r}'$处的线源可用 2 维自由空间的 Green 函数表示出来

$$G_{2D}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=i\pi H_0^{(1)}(k_0R) \tag{7.4.6}$$

其中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$,$H_0^{(1)}(z)$是第 1 类 0 阶 Hankel 函数,当 z 很大时,有如下的渐近关系:

$$H_0^{(1)}(z) \rightarrow \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z-\frac{\pi}{4})} \tag{7.4.7}$$

因此在远源场时

$$G_{2D}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') \approx \left(\frac{2\pi}{k_0 R}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(k_0 R+\frac{\pi}{4})} \tag{7.4.8}$$

而3维点源函数可用3维自由空间的Green函数来表示，在 $\boldsymbol{r}'$ 激发，$\boldsymbol{r}$ 处的场为

$$G_{3D}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{e^{ik_0 R}}{R} \tag{7.4.9}$$

其中 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$。

比较 $G_{2D}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和 $G_{3D}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 可以看到，它们在振幅方面有较大的差距，而在相位方面却只有 $\frac{\pi}{4}$ 的相位差。

7.4.3 提取差场

式(8.4.1)中的 $U_s(\boldsymbol{r})$ 及 $\Phi_s(\boldsymbol{r})$ 又叫做差场，从记录中提取差场也不是很容易的，因为记录中往往含有噪音，源函数也是未知的，而且还有震源及接收器的方向性问题。

在 $\boldsymbol{r}_s$ 处的点源在 $\boldsymbol{r}$ 处引起的波场在未受到干扰的情况下，可以表示为

$$U_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s;w) = S(w)G_{3D}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s;w) \tag{7.4.10}$$

其中 $S(w)$ 是震源时间函数的Fourier变换在成像频率 w 处的值。因此式(7.4.3)及(7.4.4)相应为

$$U_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) = U_t(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) - SG(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) \tag{7.4.11}$$

和

$$\Phi_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) = SG(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)\ln\left[\frac{U_t(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)}{SG(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)}\right] \tag{7.4.12}$$

由于Green函数的互换性，式(7.4.1)可写为

$$-k_0^2\int_\Omega G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')O(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}_s;\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \begin{cases}\hat{U}_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)\\ \hat{\Phi}_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)\end{cases} \tag{7.4.13}$$

其中 $\hat{U}_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)$ 和 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)$ 叫做反褶积差场，并由下式给出

$$\hat{U}_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) = \frac{U_t(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)}{S} - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) \tag{7.4.14}$$

$$\hat{\Phi}_s(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)\ln\left[\frac{U_t(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s}{SG(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)}\right] \tag{7.4.15}$$

这样对差场的估计就主要地决定于我们对源函数的了解了，这是一种比较实用的估计方法。

7.4.4 滤波反传播法

由(7.4.13)式知，衍射层析的关键是求积分方程

$$U(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s) = -k^2\int G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_s)O(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}_s;\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.4.16}$$

的解，对于井间情形，$\boldsymbol{r}$ 取为接收器，则有

$$U(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s) = -k^2\int G(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}')O(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}_s;\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.4.17}$$

吴如山和 Toksöz(1987)给出如下的重建公式，

$$O(x,z)=\frac{1}{\pi}R_e\int_{-k}^{k}\mathrm{d}k_s\exp(\mathrm{i}k_s z-\mathrm{i}\gamma_s x)O_1(x,z,k_s) \tag{7.4.18}$$

$$O_1(x,z,k_s)=\frac{1}{\pi}\int_{-k}^{k}\mathrm{d}k_g\exp[ik_g z-i\gamma_g(x_h-x)]D(k_g,k_s) \tag{7.4.19}$$

其中

$$D(k_g,k_s)=\widetilde{U}(k_g,k_s)\frac{|k_s\gamma_g+k_g\gamma_s|}{k^2} \tag{7.4.20}$$

$$\widetilde{U}(k_g,k_s)=-k^2\int O(\boldsymbol{r}')\widetilde{G}(k_s,\boldsymbol{r}')\widetilde{G}(k_g,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.4.21}$$

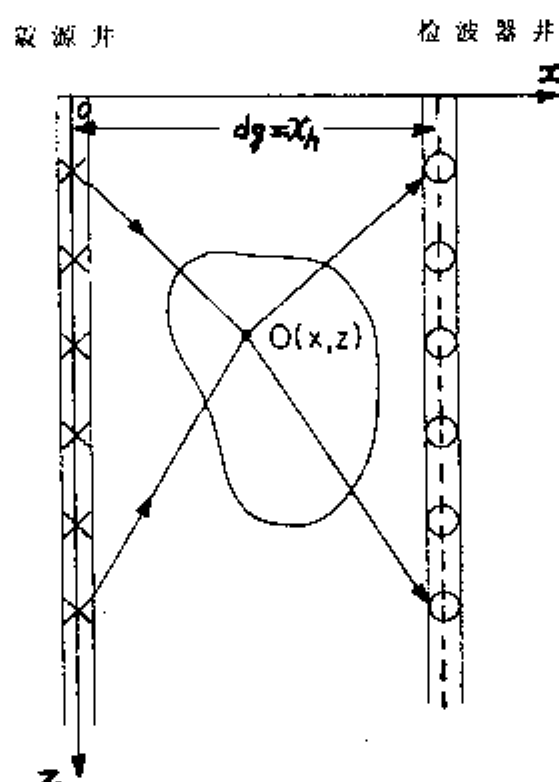


图 7.4.1　井间测量的几何关系

$$\widetilde{G}(k_g,\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\exp(\mathrm{i}\gamma_g\mathrm{d}_g)}{\gamma_g}\exp(-\mathrm{i}k\hat{g}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{7.4.22}$$

$$\widetilde{G}(k_s,\boldsymbol{r})=\frac{i}{2}\frac{\exp(i\gamma_s\mathrm{d}s)}{\gamma_s}\exp(-ik\hat{s}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{7.4.23}$$

$$\gamma_g=\sqrt{k^2-k_g^2} \tag{7.4.24}$$

$$\gamma_s=\sqrt{k^2-k_s^2} \tag{7.4.25}$$

$\hat{g}$,$\hat{s}$ 分别为传播中的平面波指向接收线或源点线方向上的单位向量，d_g 为坐标原点到接收线的距离，d_s 为原点到震源线的距离，如把纵坐标轴选在震源井中，则 $\mathrm{d}_s=0,\mathrm{d}_g=x_h$，$x_h$ 为井间的距离，见图 7.4.1。这一过程就是滤波反传播。

7.4.5　井间衍射层析成像实例

1. 井间模型

Pratt 和 Worthington(1988 用超声实验数据进行了试验。模型是由一个环氧树脂楔子嵌入另一种环氧树脂块之中，楔子尺寸见图 7.4.2。块体尺寸为 12cm×12cm×5cm。楔子速度为低速，2810m/s，块体为高速 292m/s。源点及接收点排列图 7.4.2，源点及接收点各 49 个，源点距及接收点距均为 2.5mm。震源及接收器均为压电型的，震源主频为 400kHz。图 7.4.3 是两个共接收点道集，上面的一组道集是第 16 个接收点接收到的来自 49 个震源的记录，下面的一组道集是第 14 个接收点接收到的 49 个震源的记录。其中振幅的大小变化与震源的方向性、震源与接收器耦合特点及信号在环氧树脂中的衰减有关。相位的变化与模型大小有关，信号之中含有噪音及源信号特征变化等。

为了对比，另外对此模型用有限差分法进行了数值模拟，其中用的是 2 维点源，主频在 400kHz，速度分别为 2620m/s 及 2910m/s，楔子的厚度增加了一倍见图 7.4.4。

2. 预处理及相位展开

在进行衍射层析之前必须进行预处理，首先要确定每道的初至，初至之前的全部切除，初至之后开个 7.5μs 的窗口，保留主频大约三个周期的波形，对最后的 3.5μs 进行衰减，防止

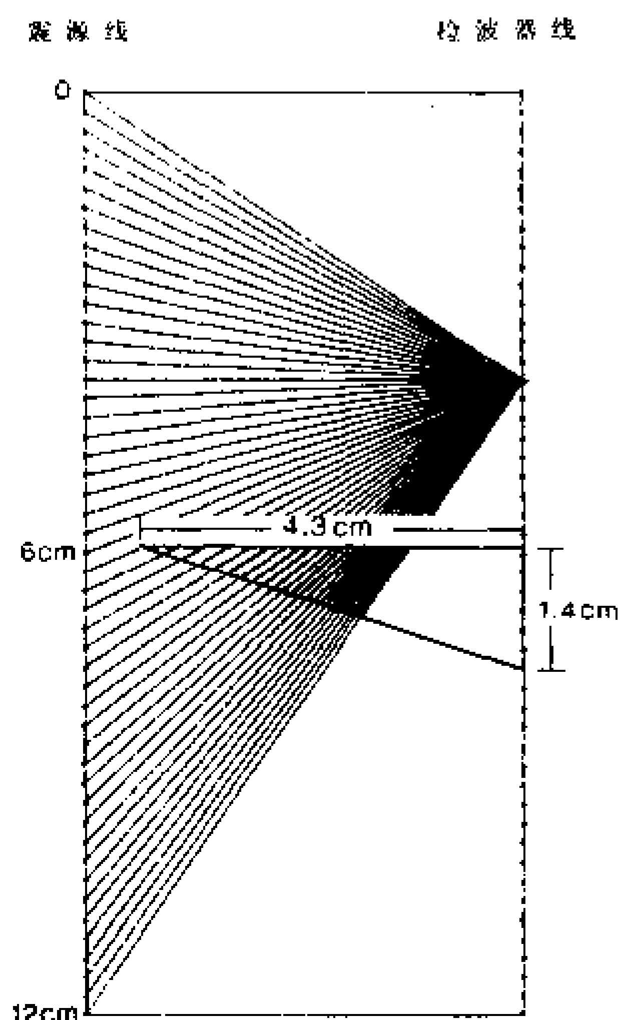


图 7.4.2　井间超声模拟原理图

图中射线为各个震源到达同一个接收点的射线。(pratt 和 worthington)

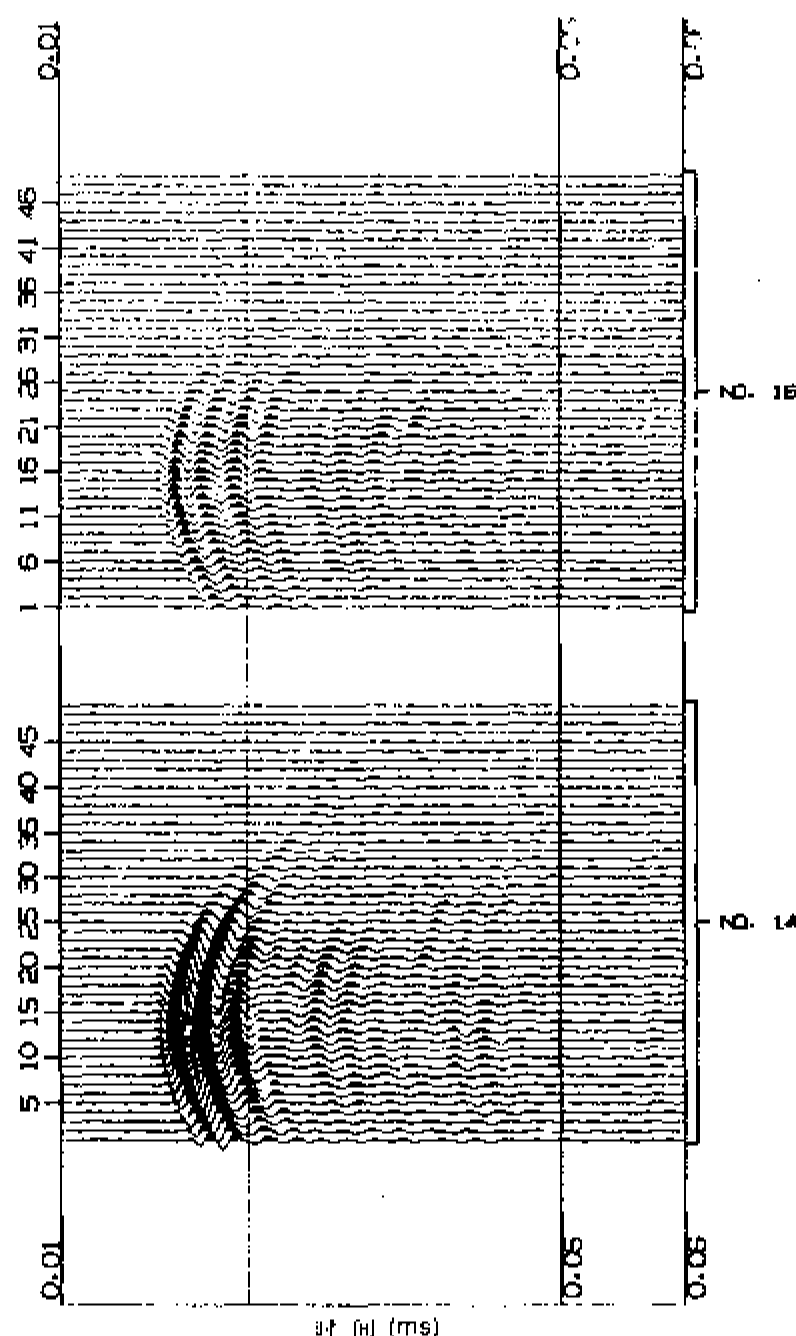


图 7.4.3　两组超声共检波器道集

假频。参数要通过不断试验来决定,数据选的太长会影响成像的质量。这里主要用透射信息,反射信息虽从理论上讲有助于成像,但这里由于噪音干扰,很难辨别出反射信息。

然后对各道进行快速 Fourier 变换,提取成像的频率分量,并对信号进行相位展开,使相位谱成为一条连续的曲线,为便于相位展开,各道要进行时移,使每道的第一个样点对应初至 Δt,这样可以消除相位谱中的陡梯度。以后还要作相移 $w\Delta t$。

3. *估计差场*

对每个源—检对来说,源函数的弱散射可作如下估计

$$S_{sg} \approx \frac{U_t(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s)}{G_{3D}(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s)} \tag{7.4.26}$$

其中 r_s 是震源的位置,r_g 是接收器的位置,如果知道旅行时 Δt_{sg},可以得到更好的估计

$$S_{sg}' = \frac{U_t(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s)}{G_{3D}'(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s)} \tag{7.4.27}$$

其中

$$G_{3D}'(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s) = \frac{e^{iw\Delta t_{sg}}}{R} \tag{7.4.28}$$

一般说来这种估计难于准确,但这种方法可以保持 S_{sg}' 至少在一组源—检对中是一致的。所

以 S'_{sg} 实际上是这组源—检对的统计意义下的源函数弱散射。

可选取的道集有共炮点道集(CSG)、共接收点道集(CRG)和共射线角道集(CRAG)。对比各种(CSG)可以了解每次发射的信号特征的差异所引起的源函数的变化。对比 CRG 则可了解不同位置的接收器的接收特性的变化。CRAG 可使我们了解信号在那个方向上有较强的变化。图 7.4.5 是两个 CRAG 道集,上面的是射线角为 42°的道集,下面的是射线角为 40°的道集。

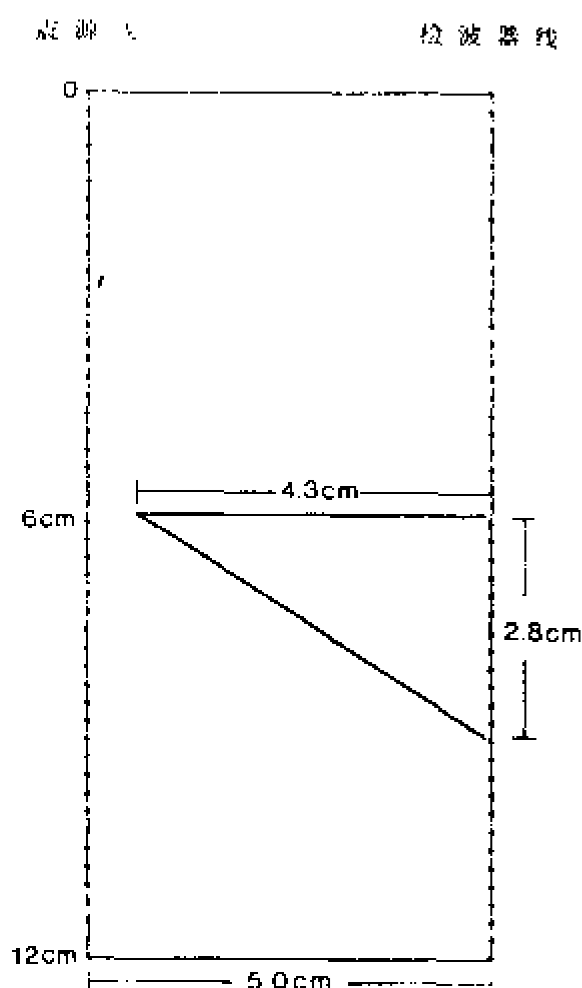


图 7.4.4 有限差分井间模拟的几何模型(Pratt 和 Worthington)

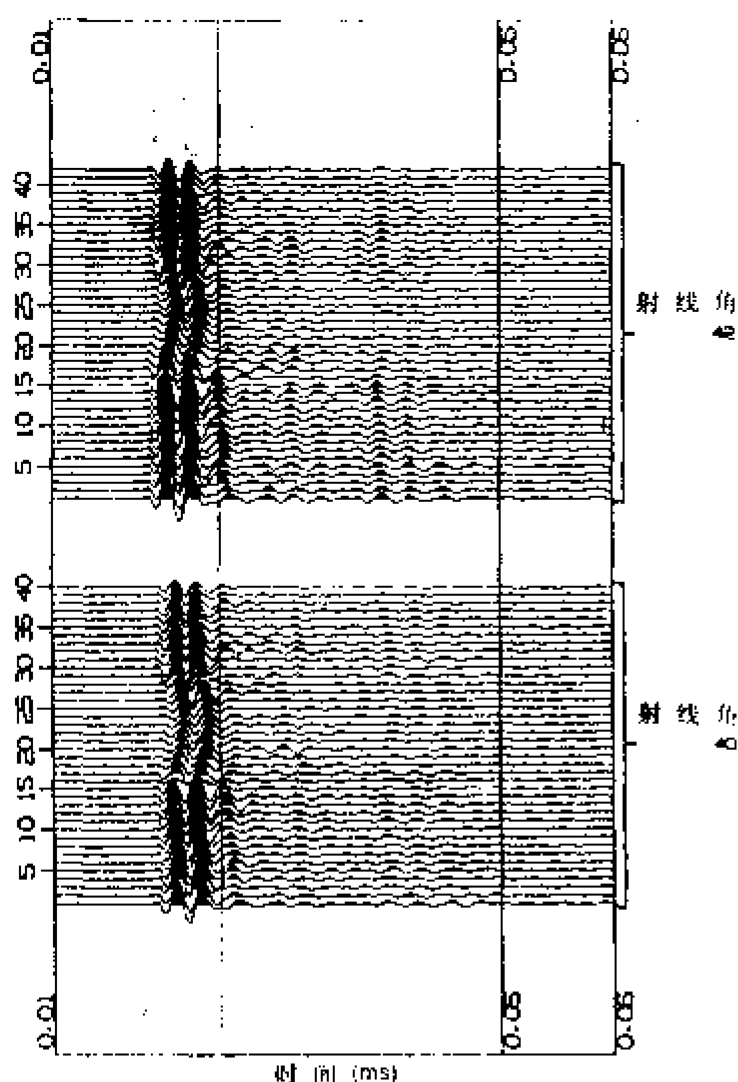


图 7.4.5 两组超声共射线角道集

4. 衍射成像

提取关场以后,利用式(7.4.18),(7.4.19)等进行滤波反传播计算,其中包含 Fourier 变换,用 CRAG 估计源函数、滤波及反传播等。

5. 结果及分析

图(7.4.6)、(7.4.7)分别是用 Rytov 近似和 Born 近似对有限差分数据的反演,成像频率为 470kHz,左边是实部,右边是虚部。源函数的估计用 CRAG 取得。从反演结果可以看到,对没有噪音干扰由 2 维震源生成的 2 维数据,即使目标区大小相当于几个波长,速度变化也达 10%,但都获得非常好的成像。Rytov 近似的实部(图 7.4.6a)在目标区之内很均匀,但边界不如 Born 近似的实部(图 7.4.7a),但 Born 近似在目标区连续性不好。Rytov 近似的虚部(图 7.4.6b)显示不出目标区与围岩的对比,所以这个部分可忽略。Born 近似的虚部(图 7.4.7b)虽然也显示了目标区的差异但是变形(尤其在内部)较大。所以也不必再用。

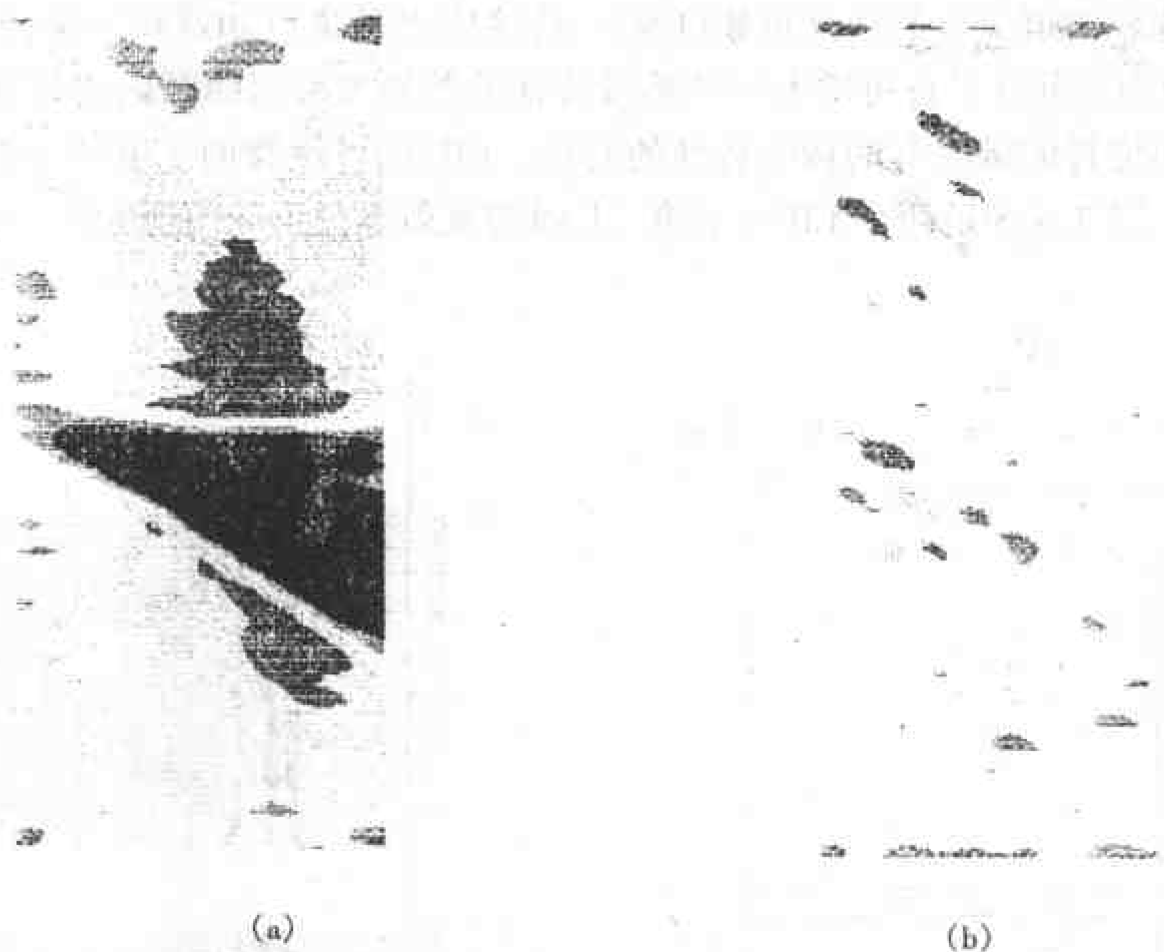


图 7.4.6　有限差分模拟数据的 Rytov 近似反演

(a) 目标函数的实部　(b)；　目标函数的虚部(Pratt 和 Worthington)

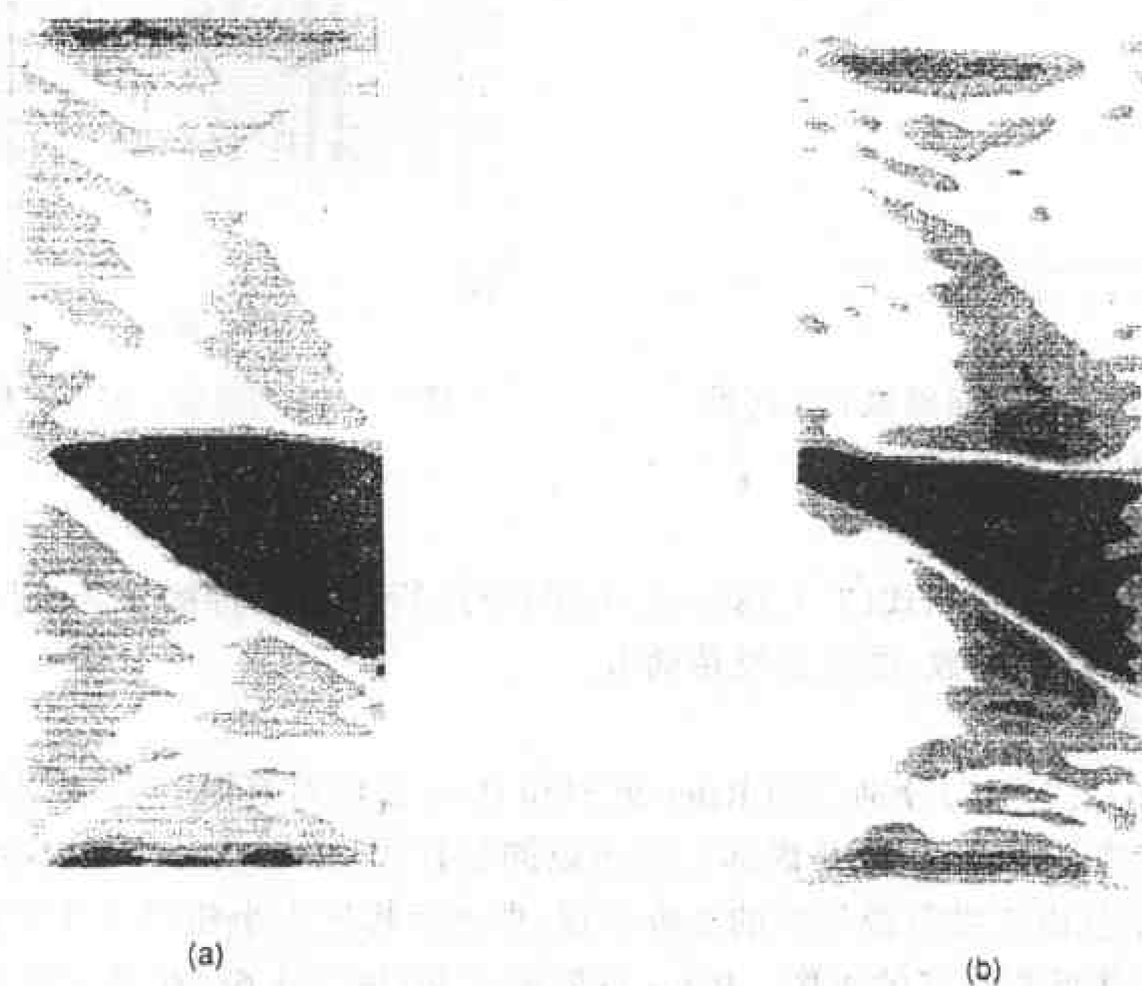
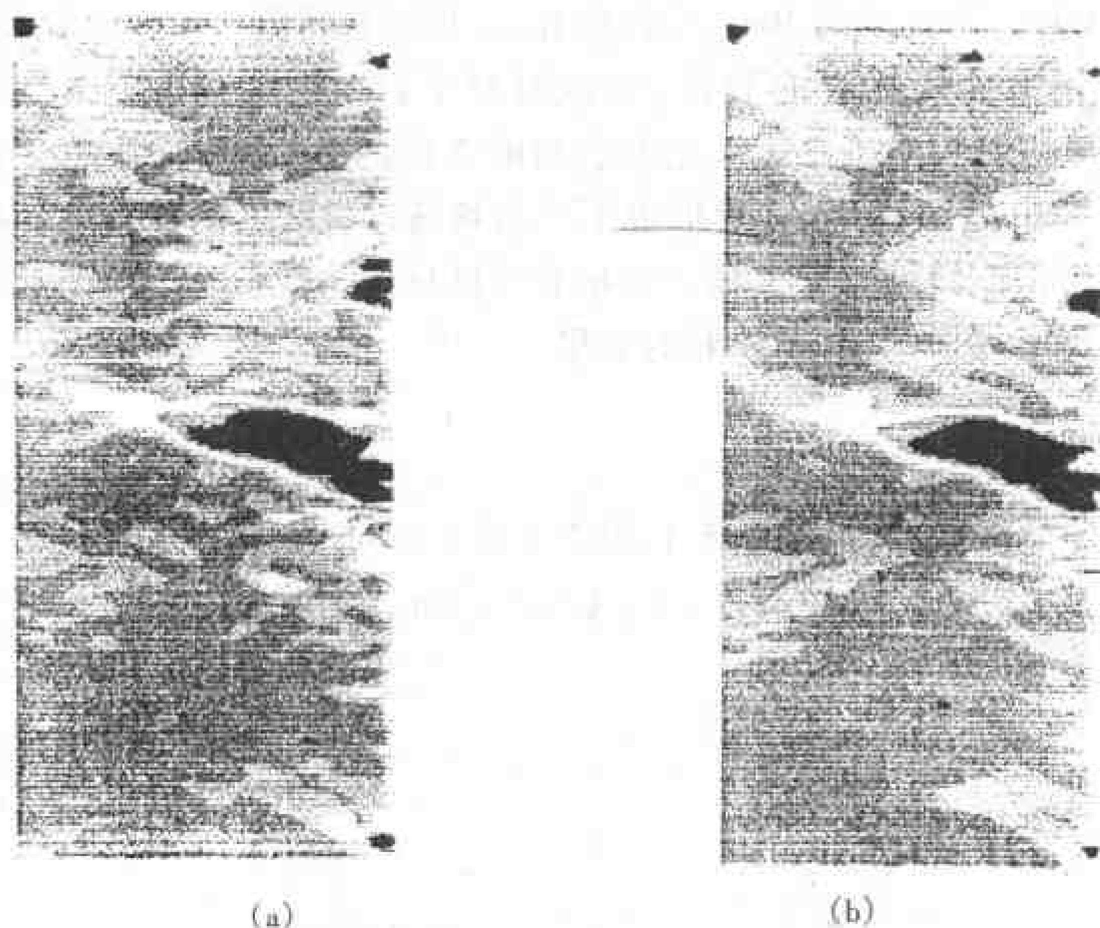


图 7.4.7　有限差分模拟数据的 Born 近似反演

(a) 目标函数的实部；(b) 目标函数的虚部(Pratt 和 Worthington)

图(7.4.8)和图(7.4.9)是以上两种方法对超声数据所作的反演。图 7.4.8a)是 Rytov 近似,成像频率为 500kHz。图 7.4.8b 是从 410kHz 到 590kHz 间七个频率(频率间隔为 30kHz)成像的叠加。图 7.4.9a,b 的说明同图 7.4.8,只是成像方法为 Born 近似。图像显示的量是

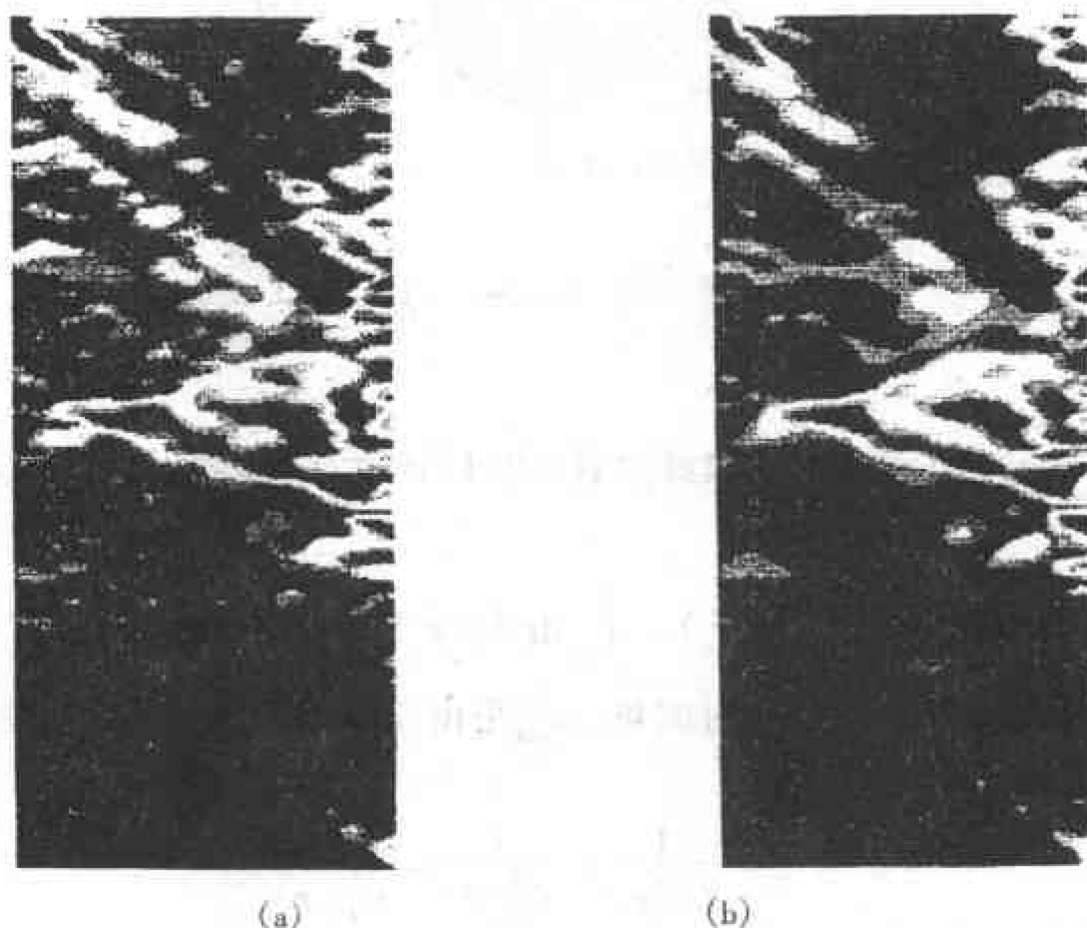
复像的振幅，由于这里的数据是 2.5 维的，而反演的方法是 2 维的，所以无法对这些数值赋于准确的物理意义，但是它们为我们提供了目标体的一种定性的成像方法。对比图 7.4.8 和图 7.4.9 可以看到 Born 近似在边界上显然比 Rytov 近似好；但 Rytov 近似在图像内部的连续性方面比 Born 近似好。



(a)　　　　(b)

图 7.4.8　超声物理模拟数据的 Rytov 近似反演。显示的是复值目标函数的绝对值

(a) 单频图像(500kHz)；　(b) 七个频率图像的叠加(Pratt 和 worthington)



(a)　　　　(b)

图 7.4.9　超声物理模拟数据的 Born 近似反演，图中显示的是复值目标函数的绝对值

(a) 单频图像(500kHz)；　(b) 七个频率图像的叠加(Pratt 和 Worthington)

7.5 非线性波形层析

与旅行时层析不同,衍射层析的正演与反演计算比较复杂,这实际是非线性问题,Devaney,吴如山和 Toksöz 等提出的 Born 近似及 Rytov 近似都得到了一定范围的应用,但由于他们都作了均匀背景下的弱散射的假设,这就限制了这些方法应用的范围。Reiter 和 Rodi (1966)提出了一种非线性反演方法。此方法与前所讲的方法不同,首先此方法是用非线性模拟散射而不同 Born 近似或 Rytov 近似也不用高频渐近射线近似或其他一些线性反演。第二是在空间域而不是波数域拟合波场。它把非线性反演与数值正演结合起来扩大衍射层析应用的范围。应用于数据,产生了较好的效果。

7.5.1 散射波场

考虑声场中的散射问题,见图 7.5.1,由 7.3 及 7.4 知

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)=u_{\text{inc}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)+u_{\text{sca}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s) \tag{7.5.1}$$

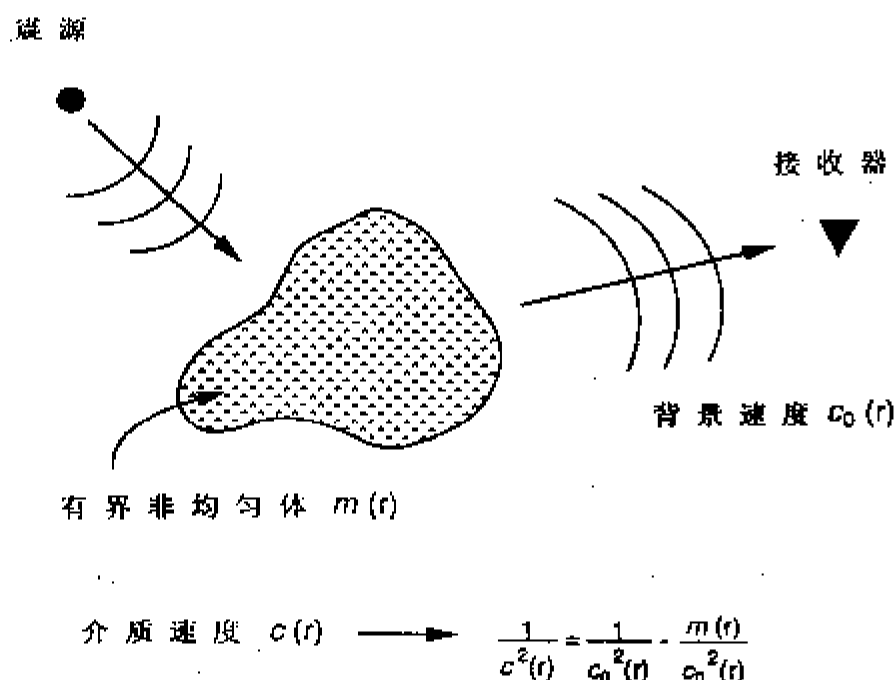


图 7.5.1 散射波场模型,震源作用非均匀体后产生的散射传向接收器

及

$$u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)=u_{\text{inc}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)-\int_D \mathrm{d}\boldsymbol{r}' k_0(\boldsymbol{r}')G_o(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')m(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_s) \tag{7.5.2}$$

其中 $u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)$是全波场,$u_{\text{inc}}$是入射波场,$u_{\text{sca}}$是由于非均匀的 m 产生的,$m(\boldsymbol{r})$就是 7.3 及 7.4 中的 $O(\boldsymbol{r})$,满足

$$\frac{1}{C^2(\boldsymbol{r})}=\frac{1}{C_2^2(\boldsymbol{r})}-\frac{m(\boldsymbol{r})}{C_D^2(\boldsymbol{r})} \tag{7.5.3}$$

这里把它叫做模型函数,$m(\boldsymbol{r})$的范围为 D。如果我们用式(7.5.2)右端第 2 项来表示在 D 外的 $\boldsymbol{r}_g$ 处接收到的散射波场,因而有

$$u_{\text{sca}}(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_s)=-\int_D \mathrm{d}\boldsymbol{r}' k_0^2(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}')m(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_s) \tag{7.5.4}$$

我们的反演问题是在已知参考速度 C_0 和在 r_g 处的全波场数据 $u(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_s)$，反演出未知的模型函数 m。而正演问题则是由 $m(\boldsymbol{r})$，通过式(7.5.4)及(7.5.2)求 $u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)$，特别地 $u(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_s)$，我们把由 m 求 $u(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_s)$ 的运算叫做泛函 $F_{g,s}$，这是个非线性泛函，因为式(7.5.4)中的 $u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_s)$ 通过式(7.5.2)而依赖于 m。7.3 及 7.4 都是对 $F_{g,s}$ 作线性化的办法求解的，例如 Born 近似就是用 $u_{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)$ 代替 $u(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)$，这必须要求散射场很小。为了保持其非线性的特性和扩大解的范围，现用一种把正演嵌入迭代的非线性反演之中的算法。

设 $F_{g,s}$ 在 m 处的 Fréche 导数为 $DF_{g,s}|_m$，则有

$$F_{g,s}(m+\delta m)=F_{g,s}(m)+DF_{g,s}|_m\delta m \tag{7.5.5}$$

现在假设 C' 为因模型函数 $m+\delta m$ 产生的速度，按式(7.5.3)有

$$\frac{1}{(C')^2}=\frac{1}{C_0^2}-\frac{m+\delta m}{C_0^2} \tag{7.5.6}$$

由式(7.5.3)的 $\frac{1}{C_0^2}=\frac{1}{C^2}+\frac{m}{C_0^2}$ 代入式(7.5.6)得

$$\frac{1}{(C')^2}=\frac{1}{C^2}-\frac{(c/c_0)^2\delta m}{C^2} \tag{7.5.7}$$

这样，问题就转化为把速度为 C 的介质当作参考介质，C' 则是由模型函数 $\overline{m}=(c/c_0)^2\delta m$ 产生的。如设 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)$ 是介质速度为 $c(\boldsymbol{r})$ 的 Green 函数，$k(\boldsymbol{r})=w/c(\boldsymbol{r})$，及 $u'=u+\delta u$，u' 是 $m+\delta m$ 产生的总场，u 是 m 产生的总场，δu 是以速度为 c_0 的介质为参考介质，$m+\delta m$ 产生的总场摄动，或者是以速度为 c 的介质为参考介质，$\overline{m}$ 产生的总场摄动，这实际上就是 $\overline{m}$ 所产生的摄动，类似于式(7.5.4)有

$$\delta u(\boldsymbol{r}_g;\boldsymbol{r}_s)-\int_D \mathrm{d}\boldsymbol{r}'k^2(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}')[c^2(\boldsymbol{r}')/c_0^2(\boldsymbol{r}')]\delta m(\boldsymbol{r}')][u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_s)+\delta u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_s)] \tag{7.5.8}$$

略去式(7.5.8)中的高阶无穷小项，作 $k_0=(c/c_0)\cdot k$ 置换，并对比式(7.5.5)得到

$$DF_{g,s}|_m(\delta m)=\delta u(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_s)=-\int_D \mathrm{d}\boldsymbol{r}'k_0^2(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_s)\delta m(\boldsymbol{r}') \tag{7.5.9}$$

7.5.2 正则化非线性反演

上面我们所讨论的井间层析不仅是个非线性问题，而且由于观测角的限制，使得问题还是个不适定的问题，为此我们可以采取 Tikhonov 正则化法来解决。

Tikhonov 正则化就是要求得这样一个模型函数 $\hat{m}$，它能使下面的两个泛函联合取得极小；一个是模型函数与测量数据的方差 $\chi^2(m)$，一个是空间粗糙度 $\Omega(m)$，即

$$\chi^2(m)=\sum_{g,s}|\mathrm{d}_{g,s}-F_{g,s}(m)|^2 \tag{7.5.10}$$

其中 $\mathrm{d}_{g,s}$ 为每对源—检观测量，$F_{g,s}$ 为用正演方法求得的对应源—检对的正演值；

$$\Omega(m)=\int_D \mathrm{d}\boldsymbol{r}L(m)[\overline{L}(m)] \tag{7.5.11}$$

其中 L 为 Laplacian 算子，横线表示共轭复数，

$$L(m)=\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \tag{7.5.12}$$

联合极小即为

$$\Psi(\hat{m}) = \chi^2(\hat{m}) + \tau\Omega(\hat{m}) = 极小 \tag{7.5.13}$$

其中 τ 叫做正则化参数,这是一个正数。使 $\Psi(m)$取得极小的函数是在 L 的定义域即在 D 上空间二阶导数平方可积的函数集合($\{m:\Omega(m) < +\infty\}$)中选取,还要求在 D 上满足 Neumann 条件:

$$\frac{\partial m}{\partial n} = 0 \tag{7.5.14}$$

n 为垂直于边界的局部坐标。

正则化参数控制着模型函数拟合的平滑度,τ 值小,平滑度也低。在正则化方法中 τ 的选取比较困难。这里是根据直觉和经验选取的,在一定量级的范围内选一些 τ 值,在观测拟合数据和解的平滑度之间权衡,选取合适的 τ。

对 Ψ 则用共轭梯度法求其极小值。每一步迭代的模型修正的方向都是根据 Ψ 的梯度产生的。设 Ψ_m 为 Ψ 在 m 处的梯度则

$$\Psi_m(\boldsymbol{r}) = 2\sum_{g,s}(F_{g,s}(m) - d_{g,s})k_0^2(\boldsymbol{r})\bar{G}(\boldsymbol{r}_g, \boldsymbol{r})\bar{u}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_s) + 2\tau L^* Lm(\boldsymbol{r}) \tag{7.5.15}$$

其中 $^-$ 代表共轭复数,* 表示拌随算子。Ψ_m 的实、虚部是 Ψ 关于 m 的相应的实、虚部的 Fréchet 导数。Ψ 的梯度由两项组成,第二项是由微分算子 $L^* L$ 作用当前的模型的结果,可以选自伴随算子 L,即 $L^* = L$,这样 $L^* L$ 就变为双调和算子$(\nabla^2)^2$,边界条件为 $\partial m/\partial n = \partial\Delta^2 m/\partial n = 0$。$\Psi$ 的梯度的第一项是每个源一检对的正演模型函数的 Fréche 导数的复共轭与正演残差之积的和,也可以把它看作是正演残差后传播到模型介质之中而形成新的模型函数所产生的波场。在 $\hat{m}$ 处共轭梯形迭代收敛于零,即 $\Psi_{\hat{m}} = 0$。

7.5.3 正演模拟的频率域积分方程法

从以上可以看到,正演模拟 $F_{g,s}$及其 Frechet 导数 $DF_{g,s}|_m$ 在 Ψ 极小化中的重要作用,但是这些量都隐含在 Green 函数及新模型函数产生的总波场之中。虽然有各种方法作正演模拟,这里选用频率域积分方程法。

为此,首先把式(7.5.2)改写如下

$$u(\boldsymbol{r}) + \int_D \mathrm{d}\boldsymbol{r}' k_0(\boldsymbol{r}') G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') m(\boldsymbol{r}') u(\boldsymbol{r}') = u_{\text{inc}}(\boldsymbol{r}) \tag{7.5.16}$$

这里为了简明,略去了 $\boldsymbol{r}_s$,未知量均置于左端,入射波场是已知的,置于右端。假设 $m(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r})$是一个有限空间的函数,而且在 D 内可以展开为 N 个方格上的基函数$f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k)$的和(见图 7.5.2)

$$m(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{N} m(\boldsymbol{r}_k)u(\boldsymbol{r}_k)f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k) \tag{7.5.17}$$

其中 $\boldsymbol{r}_k$ 表示各个方格的中心。积分方程法就是用式(7.5.17)右端的基函数展开式代替式(7.5.16)中的 $m(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r})$,然后再用点匹配法即作 $\delta(\boldsymbol{r})$与式(7.5.16)的褶积,这等于求出积分方程(7.5.16)在 $\boldsymbol{r}_k$ 处的离散值,这样得到一个矩阵方程

$$\Gamma \cdot u = u_{\text{inc}} \tag{7.5.18}$$

其中

$$U_{inc} = [u_{inc}(\boldsymbol{r}_1), \quad u_{inc}(\boldsymbol{r}_2), \cdots u_{inc}(\boldsymbol{r}_N)]^{\mathrm{T}} \tag{7.5.19}$$

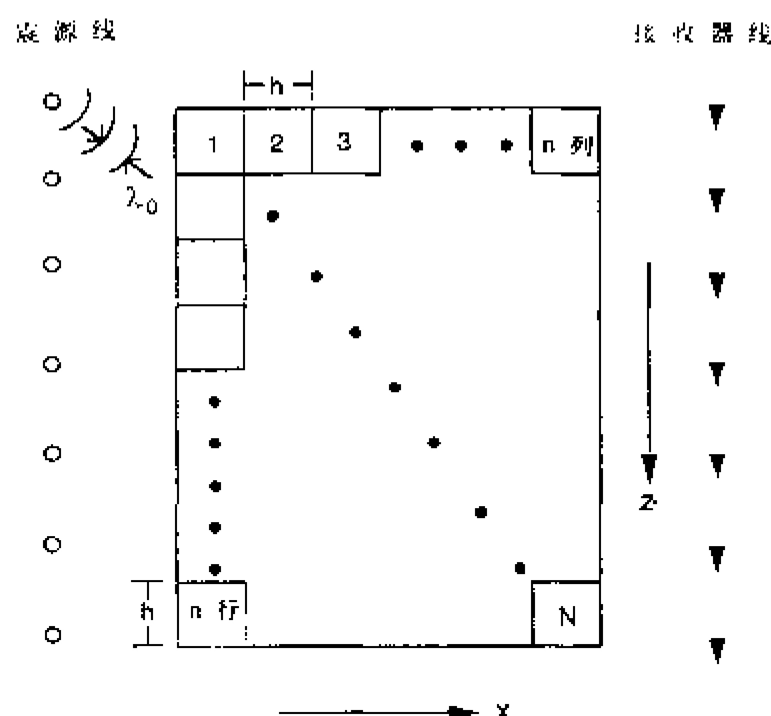


图 7.5.2　用积分方程计算井间散射原理图，在震源线和接收器线间分成 N 个边长为 h 的正方形网格(Reiter 和 Rodi)

$$u=(u(\boldsymbol{r}_1),\quad u(\boldsymbol{r}_2),\cdots,u(\boldsymbol{r}_N))^{\mathrm{T}} \tag{7.5.20}$$

Γ 是一个 $N\times N$ 矩阵，它的每个元素是两个基函数之间的相互影响，可以表示为

$$\Gamma[\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j]=\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)+m(\boldsymbol{r}_j)\int_{\mathrm{supportf}_j}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'k_0^2(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_j) \tag{7.5.21}$$

在上面的方程中 $u_{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}_i)$，$u(\boldsymbol{r}_i)$分别是入射波场及全波场在 $\boldsymbol{r}_i$ 处的值，上式中的积分是在 N 个基函数的支集上的积分。矩阵 Γ 并不依赖震源或检波器的位置，如果对 Γ 用 LU 分解约化，这样就可利用约化后的 Γ 计算多源散射问题，而不必增太多的运算，这正是井间层析要解决的问题。由式(7.5.18)解出每个源点产生的波场 $u(\boldsymbol{r}_i)$，这样用下式计算散射场，

$$u_{\mathrm{scn}}(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_s)=-\sum_{j=1}^{N}k_0^2(\boldsymbol{r}_j)m(\boldsymbol{r}_j)G_0^{\mathrm{INT}}(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}_j)u(\boldsymbol{r}_z,\boldsymbol{r}_s) \tag{7.5.22}$$

其中

$$G_0^{\mathrm{INT}}(\boldsymbol{r}'_g,\boldsymbol{r}_j)=\int_{\mathrm{suppotf}_j}\mathrm{d}\boldsymbol{r}G_0(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_z) \tag{7.5.23}$$

supportfj 是基函数的支集。

计算 m 处的 Fréchet 导数要求计算 m 的 Green 函数，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_g)$。如果用 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_g)$代替 $u_{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_s)$就可利用约化的 Γ 求 m 的 Green 函数，然后再用对每个检波点进行反替代和根据 Green 函数的互易原理求得 $G(\boldsymbol{r}_g,\boldsymbol{r})$。

$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k)$可选具有往移不变性的 2 维的 sinc 函数，

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k)=\frac{\sin[(\pi/h)(x-x_k)]}{(\pi/h)(x-x_k)}\times\frac{\sin[(\pi/\mathrm{h})(z-z_k)]}{(\pi/h)(z-z_k)} \tag{7.5.24}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x,z)$是任一点，$\boldsymbol{r}_k=(x_k,z_k)$是 D 中的离散点，h 是采样间隔，对 sinc 函数的采样点，要求在每个波长之内有 10 个采样点。

7.5.4　反演结果分析

Reiter 和 Rodi 用井间物理模拟资料进行了反演，模型是用环氧树脂做成，一共有七层，

上部四层是水平层状介质,第五层含有一个米圆(模拟河道),第六层有一个倾斜界面,并含一个垂直的间断点(模拟断层)。七层中有两层夹在高速层中,以模拟油藏。模型尺寸及速度见图 7.5.3。模型放在水槽之中,把压电换能器置于模型两侧,采集透射资料。震源线距

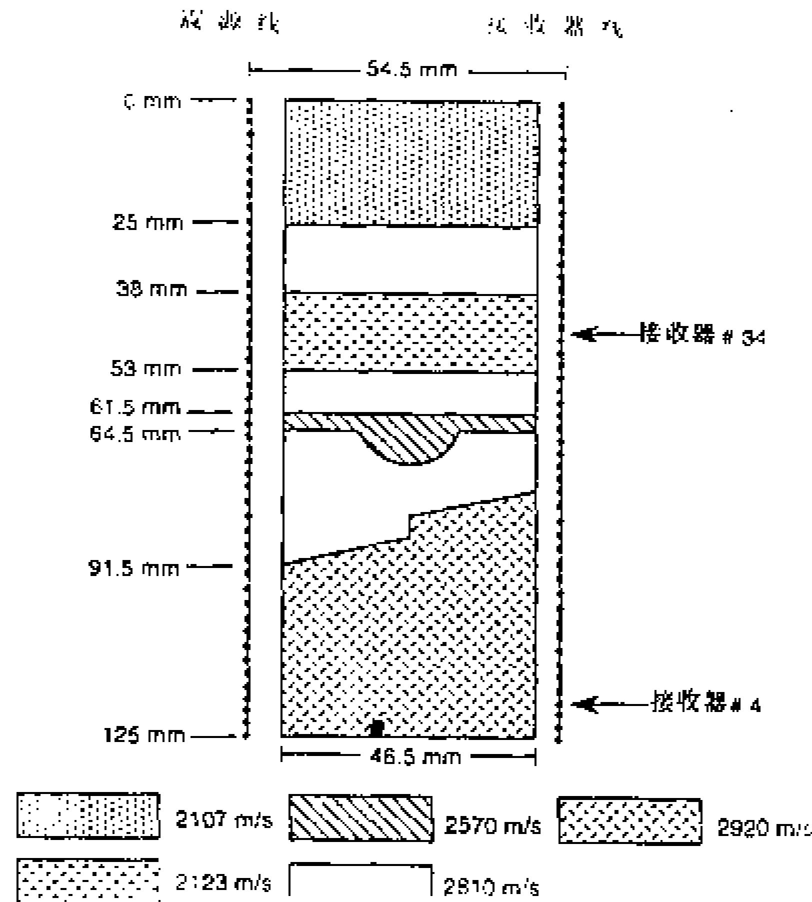


图7.5.3 英国 Durham 大学物理模型,由 46.5mm 宽的七层环氧树脂构成,速度在 2107~2920m/s 之间。模型的震源线和接收器线相距 54.5mm。震源间隔及接收器间隔均为 2.5mm

模型边界为 1.25mm,接收器线距模型另一边的边界为 2mm。震源频率为 200-500kHz,采样间隔为 0.25μs。采集的数据是弹性波型的,其中有直达纵波的横波,有转换波、导波首波及广义反射等,也有较强的随机干扰和相干干扰以及震源和接收器的方向性影响。图 7.5.4 是从底部开始计算的第 4 检波器收到的来自各个炮点的记录,即共第 4 个检波器记录;图 7.5.5 是共第 34 个检波器记录。此模型所模拟的地震勘探的范围可用如下方法估计,实际距离乘上 1000,时间也乘上 1000,这样图所标的 mm 即度为 m,μs 变为 s,kHz 必须缩小 1000 倍变为 Hz。因而此模型相当模拟相距为 54.4m 的井间层析(震源频率为 200-500Hz)。

在反演之前,必须对数据处于一些预处理。首先要通过各种方法了解震源函数,并给一个初始模型,这对于物理模拟来说是不难的,但对于野外测观就难于做到了。第 2 个问题是作一种从 3 维数据向 2 维数据的转换,这是因为观测的数据是 3 维的,而我们的算法是适于 2 维的。这个变换包括两步,第一步是每道时间乘上 $t^{\frac{1}{2}}$,使球面扩散变为柱面扩散;第二步每道与 $t^{-\frac{1}{2}}$褶积,使点源变成为线源。

我们反演的目标是用这些资料重建模型的横向变化的特征(如河道和断层)。首先根据模型参数选取合适的空间采样间隔,这由最低的速度和成像频率而定。为了减小计算量,现只取图 7.5.6 中虚线内部的部分。为能以 350Hz 模拟低速层,把格点的距离取为 1.505m,这

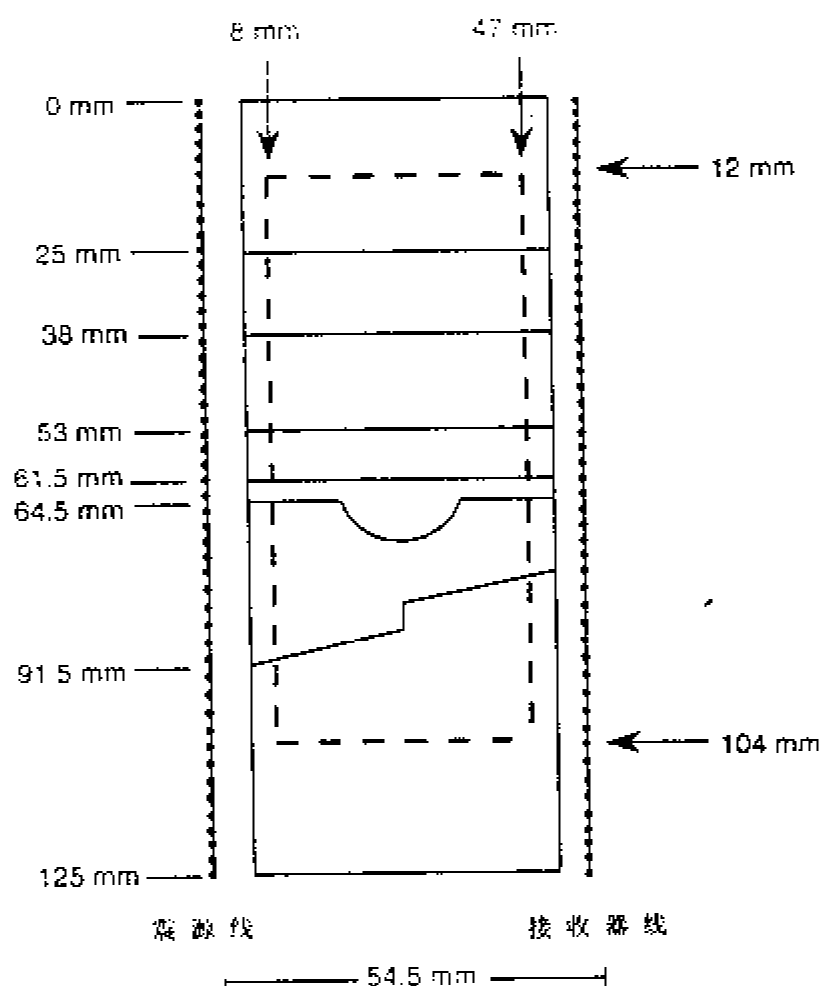


图 7.5.4 共第 4 个接收点道集(接收点位置见图 7.5.3)直达纵波及横波清晰可见。随震源深度增加,速度减小。震源编号自下而上

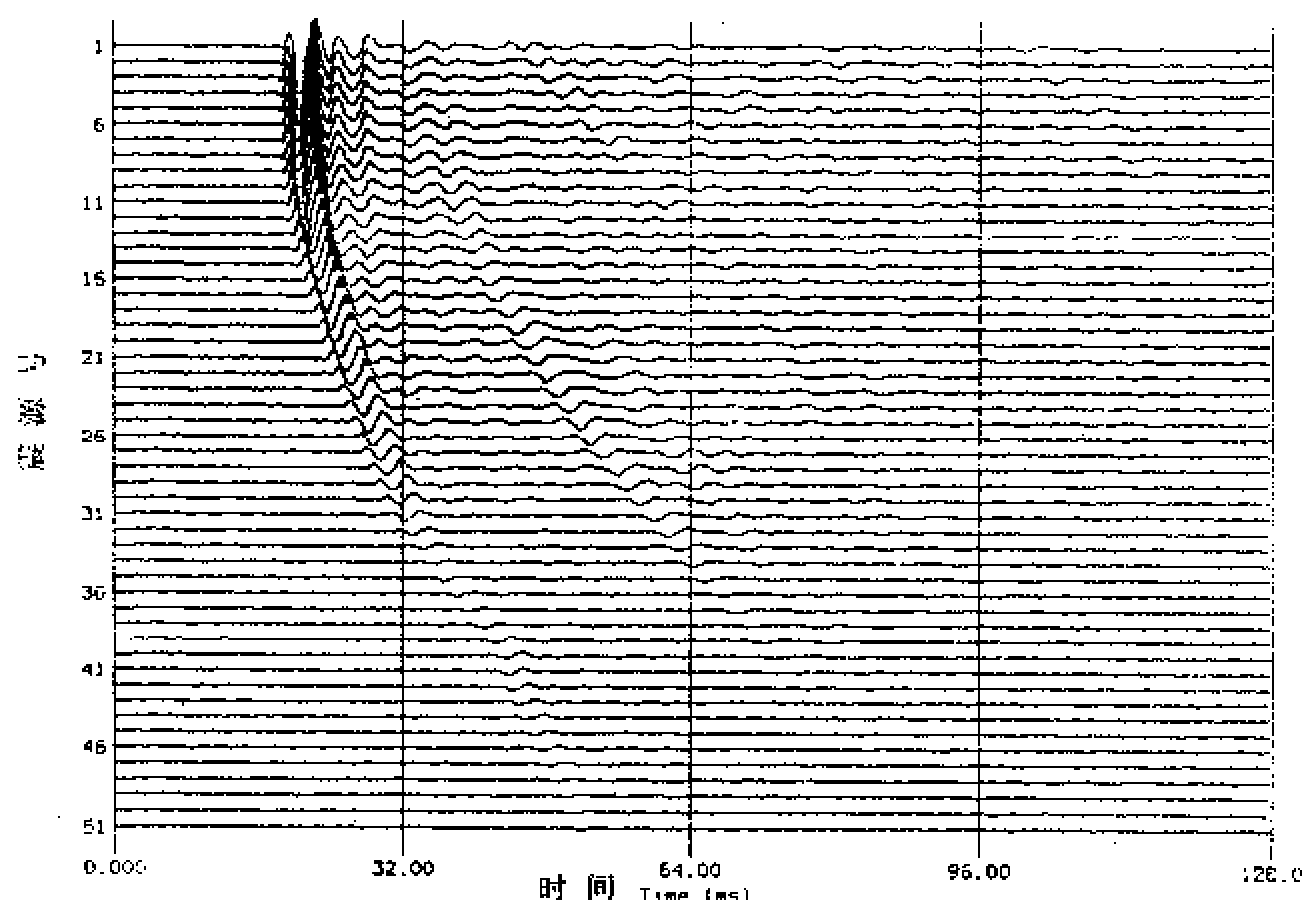


图 7.5.5 共第 34 个接收器道集,接收器正好位于低速区,可以看到来自震源的导波

样可以产生 26×61 个点的网格,覆盖面积为 39m×92m,在频率为 350Hz 在模型的速度范围内,波长为 6.02~8.3m,这意味着河道地层的两端小于半个波长,而河道中心约一个波长。这正是旅行时层析无法解决的情形,河道层纵向有 2~4 个格点,在这个范围内正好可以检验这种全波形层析反演方法的分辨能力。在该反演中一般 4~10 次迭代即好得到较好的结

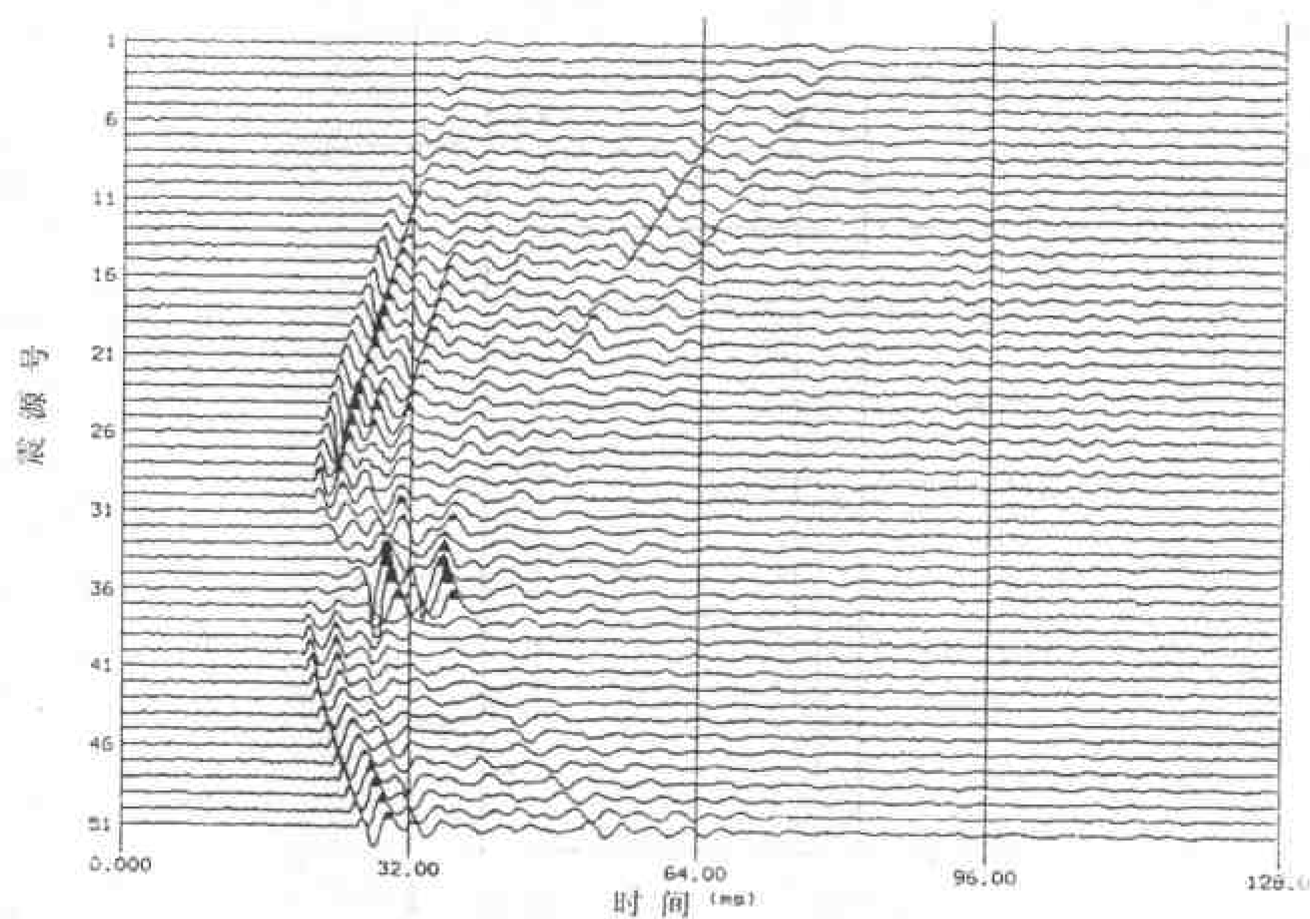
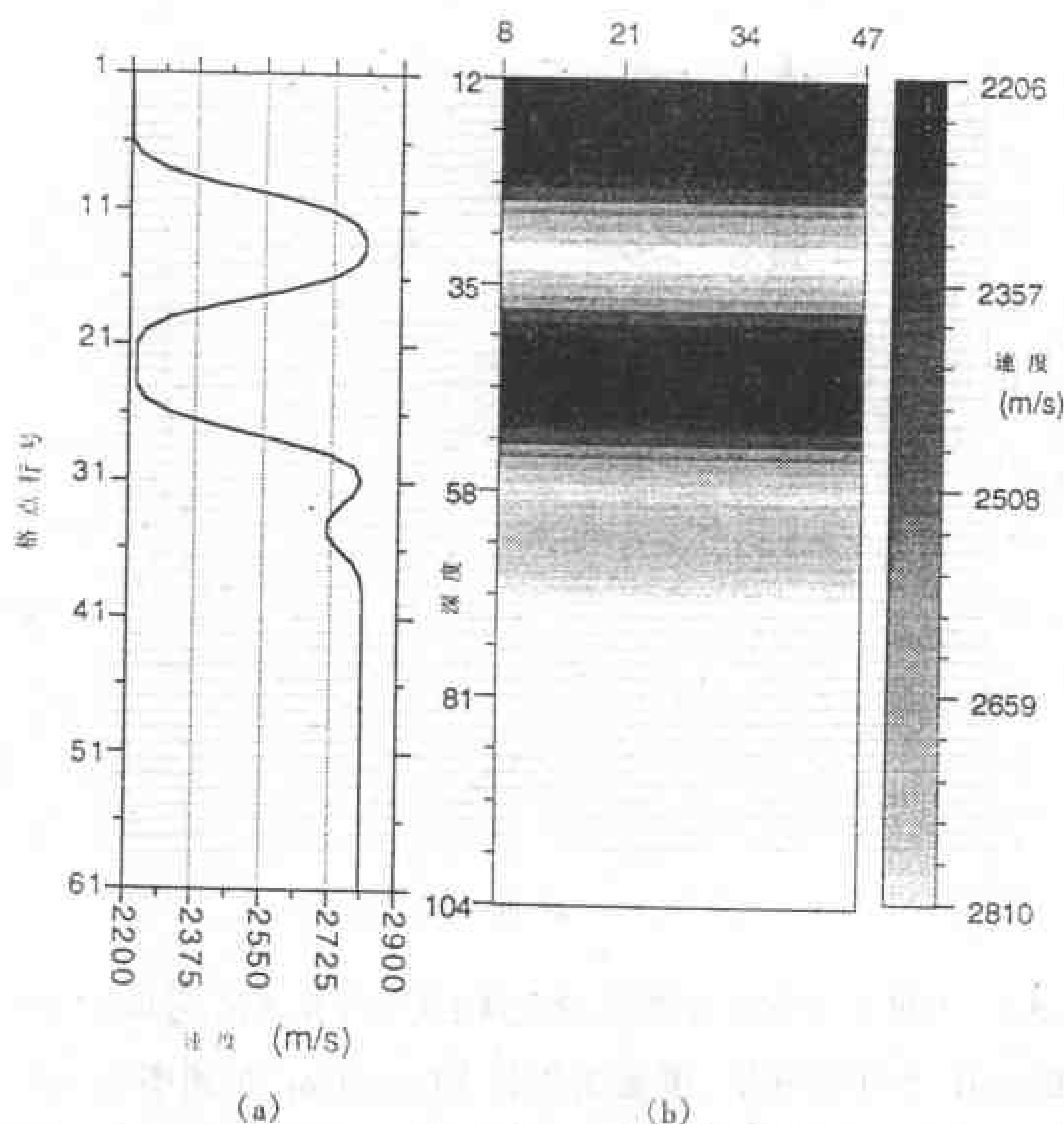


图 7.5.6 图中虚线表示计算中所用的网格范围的边界。左上角位置为$(x,z)=(8,12)$右下角位置为$(47,104)$,网格边长为1.505mm,共26×61网格(Reiter 和 Rodi)



(a) (b)

图 7.5.7 非线性波形反演的初值的两种表现形式,初值是1维光滑模型

(a) 用光滑曲线表示速度随深度的变化;

(b) 用灰度表示速度随深度的变化(Reiter 和 Rodi)

果。但是模型的主要变化一般在6次迭代之前,后面的计算中也只进行了6次迭代。在非线性波形反演中,背景速度一般选接近介质的平均速度,以减小正演中的误差。初始模型选的是否合适对反演结果有重要影响,特别对速度反差大的区域更是如此。我们先用一个一维的光滑模型,转折点正好取在层的位置上,这很类似一条光滑的声波测井曲线。此初始模型用两种方式显示在图7.5.7中,注意最下面一层的倾斜层在初始模型中未能显示出来,对河道层只是把速度稍微降低了一点。

正则参数 τ 选为0.2,进行6次迭代之后得到的结果见图7.5.8。为了清楚,从2520m/s到2920m/s之间每隔100m/s用等值线画出,可以看到河道层及其速度被检测出现,倾斜层也显现出来。但是纵向的间断性不是很好,这正是井间数据自身的缺陷。在深度25m处的高速层,由于上下两个低速层的影响,反演结果偏高。深度55m处的2810m/s速度层在模型左端出现高速层组,这是由于多种因素造成的,有衰减问题,有校正问题,也有积分方程的不稳定因素。顶部速度估计偏低,底层速度估计偏高,则是由于约束不是造成的。总的说来,这种方法重建了模型的主要特征,甚至在物体特征与观测波场的波长相当时,也是有效的。

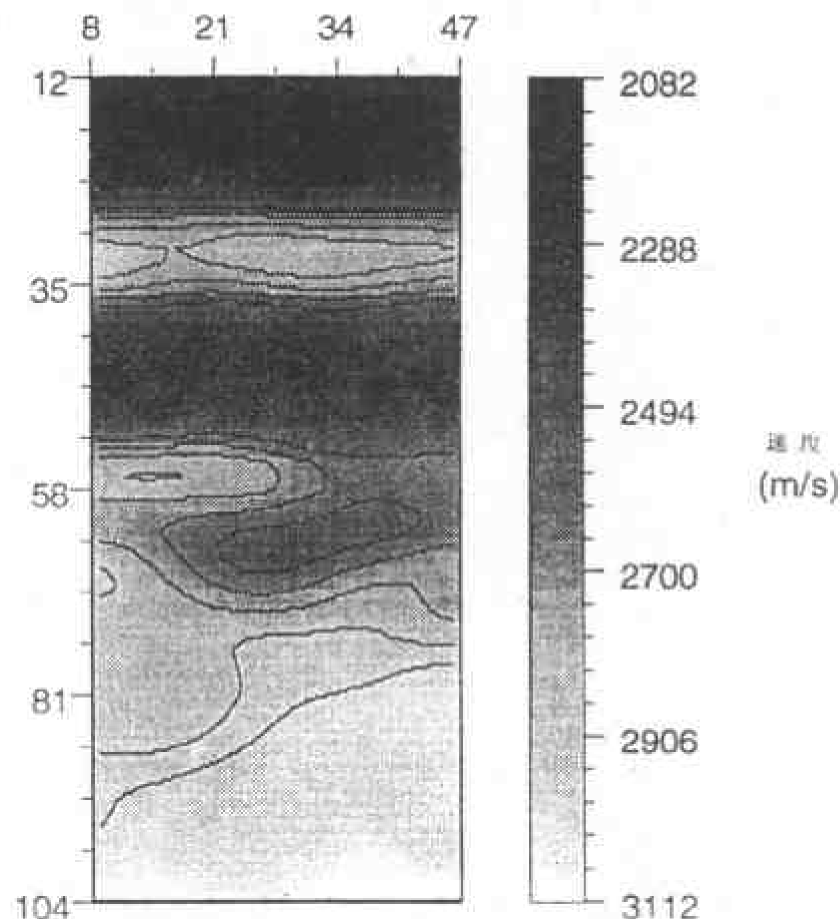


图7.5.8 非线性波形反演结果。成像频率为350Hz,正则化参数 $\tau=0.2$,初始模型为1维光滑模型见图7.5.7。反演结果可以看河道和倾斜层(Reiter和Rodi)

第7章 参考文献

1. Lavrentiev M.M., 1982, Integral Geometry and Inverse Problems, in "Computing Method in Applied Sciences and Engineering" North-Holland publishing Compang

2. 杨文采,李幼铭. 应用地震层析成像. 地质出版社,1993

3. Gerfand I.M., Graev, M.I., and Vilenkin, N.Ya., 1966, Generalized Functions, 5, Integral Geometry and Representation Theory, Academic Press, New York.

4. Chapman, C.H., 1988, The Radon transform and seismic tomography, in "Seismic Tomography" Edited by Guust

Nolet, D. Reidel Publishing Company

5. Gel'fand, I.M., and Shilov, G.E., 1964, Generalized Functions, 1, Academemic Press (有中译本)
6. Deans, S.R., 1985, The Radon Transform, in Mathematical Analysis of Physical Systems Van Nostrand Reinhold Company, New York
7. Devanty, A, J., 1984, Geophysical Diffraction Tomography IEEE, Transaction on Geoscience and Remote sensing, Vol, GE-22, NO.1
8. Pratt, R.G., and Worthington, M.H., 1988, The Application of Diffraction tomography to Cross-hole seismic data. Geophysics, Vol.53, p1284-1294
9. Wu, R., and Toksöz, M.N., 1987, Diffraction tomography and multi-source holography applied to seismic imaging. Geophysics, Vol.52 P11-25
10 Reiter, D.T. and Rodi, W. 1996, Nonlinear waveform tomography applied to crosshole seismic data. Geophysics, Vol.61, p.902-913

第8章　横波分裂与裂缝检测

近年来,利用地震波来研究岩石的内部结构已在理论上、实验室内和野外观测上都取得了显著的进步。特别是地震横波在通过含有裂缝(裂隙)的岩石中传播时会发生横波分裂,以及利用横波分裂检测裂缝作为一种可靠的研究裂缝性储层的有效技术手段已被世界范围内广大地质地球物理学家们所接受。因此,为了更好地反映地球物理中这一最新成就,本章首先从概念上阐明地震各向异性,进而从理论上建立横波分裂的理论模型并给出实验证实。然后分别叙述垂直地震剖面(VSP)和地面地震检测裂缝的关键处理解释方法。最后将地震横波检测裂缝与测井和岩心分析裂缝的结果相对比,说明这一新技术手段的实际效果。

8.1　各向异性概述

各向异性和非均匀性是密切相关的两个述语。广义上讲,当材料的特性在同一点处随方向发生变化时,则认为材料是各向异性的。而当材料特性在相同的方向测量时随位置发生变化,则材料被认为是非均匀的。所有的各向异性都起源于非均匀性,而且各种非均匀性在某一尺度上也是各向异性的。因此,非均匀性的尺度是非常重要的。在我们地球物理中,地震各向异性指的是在地震波长的尺度上任何包含内部结构(如晶体或排列的裂缝)的均匀性材料,其弹性特性随方向发生变化。

对于纯粹的弹性固体,如晶体,其特性变化可由各向异性弹性常数的四阶张量来充分描述。地球物理学家的一个突出贡献是,任何一种包含有内部结构的组合材料,如含有排列裂隙分布的固体或周期薄层组成的固体,其特性变化也可类似地由各向异性弹性常数来模拟。这样的模拟在一定的约束条件下(如裂隙的尺度或层厚度与地震波长相比小数倍),已在实验上证实是有效而可行的。各向异性固体的理论和概念早已由对晶体特性感兴趣的科学家们所建立和使用。因此我们在本节先就一般的各向异性对称性(晶体对称性)系统和目前地球中已建立的常见对称性系统作一介绍,然后对各向异性介质的地震波传播特性和概念作进一步阐述。

8.1.1　各向异性对称系统

1. 晶体对称性

物理上可实现的各向异性对称系统有7个,即三斜晶系、单斜晶系、正交晶系、正方晶系、三方晶系、六方晶系和立方晶系(如将各向同性看成是具有完全对称的各向异性对称系统,则有8个系统)。据对称性的不同这7个系统又可分为32个晶体对称类(Symmetry Classes)。所谓的对称性指的是一种材料进行物理上或概念上的变换后仍保留变换前的情况。这些变换主要有旋转、反射、反演、旋转反演和旋转反射。最基本的对称性变换是旋转和反射,其它的都可由简单地组合旋转和反射而形成。一个旋转对称性指的是保留晶体为对称时的最小旋转角度。一个 n-重旋转对称变换一般定义为具有最小旋转角为 $2\pi/n$ 的变换。在晶体学的对称变换中只有2-重、3-重、4-重和6-重旋转存在(近年来也发现了5-重旋转对称,Guyot,1987)。

特别需要指出的是，对于研究波传播特性而言，对称平面和对称轴是十分重要的两个概念。对称轴定义为固体中的一个方向，在该方向旋转小于 360°时固体在旋转前后是不可区分的。对称平面(也称镜向平面或反射平面)指的是固体中的一个平面，该平面具有在沿此平面法线相等距离的点上特性是相同的。图 8.1.1 给出了一个具有一个 2-重对称轴和两个对称平面的带手柄的缸俯视图和主视图。

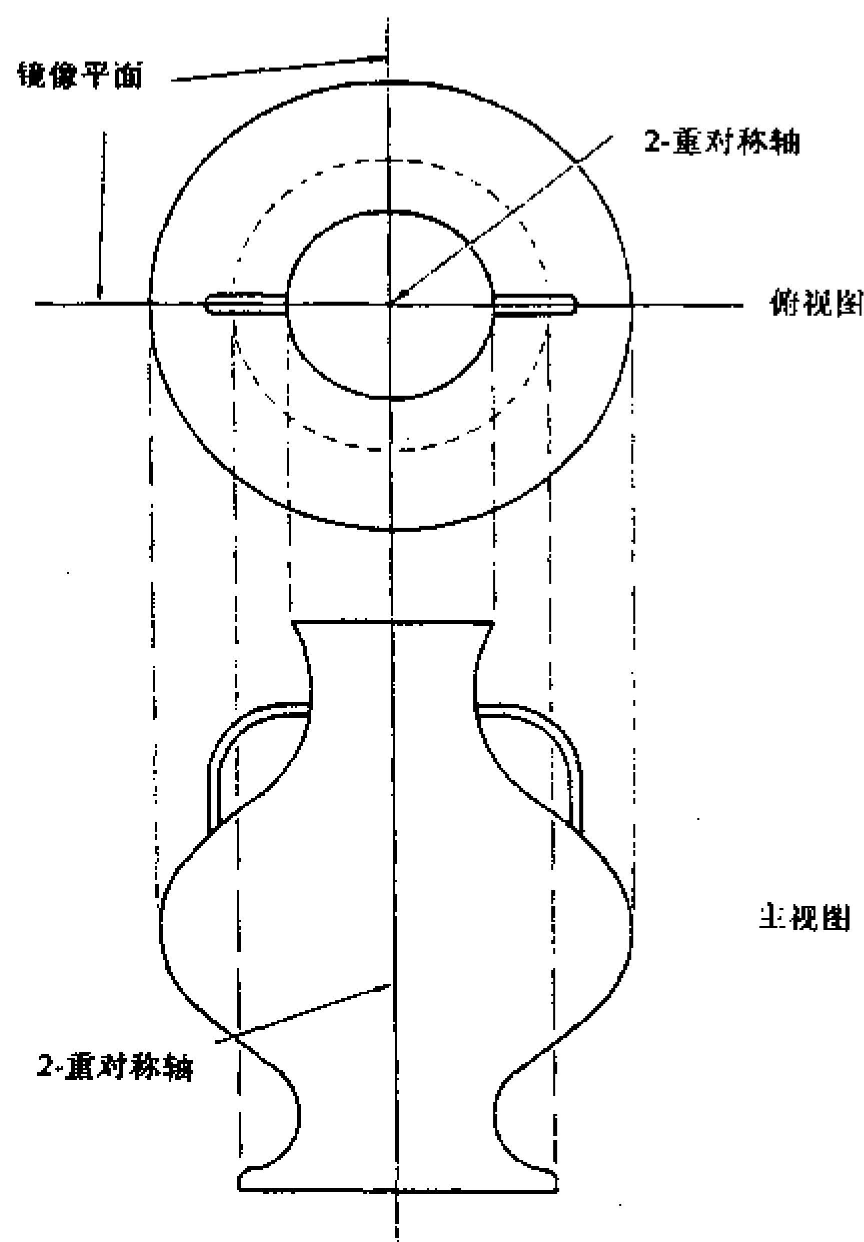


图 8.1.1　具有一个垂直 2-重对称轴和两个互相正交的垂直对称平面的一只缸具有这些对称性的均匀固体是属于正交对称系统(据 Winterstein，1990)

2. 弹性特性的对称性

由于岩石中所含的裂缝不可能产生 32 个对称类，以及地震学家们关心的是弹性特性对称性而不是岩石本身的对称性，故各向异性对地震学家们比对晶体学家们更简单一些。忽略岩石本身的对称性而只考虑岩石的弹性特性对称性之所以简单是由于一个固体的某个给定特性的对称性与该固体本身的对称性相比总是具有一样高或更高的对称性。因此在弹性特性的对称性中我们只研究对称系统而不进一步按对称类来研究其对称性。

现在一般将反映弹性特性的刚度张量写为联接 6 分量应变矢量和 6 分量应力矢量的 6 ×6 对称刚度矩阵。刚度张量与刚度矩阵的完整对应关系是

张量 C_{ijkl}	矩阵 C_{IJ}
ij 或 kl	I 或 J
11	1
22	3
33	3
23 或 32	4
13 或 31	5
12 或 21	6

因此,虎克定律变成

$$\boldsymbol{\sigma} = \underset{\sim}{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{e}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是6-分量应力矢量,$\underset{\sim}{\boldsymbol{c}}$是 6×6 刚度矩阵,$\boldsymbol{e}$ 是应变矢量。按约定,应变张量 $\boldsymbol{e}$ 的定义是

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} \tag{8.1.1}$$

而应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 类似,但没有因子2。这样刚度张量的一般形式可表达成

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{8.1.2}$$

对于勘探地球物理学家来说,上述的刚度张量的矩阵表达和两个下标的概念可使数学表达大大简化。特别是可应用 Bond 变换,以矩阵运算的形式将任何旋转或其它对称性操作应用于矩阵形式的刚度张量。

在上述概念基础上,区分不同的对称系统就意味着区分 6×6 的刚度矩阵。具体而言,弹性张量的矩阵形式在非零常数和最大对称性框架下常数的约束不同就代表了不同的对称系统。图8.1.2给出了8个对称系统和2个子系统的弹性常数。

三斜(21)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
c_{12}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
c_{13}	c_{23}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}
c_{14}	c_{24}	c_{34}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
c_{15}	c_{25}	c_{35}	c_{45}	c_{55}	c_{56}
c_{16}	c_{26}	c_{36}	c_{46}	c_{56}	c_{66}

单斜(13)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	c_{16}
c_{12}	c_{22}	c_{23}	0	0	c_{26}
c_{13}	c_{23}	c_{33}	0	0	c_{36}
0	0	0	c_{44}	c_{45}	0
0	0	0	c_{45}	c_{55}	0
c_{16}	c_{26}	c_{36}	0	0	c_{66}

正交(9)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
c_{12}	c_{22}	c_{23}	0	0	0
c_{13}	c_{23}	c_{33}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{55}	0
0	0	0	0	0	c_{66}

三方Ⅰ(6)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	c_{14}	0	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
c_{14}	c_{14}	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	c_{14}
0	0	0	0	c_{14}	c_{66}

其 $c_{66}=(c_{11}-c_{12})2$

三方Ⅱ(7)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
c_{14}	c_{14}	0	c_{44}	0	c_{15}
c_{15}	c_{15}	0	0	c_{44}	c_{14}
0	0	0	c_{15}	c_{14}	c_{66}

其 $c_{66}=(c_{11}-c_{12})/12$

四方Ⅰ(6)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	0
0	0	0	0	0	c_{66}

四方Ⅱ(7)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	c_{16}
c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	c_{16}
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	0
c_{16}	c_{16}	0	0	0	c_{66}

立方(3)

c_{11}	c_{12}	c_{12}	0	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{12}	0	0	0
c_{12}	c_{12}	c_{11}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	0
0	0	0	0	0	c_{44}

六方(5)

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	0
0	0	0	0	0	c_{66}

其中 $c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2$

各向同性(2)

c_{11}	c_{12}	c_{12}	0	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{12}	0	0	0
c_{12}	c_{12}	c_{11}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	0
0	0	0	0	0	c_{44}

其中 $c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2$

图 8.1.2　所有可能的各向异性对称系统的弹性常数矩阵形式。
系统名后括号中的数量是特定对称系统最大的可能独立常数

对波传播而言,具有物理意义的各向异性对称系统的分类是按照镜像对称平面的排列

(两个子系统三方Ⅱ和四方Ⅱ不论对晶体学还是地学都是不常见的,以下不再排列)。图8.1.3给出了常见对称系统的对称平面的空间排列。一般而言,单斜对应有一个对称平面,正交对应有三个互相正交的对称平面。三方对应有三个对称平面。四方、三方和立方分别都有对应于各自的对称平面,唯有三斜对称无对称平面,而六方对称实验上是横向各向同性(二者的弹性常数是相同的)。

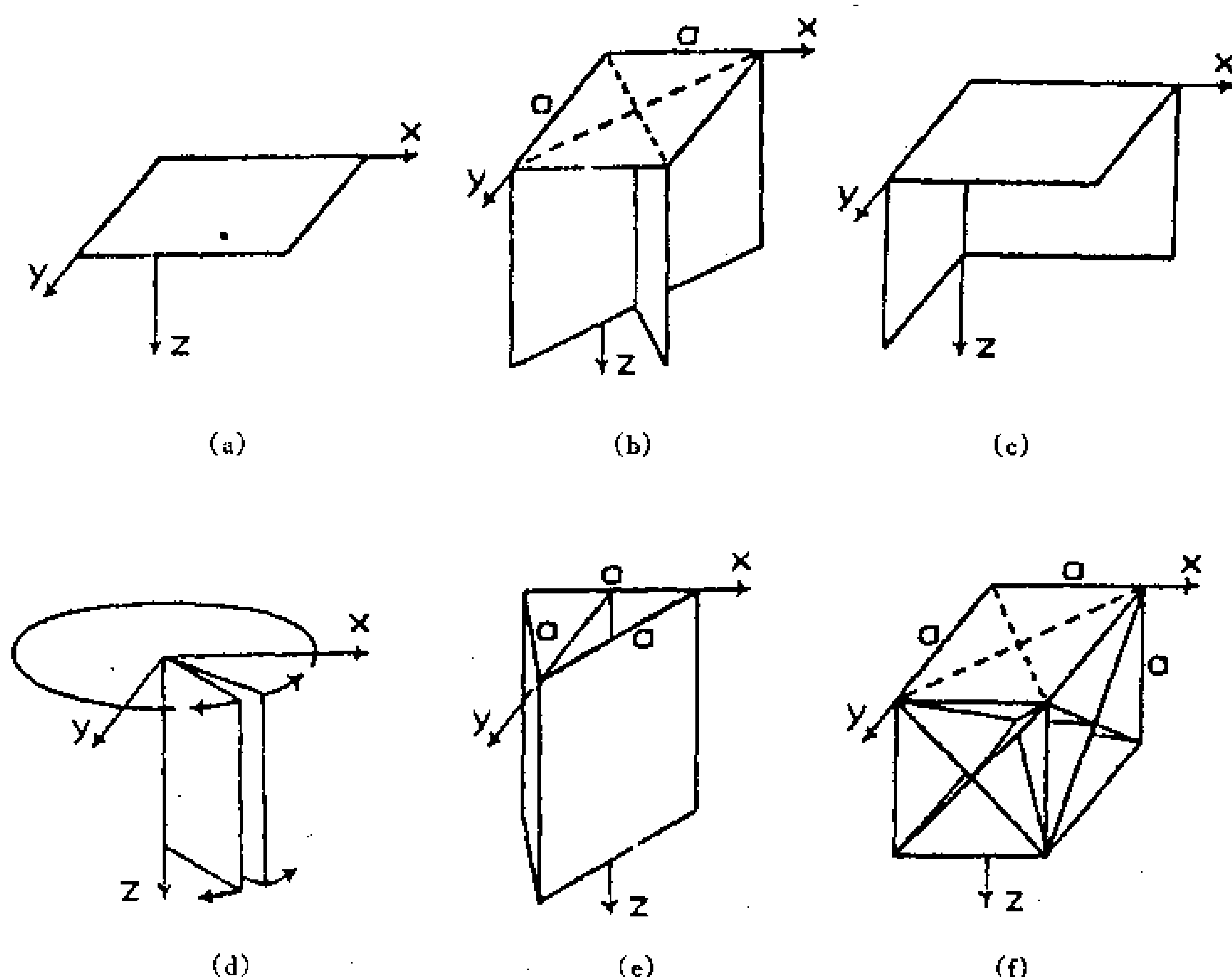


图8.1.3 常见对称系统的对称平面的空间方位排列:
(a)单斜;(b)四方;(c)正交;(d)六方;(e)三方;和(f)立方
三斜系统无对称平面,而各向同性系统的任一个平面都是一个对称平面

需要指出的是,尽管以上只是针对刚度张量而言,但同样也可用于屈度张量。屈度张量与刚度张量具有相同的对称特性,不过屈度常数上的约束类似于但并不总是与刚度常数上的约束相同(Auld,1973)。

8.1.2 地球中常见的对称系统

1. 各向同性

在均匀各向同性岩石中,所有平面都是对称平面,且弹性特性在所有方向都是相同的。各向同性通常是下列几种情况的结果。一是不含裂缝的固有各向同性,二是含随机分布裂隙的岩石,三是具随机分布的晶体或颗粒的岩石。

2. 横向各向同性(TI)

这时有一个柱对称轴,如图8.1.3中六方对称时的情况。横向各向同性据对称轴在空间定向是垂直还是水平,又分别称为具有垂直对称轴的横向各向同性(VTI)和具有水平对称

轴的横向各向同性(HTI)。VTI一般认为是周期性薄层(PTL)而形成(注意,周期性并不严格地是必要的(Backus 1962)),是地学中最早研究的一类各向异性。在地壳中,特别是在沉积盆地中,细微的层状岩石将导致PTL各向异性。HTI一般是平行排列的垂直裂隙、裂缝而产生。由于地壳中普遍存在平行排列的流体充填的垂直裂隙、微裂隙或优势定向排列的孔隙空间,Crampin等(1984)将这一现象称为广泛扩容各向异性(EDA)。

3. 正交对称

这种系统有三个互相正交的对称平面。正交对称在上地幔中被认为是由相对于扩张中心排列的正交晶体橄榄石引起。而在沉积盆地中,一般认为是由周期性薄层(PTL)和具水平对称轴的垂直裂缝的组合而导致的结果。值得指出的是,任何具有三个互相正交对称平面的应力张量也可导致正交对称。

4. 单斜对称

这种系统仅有一个对称平面。这种对称可由两套非正交的平行裂隙而形成,其对称平面垂直于两套裂隙面的交线。裂隙诱导形成的单斜对称很可能在近地表形成,在这里岩石静压力并没有关闭与最大主压应力相垂直的裂隙。

8.1.3 各向异性介质中地震波传播特性

在各向异性介质中地震波传播特性在许多方面不同于各向同性介质。本部分我们将给出各向异性介质中的Christoffel方程,相速度,群速度,极化等一系列概念和方程。

1. Christoffel方程

定义微分算子∇_s和$\nabla\cdot$(Auld,1973)

$$\nabla_s=\nabla_{ij}=\begin{bmatrix}\partial/\partial_x & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial_z\\ 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y\\ \partial/\partial_z & 0 & \partial/\partial_x\\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x & 0\end{bmatrix} \tag{8.1.3}$$

$$\nabla\cdot=\nabla_{ij}=\begin{bmatrix}\partial/\partial_x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y\\ 0 & \partial/\partial_y & 0 & \partial/\partial_z & 0 & \partial/\partial_x\\ 0 & 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y & \partial/\partial_x & 0\end{bmatrix} \tag{8.1.4}$$

其中 $i,j=x,y,z$; $I,J=1,2,3,4,5,6$.则一般的运动方程可写为简化的算子形式

$$\nabla\cdot\bar{c}\,\nabla_s u=\rho\ddot{u} \tag{8.1.5}$$

其中$\bar{c}$取式(8.1.2)形式,$u=(u_x,u_y,u_z)^{\mathrm{T}}$是位移矢量,$\rho$为密度。式(8.1.5)也可写成矩阵形式:

$$\nabla_{iK}C_{KL}\nabla_{Lj}u_j=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{8.1.6}$$

其中C_{KL}是$\underline{c}$的第K行第L列元素。

考虑在各向异性介质中平面波以速度v传播,其位移为

$$u_i = A \cdot p_i \exp[i(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - vt)] \tag{8.1.7}$$

其中 A 为标量振幅，p_i 为单位位移的第 i 个分量，$i=(-1)^{1/2}$，$\boldsymbol{x}$ 为位置矢量，$\boldsymbol{n}$ 为波传播方向，即

$$\boldsymbol{n} = \{\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\ \sin\psi, \cos\theta\} = \{n_x, n_y, n_z\}.$$

将式(8.1.7)代入式(8.1.6)后，则得一般的各向异性介质中 Christoffel 方程为

$$(\Gamma_{ij} - \rho v^2 \delta_{ij}) p_i = 0, \tag{8.1.8}$$

$$\Gamma_{11} = C_{11} n_x^2 + C_{66} n_y^2 + C_{55} n_z^2 + 2C_{56} n_y n_z + 2C_{15} n_z n_x + 2C_{26} n_x n_y$$

$$\Gamma_{22} = C_{66} n_x^2 + C_{22} n_y^2 + C_{44} n_z^2 + 2C_{24} n_y n_z + 2C_{46} n_z n_x + 2C_{26} n_x n_y$$

$$\Gamma_{33} = C_{55} n_x^2 + C_{44} n_y^2 + C_{33} n_z^2 + 2C_{34} n_y n_z + 2C_{35} n_z n_x + 2C_{45} n_x n_y$$

$$\Gamma_{12} = C_{16} n_x^2 + C_{26} n_y^2 + C_{45} n_z^2 + (C_{46} + C_{36}) n_y n_z + (C_{13} + C_{56}) n_z n_x + (C_{12} + C_{66}) n_x n_y$$

$$\Gamma_{13} = C_{15} n_x^2 + C_{46} n_y^2 + C_{35} n_z^2 + (C_{45} + C_{36}) n_y n_z + (C_{13} + C_{55}) n_z n_x + (C_{44} + C_{56}) n_x n_y$$

$$\Gamma_{23} = C_{56} n_x^2 + C_{24} n_y^2 + C_{34} n_z^2 + (C_{44} + C_{23}) n_y n_z + (C_{36} + C_{45}) n_z n_x + (C_{25} + C_{46}) n_x n_y \tag{8.1.9}$$

由式(8.1.8)知，Christoffel 方程的意义在于：如果已知传播介质的弹性常数，则可通过解方程而求得平面波的传播速度和偏振方向 $\{p_i\}$。

2. 相速度

由式(8.1.8)求得的速度即为相速度。因此相速度代表了平面波的速度。一般而言在均匀介质中相速度是恒定子波的某一点沿垂直于波前面的方向传播的速度。各向异性介质中，相速度具有角散(速度与方向有关)。在衰减介质中，相速度还具有色散(速度与频率有关)。

在各向同性介质中，相速度很容易求得，但在各向异性介质中，相速度的解析表达式一般不易求得，大多数情况只能求得某些特定面(如对称面)或特定方向(如对称轴)的表达式，如在 VTI 介质中，我们可由式(8.1.8)获得在过垂直对称轴平面的相速度为

$$v = [(B \pm (B^2 - 4C)^{1/2} / 2\rho]^{1/2}$$

其中

$$B = C_{44} + C_{33}\cos^2\theta + C_{11}\sin^2\theta$$

$$C = C_{44}(C_{11}\sin^4\theta + C_{33}\cos^4\theta) + C_{11}C_{33}\sin^2\theta\cos^2\theta - (C_{13} + 2C_{44})C_{13}\sin^2\theta\cos^2\theta$$

根号前“+”代表 qP 波，“-”代表“qSV 波。而 qSH 波的速度为

$$v_{SH} = [C_{66}\sin^2\theta + C_{44}\cos^2\theta)/\rho]^{1/2}$$

注意的是 qP，qSV 和 qSH 三种波是准 P 波，准 SV 波和准 SH 波。这里的“准”代表了波传播极化方向与传播方向既不平行也不垂直。此外可想像，对于其它的各向异性对称系统，相速度公式与上面的肯定不同。

3. 群速度(能量速度或射线速度)

在各向同性介质中，群速度与相速度相同。但在各向异性介质中，二者是不同的。不过在弹性介质中群速度、能量速度和射线速度是相同的。这个速度代表了波面(群速度面)和波能量从点源离开时沿某一给定方向向外辐射的速度。不像相速度，群速度可以通过测量

波离开点源传播的距离除以所用的时间而获得。因此，该速度也称射线速度。一般来说，各向异性介质会存在三个彼此分离的群速度面。但对于两个横波面而言并不总是分离，在许多地方可能是相切或相交的，且可能出现尖角(Cusps)。群速度的计算可通过相对波矢量微分频散关系中的频率而获得：

即
$$V_g = -\frac{\nabla_k \Omega}{\partial\Omega/\partial\omega}$$

这里 Ω 代表频散函数。群速度也可通过相速度的包络来构造，图 8.1.4 表明了横波在假想的 TI 介质中相速度面与群速度面的关系。

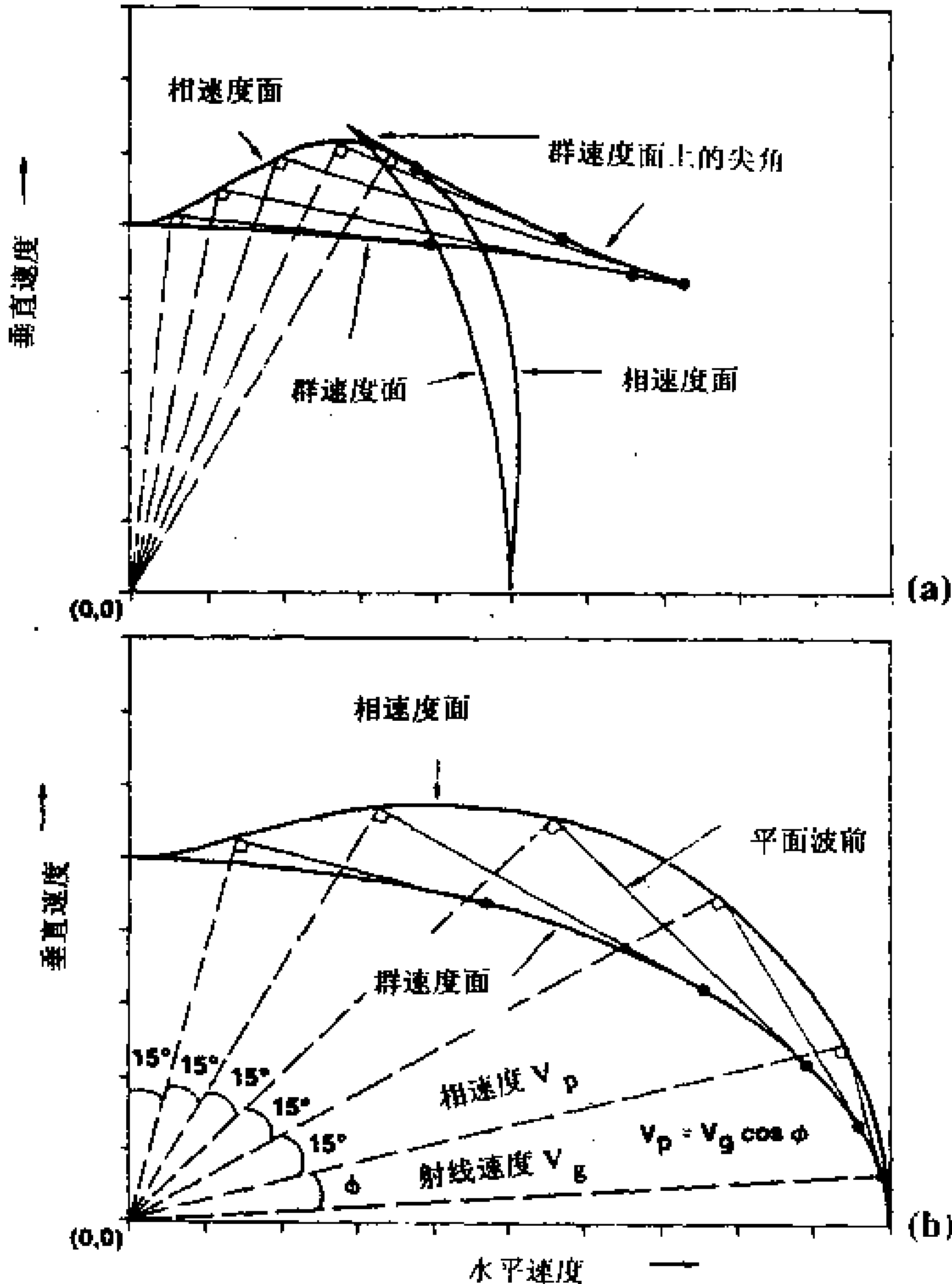


图 8.1.4　假想的 TI 介质中横波相速度面与群速度面

4. 极化方向与极化图

弹性波的极化由粒子运动的几何特性组成，它包括运动轨迹形状和空间方位，但不包括运动的幅值大小。当粒子运动是沿某一直线时，极化称为线性的，具有极性。极化当然也可是任意形状的，即非线性的。

分离的体波在无噪声时极化是线性的。在各向同性介质中，这样的体波极化对 P 波而言是平行波传播方向，对 S 波而言是垂直于传播方向。但在各向异性介质中，极化常常即不

平行也不垂直于波传播的相速度方向或射线方向。因此，粒子运动普遍是准P波的或准S波的，如图8.1.5所示。

当极化是平行或垂直于相速度方向时，这种极化称为纯(pure)极化。

需要指出的是，由于实践中常使用具有极化的源和接收器，因此有必要区分波的极化方向和接收器本身的极化方向。很明显，波的极化方向不是人为的而是由波通过的各向异性介质所确定。为了与源或接收器的极化方向相区别，有人专门使用天然极化方向或天然地球极化方向。但这种叫法也有缺点，即使人误认为极化方向由独立于波传播的介质所固定。

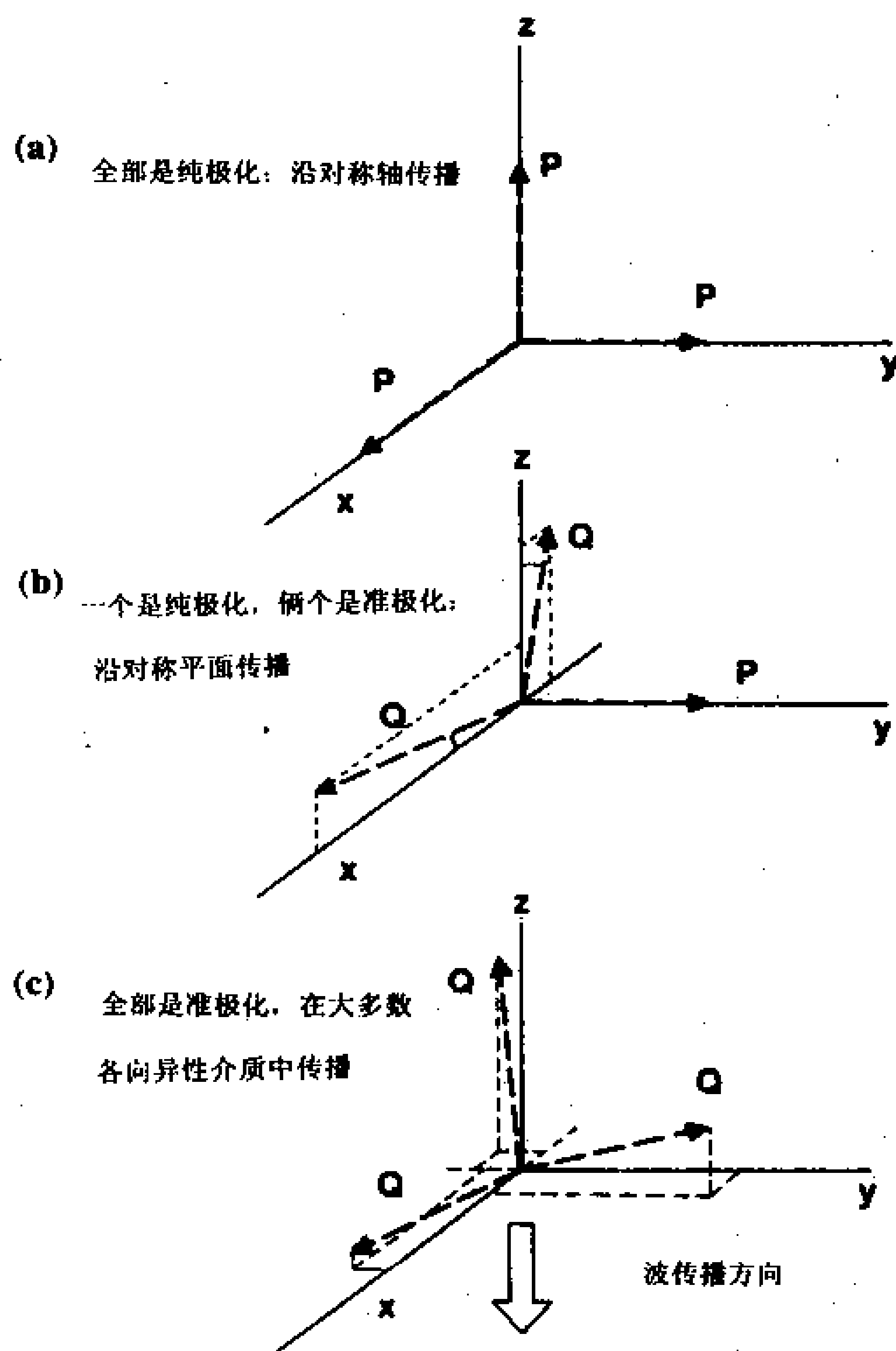


图8.1.5　波在各向异性介质中极化的可能情况

*P*指示纯极化，*Q*指示准极化。波传播方向是垂直的

极化图也称矢端曲线(hodogram)，是粒子轨迹的一种显示方式，且常常是将其作为地震数据两个正交分量所选时窗的十字图投影到某一平面上的结果。

5. 速度各向异性

在均匀介质中波传播速度随传播方向的变化即为速度各向异性。注意这里的均匀性是

指在一个波长或一个波长以上的距离上介质是均匀的。速度各向异性的大小在不同的情况下以不同的方式指定。Crampin(1989)认为速度各向异性通常是定义为$(V^{max}-V^{min})/V^{max}\times 100$($V^{max}$和$V^{min}$是最大速度和最小速度),即速度最大变化的一个百分比度量。这样的速度各向异性在所观测的范围内被认为是各向异性的大小。总之,在速度各向异性定量表达时一定要将该量所指的意思给以精确说明。

6. 横波分裂

横波分裂有时也称横波双折射(birefringence 或 bouble refraction),指的是一个横波在进入各向异性的介质中一般分裂成由特定传播方向而固定的近正交极化的按不同速度传播的两个(或更多)的准横波。唯一的例外是在入射波平行于某个固定极化方向时,只有一个分裂的横波在传播。横波分裂是均匀各向异性介质的一个特有特征,因而是在复杂的地球结构中各向异性存在的最好诊断信息。

8.2 横波分裂的理论模型与实验证实

横波分裂不仅是地下各向异性存在的最好证据,而且使利用横波进行勘探,以研究地下裂缝方位和裂缝密度变成了一种有效的地球物理手段。本节重点介绍导致横波分裂的两个最流行的裂缝模型、物理实验的观测结果和实验与理论的对比。

8.2.1 Hudson 裂隙理论

裂缝对固体的弹性效应理论已有很久的历史了,最早的可追溯到了 1957 年 Eshelby 的经典论文。Hudson(1980,1981)建立的彼此隔离的薄裂隙理论是第一个最广泛地应用来解释地震横波速度各向异性以及裂缝方向和裂缝强度的。因此我们首先叙述这一理论模型。

Hudson 理论的基础假设是

(1) 岩石包含了比地震波长小得多的称疏排列的裂隙;

(2) 裂隙是分离的扁球体,以致于不能有流体流动;

(3) 裂隙是薄的,即裂隙的最大最小尺寸之比(也称纵横比)小于 0.3;

(4) 裂隙内充满了气体、液体或一种比骨架岩石的体模量和剪切模量更小的软弱固体;

(5) 裂隙是排列的,因此岩石是有效各向异性的。

在上述假设下,Hudson 从弹性动力学微分方程出发,建立了精确到裂隙密度 $\epsilon=Na^3/V$ $(\epsilon<<1)$的二阶项的散射均匀场微积分方程(这里 N 为在具有拉梅常数λ 和μ 的各向同性固体的体积V 中半径为a 的裂隙数目)。由该微积分方程进一步得到了适用于长波长地震波通过含裂隙固体时的有效弹性常数 C_{ij}的一般表达式是:

$$C_{ij}=C_{ij}^0+C_{ij}^1+C_{ij}^2 \tag{8.2.1}$$

其中 C_{ij}^1、C_{ij}^2分别是不含裂隙时固体的弹性常数 C_{ij}^0的一阶和二阶摄动量。

假设裂隙的法线在各向同性固体中的 x_1 轴方向(水平方向),则有效的一阶摄动量可写为(Crampin,1984),

$$C_{ij}^1 = -\frac{\varepsilon}{\mu}\begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)^2 & \lambda(\lambda+2\eta) & \lambda(\lambda+2\mu) & & & \\ \lambda(\lambda+2\mu) & \lambda^2 & \lambda^2 & & & \\ \lambda(\lambda+2\mu) & \lambda^2 & \lambda^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \mu^2 & \\ & & & & & \mu^2 \end{bmatrix} D, \tag{8.2.2}$$

二阶摄动量可写为

$$C_{ij}^2 = -\frac{\varepsilon^2}{15}\begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)q & \lambda q & \lambda q & & & \\ \lambda q & \lambda^2 q/(\lambda+3\mu) & \lambda^2 q/(\lambda+2\mu) & & & \\ \lambda q & \lambda^2 q/(\lambda+2\mu) & \lambda^2 q/(\lambda+2\mu) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & x & \\ & & & & & x \end{bmatrix} D^2, \tag{8.2.3}$$

其中

$$q = 15(\lambda/\mu)^2 + 28(\lambda/\mu) + 28;$$
$$x = 2\mu(3\lambda+8\mu)/(\lambda+2\mu); \tag{8.2.4}$$

D 是具有迹为$(U_{11}, U_{11}, U_{11}, 0, U_{33}, U_{33})$的对角线矩阵。量 U_{km}, $k, m = 1, 3$,取决于裂隙面上的条件,且是由 x_m方向的牵引力引起的跨过裂隙时位移不连续的第 k 个分量的μ/a倍的裂隙面上的积分(Hudson 1981)。

上述弹性常数对于多个平行的裂隙系统也可完全确定。只是 U_{11}和 U_{33}要针对特定的裂隙形状而计算。具有不同参数和不同方位的裂隙的混合物的弹性常数也可获得。办法是把分别对具有适当的 ε, U_{11}和 U_{33}及适当方位的混合体中的每个平行部分独立计算的摄动量$(C_{ij}^1 + C_{ij}^2)$全部加起来。

Hudson(1981)就具有半轴为 a, a 和 c,且纵横比 $d = c/a(c << a)$,充满具有拉梅常数为 λ'和μ'的弱各向同性材料的椭球包裹体在长波长极限下求得了 U_{11}和 U_{33}的表达式。具体是

$$U_{11} = (4/3)[(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)]/(1+K);$$
$$U_{33} = (16/3)[(\lambda+2\mu)/(3\lambda+4\mu)]/(1+M) \tag{8.2.5}$$

其中 $K = [(k' + (4/3)\mu')/(\pi d\mu)][(\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu)]$,

$M = [4\mu'/\pi d\mu)][(\lambda+2\mu)/(3\lambda+4\mu)]$,

$k' = \lambda' + (2/3)\mu'$(弱材料的体积模量)。

在一般式(8.2.5)下,我们很容易获得裂隙充满水和干裂隙这两种情况下的 U_{11}和 U_{33}。当饱和水充填裂隙时,$\mu' = 0$, $k' = \lambda' \approx 2.25\times10^9\text{Nm}^{-2}$,因此对于薄裂隙 $d\approx0$ 的条件下,

$$U_{11} = 0, U_{33} = (16/3)(\lambda+2\mu)/(3\lambda+4\mu)。$$

当裂隙为干的时,$\mu' = \lambda' = 0$,因此

$$U_{11} = (4/3)(\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu), \quad U_{33} = (16/3)(\lambda+2\mu)/(3\lambda+4\mu)。$$

根据上述含裂隙介质的弹性常数公式,侯安宁等(1995)推导出了相应的三维相速度公式。具体是

$$
\begin{aligned}
V_{qP} &= 1/2[a\sin^2\theta\cos^2\psi + b(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)] \\
&\quad + 1/2[(c\sin^2\theta\cos^2\psi - d(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)^2 \\
&\quad + 4e^2\sin^2\theta\cos^2\psi(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)]^{1/2} \\
V_{qS1} &= 1/2[a\sin^2\theta\cos^2\psi + b(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)] \\
&\quad - 1/2[(c\sin^2\theta\cos^2\psi - d(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)^2 \\
&\quad + 4e^2\sin^2\theta\cos^2\psi(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)]^{1/2} \\
V_{qS2} &= g\sin^2\theta\cos^2\psi + h(\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)
\end{aligned}
\tag{8.2.6}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_b^2[\gamma_b + 1 - \varepsilon(\gamma_b^2 U_{11} + U_{33}) + \varepsilon^2/15(q\gamma_b U_{11}^2 + 3 + 2/\gamma_b)U_{33}^2)], \\
b &= \beta_b^2[\gamma_b + 1 - \varepsilon((\gamma_b - 2)^2 U_{11} + U_{33}) \\
&\quad + \varepsilon^2/15((\gamma_b - 2)^2/\gamma_b)\cdot qU_{11}^2 + (3 + 2/\gamma_b)U_{33}^2)], \\
c &= \beta_b^2[\gamma_b - 1 - \varepsilon(\gamma_b^2 U_{11} - U_{33}) + \varepsilon^2/15(q\gamma_b U_{11}^2 - (3 + 2/\gamma_b)U_{33}^2)], \\
d &= \beta_b^2[\gamma_b - 1 - \varepsilon((\gamma_b - 2)^2 U_{11} - U_{33}) \\
&\quad + \varepsilon^2/15(\gamma_b - 2)^2 qU_{11}^2/\gamma_b - (3 + 2/\gamma_b)U_{33}^2)], \\
e &= \beta_b^2[\gamma_b - 1 - \varepsilon((\gamma_b - 2)\gamma_b U_{11} + U_{33}) \\
&\quad + \varepsilon^2/15((\gamma_b - 2)qU_{11}^2 + (3 + 2/\gamma_b)U_{33}^2], \\
g &= \beta_b^2(1 - \varepsilon U_{33} + \varepsilon^2/15(3 + 2/\gamma_b)U_{33}^2), \\
h &= \beta_b^2, \\
\beta_b^2 &= \mu/\rho, \quad \gamma_b = \alpha_b^2/\beta_b^2, \quad \alpha_b^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho.
\end{aligned}
$$

根据上述有关公式，对于特定水饱和的及干的平行裂隙，其裂隙密度 $\varepsilon = 0.1$，嵌入到有密度 $\rho = 2.6\times10^3\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，纵波速度 $\alpha = 5800\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 和横波速度 $\beta = 3349\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的各向同性介质中时弹性常数由表 8.2.1 给出，其相应的相速度计算由图 8.2.1 给出。

表 8.2.1　　Hudson 理论下弹性常数的扰动量(单位 $10^9\mathrm{N\cdot m^{-2}}$)

	干裂隙		水饱和裂隙	
ij	C_{ij}^1	C_{ij}^2	C_{ij}^1	C_{ij}^2
11	-52.473	16.555	-0.142	0.000
33	-5.825	1.838	-0.016	0.000
23	-5.825	1.838	-0.016	0.000
13	-17.483	5.516	-0.047	0.000
44	0.000	0.000	0.000	0.000
66	-6.666	0.745	-6.666	0.745

8.2.2　Hudson 理论的实验证实

Peacock 等(1994)使用了简单的岩石——Carrara 大理石(100%的纯钙质碳酸盐)作为测

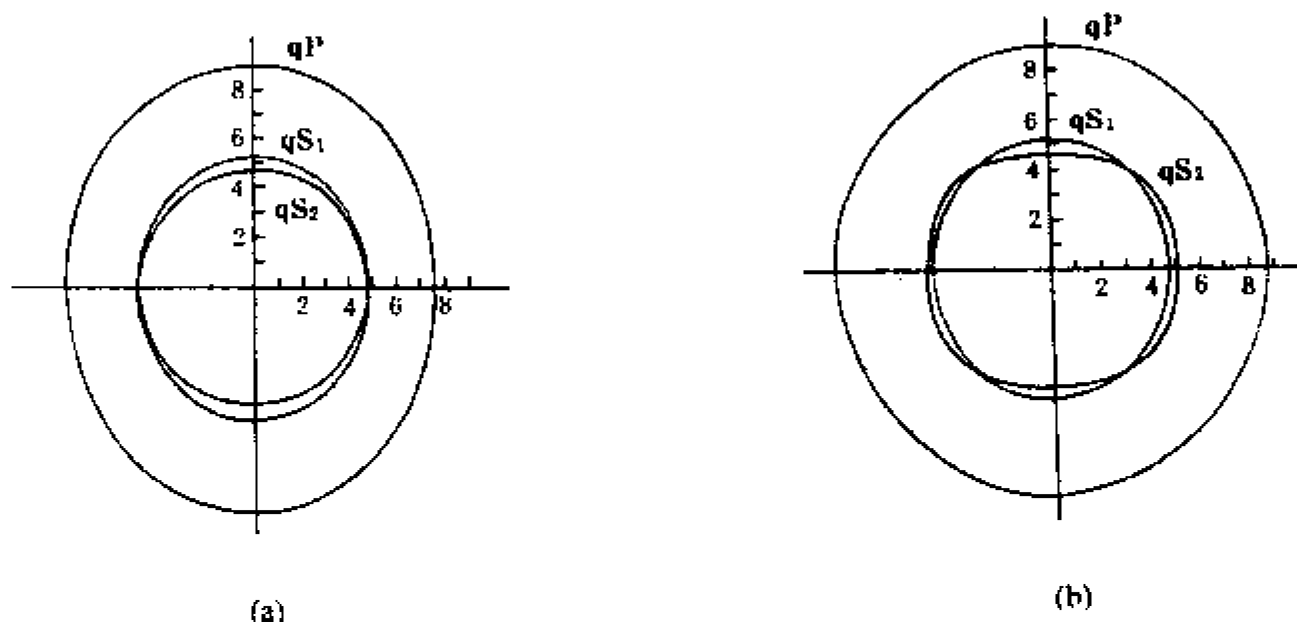


图 8.2.1 Hudson 理论下弹性波相速度(参数见表 1)
a.干裂隙;b.水饱和裂隙

试 Hudson 裂隙理论的岩样。他们的实验步骤是:

(1) 测量干的和水饱和无裂隙大理石岩样的纵波、横波速度和衰减;

(2) 通过高围压力使岩样超过屈服点而在岩样中形成永久的形变;

(3) 再次测量地震特性;

(4) 将地震特性的变化与在磨光的岩样截面上看到的裂隙联系起来。

实验中 Peacock 等用的脉冲信号是频率为 0.85 或 1MHz 延续为 3~5 个周期的正弦波。岩样的围压 60MPa 到 5MPa 变化。换能器的中心频率是 1MHz。假设波是平面波,使用脉冲回声波计算了所测岩样的速度和衰减。图 8.2.2 给出了脉冲回声测量所用的超声信号的射线路径,图 8.2.3 为所测的脉冲回声信号。

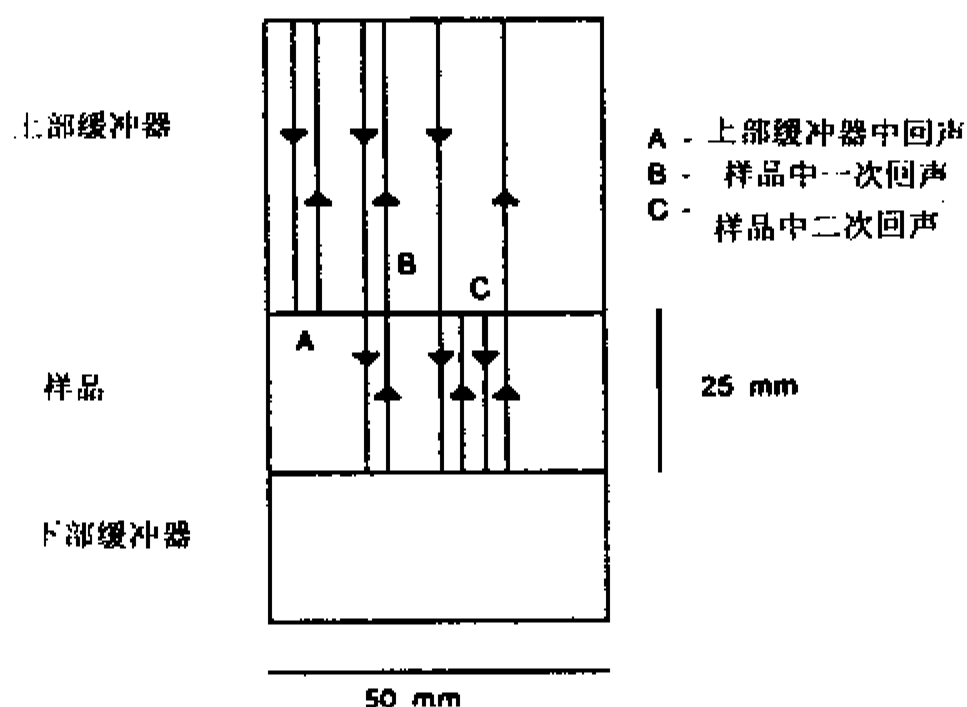


图 8.2.2 脉冲回声测量所用的超声信号射线路径

在对岩样进行了超声测量后,对岩样又进行了截剖以用于裂隙参数的分析。裂隙计算是从磨光剖面的照片上手工进行。具体是在每张相片上面置上正交网格线,并测量与每一

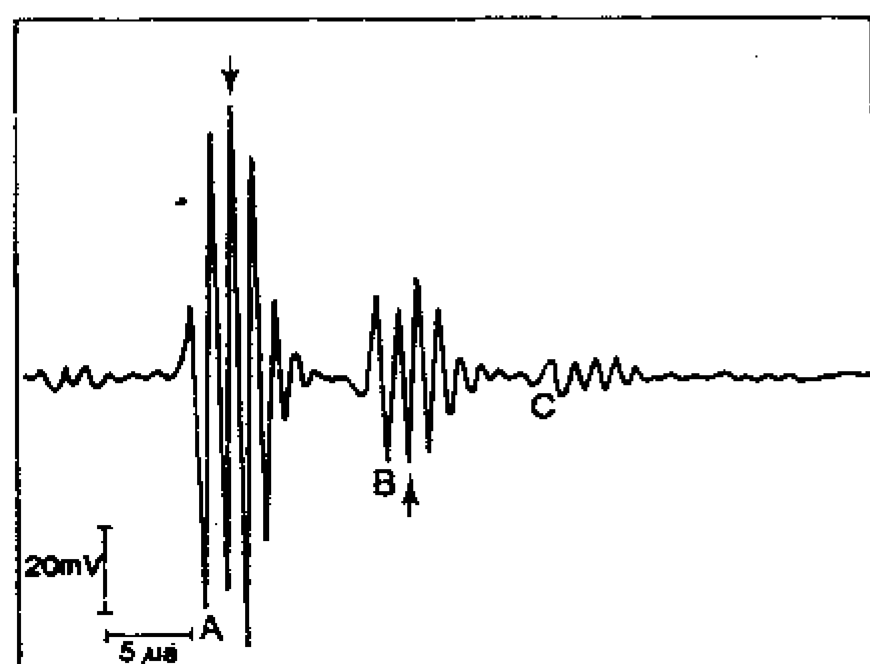


图 8.2.3　来自 Arenberg 脉冲化振荡器上的采样脉冲回声信号
三个到时相应于图 8.2.2 中的射线路径。箭头指示了所测到时的信号峰值

条线相交的每个裂隙的方位和长度，见图 8.2.4。

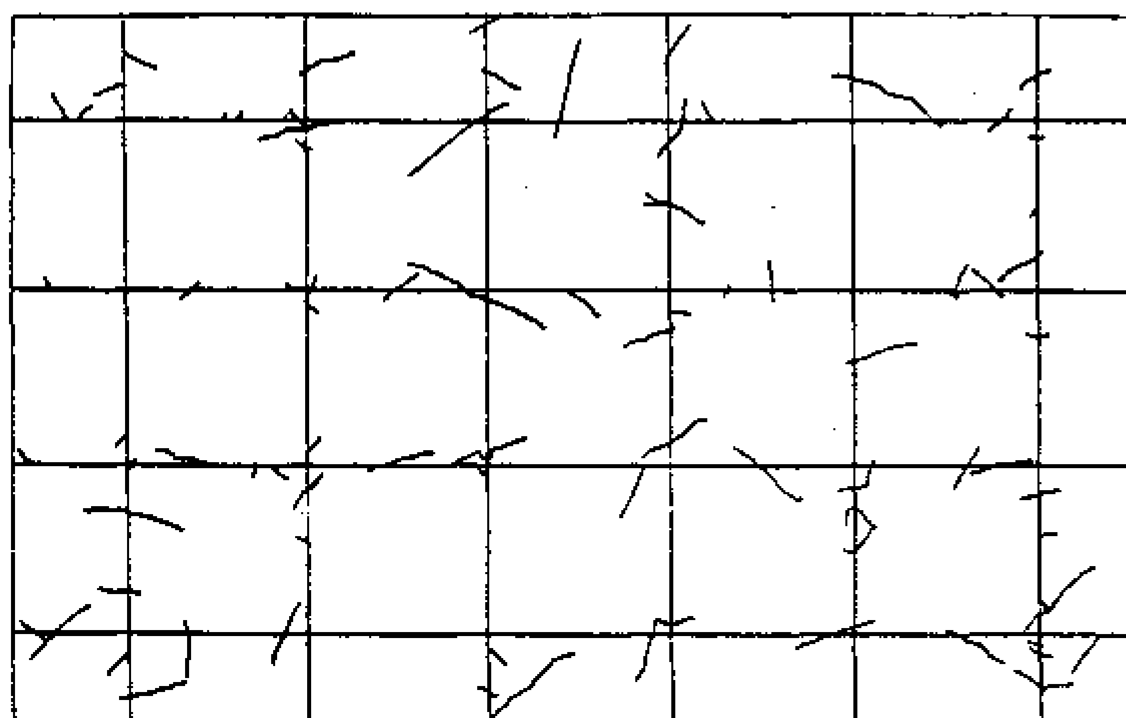
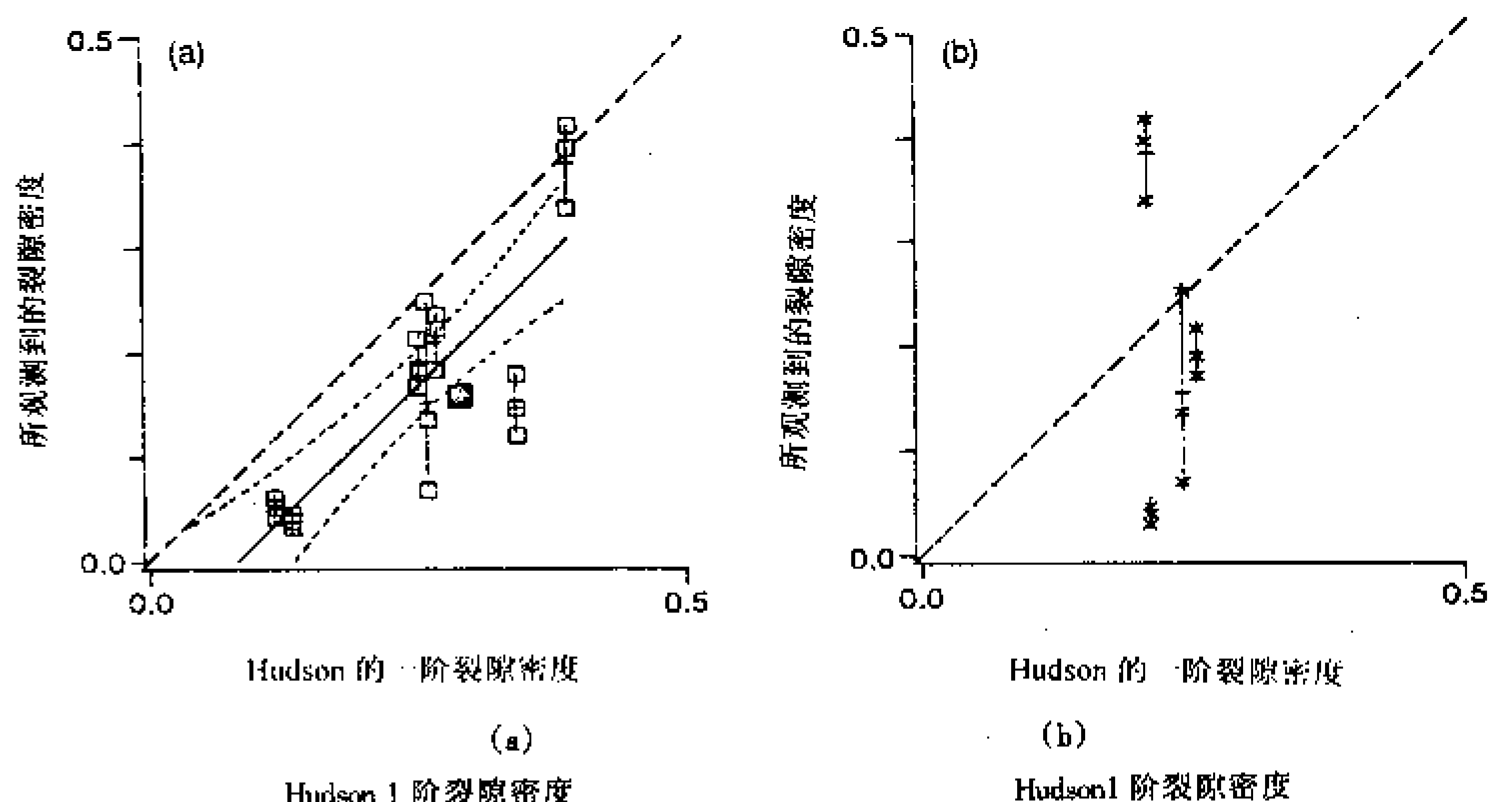


图 8.2.4　用于裂隙计算的网格和从相片上计数的裂隙

通过对 8 个大理石岩样进行超声纵横波的速度测量获得了速度随围压的变化（干岩样），速度随有效压力的变化规律（饱和岩样）和横波速度随极化的变化规律。此外通过对磨光岩样（其中有 7 个岩样是在形变之后，只有一个岩样未作形变）分析获得了裂隙密度，裂隙方位和方解石晶体轴的方位。

Percock 等对上述结果进行了反演，以给出裂隙密度，并将这个裂隙密度与从磨光剖面上计数裂隙而得的裂隙密度进行了比较。其结果见图 8.2.5。

从图 8.2.5a 知，理论与观测的裂隙密度之间的完全一致应该产生最小平方拟合线的梯度为 1 和截距为 0。理论预测的梯度为 1，但截距在观测裂隙密度轴上是低于零的，即 0.08 ±0.08。这说明了 Hudson 理论对于干岩而言能很好地预测裂隙密度，但系统地比观测值低约 0.08。



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

Hudson 1 阶裂隙密度　　　　　　　　Hudson1 阶裂隙密度

图 8.2.5　在 Carrara 大理石岩样中观测的与理论的裂隙密度(由 Hudson 理论的一阶项预测的)

(a) 干岩样,实线是最小平方拟合的裂隙密度,短虚线是 95%的可信度限,
长虚线是理论与观测一一对应的线,垂直线表示由某一岩样的三个正交剖
面而得的观测裂隙密度;　(b) 水饱和裂隙岩样

从图 8.2.5b 知,对水饱和岩样而言,理论裂隙密度剧裂地随观测裂隙密度增加而上升。因此,Peacock 等得出的主要结论是

(1) 对于干岩样而言,一阶理论预测的很好,因此多次散射直到裂隙密度为 0.4 时是不重要的。对于饱和裂隙而言,实验结果与理论不一致。

(2) 我们能够探测表明快分裂横波和慢分裂横波的速度差直到 3% 的横波分裂(横波双折射)。正像 Hudson 理论预测的那样,这个横波分裂是由矿物排列和裂隙排列两者共同引起的结果。

(3) 上述结论是在长波长条件下成立的,且可应用于在 50 ~ 200Hz 下进行的对干的储层岩石的野外的地震测量。但对饱和岩而言,需要对地震频率处裂隙中流体流动引起的色散作一些校正。

8.2.3　Thomsen 裂隙理论与实验证实

前面已阐明了 Hudson 给出的裂隙理论,其中有一个基本假设是流体被限定在裂隙内,即一个裂隙内的流体与材料中其它裂隙或孔隙内的流体之间无任何联接。这个假设当然对干岩而言不会有任何影响且在许多情况下对饱和岩也是可接受,只要声频是足够高的。然而这个假设意味着随声波应力场而改变的流体压力对于不同方位的裂隙是不同的,且对裂隙和孔隙也是不同的。就低频弹性波而言,这样局部产生的流体压力差在裂隙和孔隙之间为液压连接时是不会出现的。

Thomsen(1995)已发展了这样的一个模型,即材料包含了一套平行的与等径孔隙液压连接的裂隙。这个模型的基本假设是流体压力的局部平行。此外,Hudson 理论中不包括等径孔隙的效应。实际上,由于裂隙和孔隙之间流体流动,孔隙对各向异性也有一定的影响。

Thomsen 裂隙理论是在引入一套 Thomsen 各向异性参数的基础上给出的。这套参数在具有单独一个对称轴的弱各向异性弹性介质假设下成立。下面我们首先定义这套参数,然

后叙述 Thomsen 裂隙理论和实验证实。

定义，

$\alpha_0=(C_{33}/\rho)^{1/2}$，$\beta_0=(C_{44}/\rho)^{1/2}$分别为对称轴方向的 P 波和 S 波速度，且引入三个相互独立的各向异性参数：ϵ，δ 和 γ，即

$$\epsilon\equiv\frac{C_{11}-C_{33}}{2C_{33}},\quad \gamma\equiv\frac{C_{66}-C_{44}}{2C_{44}} \tag{8.2.7}$$

$$\delta=\frac{(C_{13}+C_{44})^2-(C_{33}-C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33}-C_{44})}$$

则相速度可表达成下列形式，

$$\begin{aligned}\bar{v}_p^2(\theta)&=\alpha_0^2[1+2\delta\sin^2\theta\cos^2\theta+2\epsilon\sin^4\theta]\\ \bar{v}_{s\perp}^2(\theta)&=\beta_0^2[1+(2\cdot\alpha_0^2/\beta_0^2)(\epsilon-\delta)\sin^2\theta\cos^2\theta\\ \bar{v}_{s//}^2(\theta)&=\beta_0^2[1+2\gamma\sin^2\theta].\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

其中，θ 是波前法线与对称轴之间的角，横波 $S_{//}$ 是平行于对称平面（即平行于裂隙）极化的，横波 $S_{\perp}$ 是于 $S_{//}$ 极化正交的具有垂直于对称平面的非零分量（这两个横波有时也分别称为 SH 和 SV 波，但这样的概念在对称平面不是水平时容易混淆）。

在排列的裂隙引起的各向异性情况下，各向异性参数可以进一步具体化。在假设裂隙是圆椭球体（即“硬币形状”），完全排列且稀疏分布在由各向同性颗粒组成的孔隙介质中，Thomsen 给出的裂隙固体的各向异性参数是

$$\epsilon=\left(\frac{8}{3}\right)\left(1-\frac{k_f}{k_s}\right)D_{ci}\left[\frac{(1-\nu^{*2}E}{(1-\nu^2)E*}\right]\eta_c$$

$$\gamma=\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1-\nu^*}{2-\nu^*}\right]\eta_c \tag{8.2.9}$$

$$\delta=2(1-v)\epsilon-2\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\gamma$$

在(8.2.9)式中，k_s 是固体颗粒的不可压缩性，k_f 是裂隙中流体的不可压缩性，ν 和 E 分别是无裂隙时各向同性孔隙岩石的泊松比和杨氏模量，ν^* 和 E^* 分别是干各向同性孔隙岩石的相应泊松比和杨氏模量。

(8.2.9)式中的 η_c 是裂隙密度，它与各向异性参数的关系是线性的。裂隙密度可据裂隙直径的立方平均与裂隙的密度数 N_v 写为

$$\eta_c=N_v\langle a^3/8\rangle \tag{8.2.10a}$$

或据裂隙孔隙度 ψ_c 和裂隙纵横比 c/a（厚度/直径）等价地写为

$$\eta_c=\frac{3}{4\pi}\frac{\psi_c}{(c/a)} \tag{8.2.10b}$$

Thomsen 裂隙理论的主要贡献在于(8.2.9)式中的流体影响因子 D_{ci}，在低频极限时可具体为

$$D_{ci}(\text{低频})=[1-k_f/k_s+k_f/k^*\psi\{(1-k^*/k_s)+A_c(v^*)\eta_c\}]^{-1}, \tag{8.2.11a}$$

其中 k^* 是干的各向同性孔隙岩石的不可压缩性，ψ 是岩石的总孔隙度（裂隙加孔隙等的孔隙度），A_c 是 ν^* 的一个函数，即

$$A_c(\nu^*) = 16/9(1 - \nu^{*2}/1 - 2\nu^*).$$

D_{ci}的下标指示在任意同位素的孔隙(包括等径孔隙,随机定位裂隙和孔喉,但它们都是液压连接的)各向同性介质中的裂隙。

上面提到的低频意思是频率足够低以致于对于流体压力而言有时间使裂隙和临近孔隙之间局部达到平衡。换句话说,这个频率比射流频率(是一种表征岩石裂隙孔隙微观几何细节和流体特征有关的特性)低的多。射流频率对盐水充填岩石而言通常位于声和超声带之间的某一处。因此,对应用于地震频带数据而言,低频近似是合适的。

但在适当高频时,流体根本没有时间在局部微观几何的各个部分之间流动,这时 D_{ci}应表达为

$$D_{ci}(\text{适当高频}) \approx [1 - k_f/k_s + k_f/k^* \cdot \{A_c(\nu^*) \cdot \eta_c(1 - k_f/k_s)/\psi_c(1 - k_f/k)\}]^{-1}. \tag{8.2.11b}$$

这个适当高频近似对分析超声数据是有用的。值得注意的是,(8.2.11a)与(8.2.11b)之间的主要差别是孔隙度在低频时是总孔隙度 ψ,而在适当高频时是裂隙孔隙度 ψ_c。由于这两个孔隙度通常差别很大,因此这种差别的数值结果具有重大价值。物理上,这两个孔隙度表明了裂隙形变(波通过期间)所受压力的流体的体积量:低频时是总孔隙体积,而适当高频时是单独裂隙体积。

Thomsen 的裂隙理论已由 Rathore 等(1994)所发展的具有已知裂隙几何的人工岩样技术在实验室进行了证实。以前的人造排列"裂隙"是通过叠加一些玻璃片而构成,因而裂隙的形状是由玻璃表面上未知的形状而确定。与此相反,Rathore 等(1994)的技术是通过胶合砂岩颗粒在一起制作人工孔隙岩石,且在该岩石里嵌入已知大小、形状、方位和分布的金属盘。这些金属盘再用化学方法滤掉,结果留下了具有砂岩孔隙度和渗透率的盘形空隙。

Rathore 等的实验使用了合成岩样,将 Hudson(1981)和 Thomsen(1995)两套理论预测结果与实验结果进行了比较。表 8.2.2 给出了各向异性参数,对于 Hudson 理论也按 Thomsen 参数作了定义。

图 8.2.6 表明了饱和时的情况。图 8.2.6a 是由最高频率约 80kHz 到达的波形初至而获得的数据。图 8.2.6b 是代表目前最低频率(约 30kHz)的波形初至而得的数据。由图 8.2.6a 知,从两个理论计算的结果彼此间是十分一致的,且与实验数据也是十分一致的。但是 P 波和 S 波的各向异性变化(包括横波分裂)都没有拟合了。

图 8.2.6b 表明了低频时的饱和数据,这是解释地震数据最感兴趣的情况。像理论讨论的一样,低频时流体压力平衡的主要效应是作用在 P 波各向异性和临界角上(该角处两个横波具有相等的速度)。注意实验数据在低频时与 Thomsen 理论(实线)很好地吻合了。不仅

表 8.2.2　　参数:输入的和导出的输入岩石参数

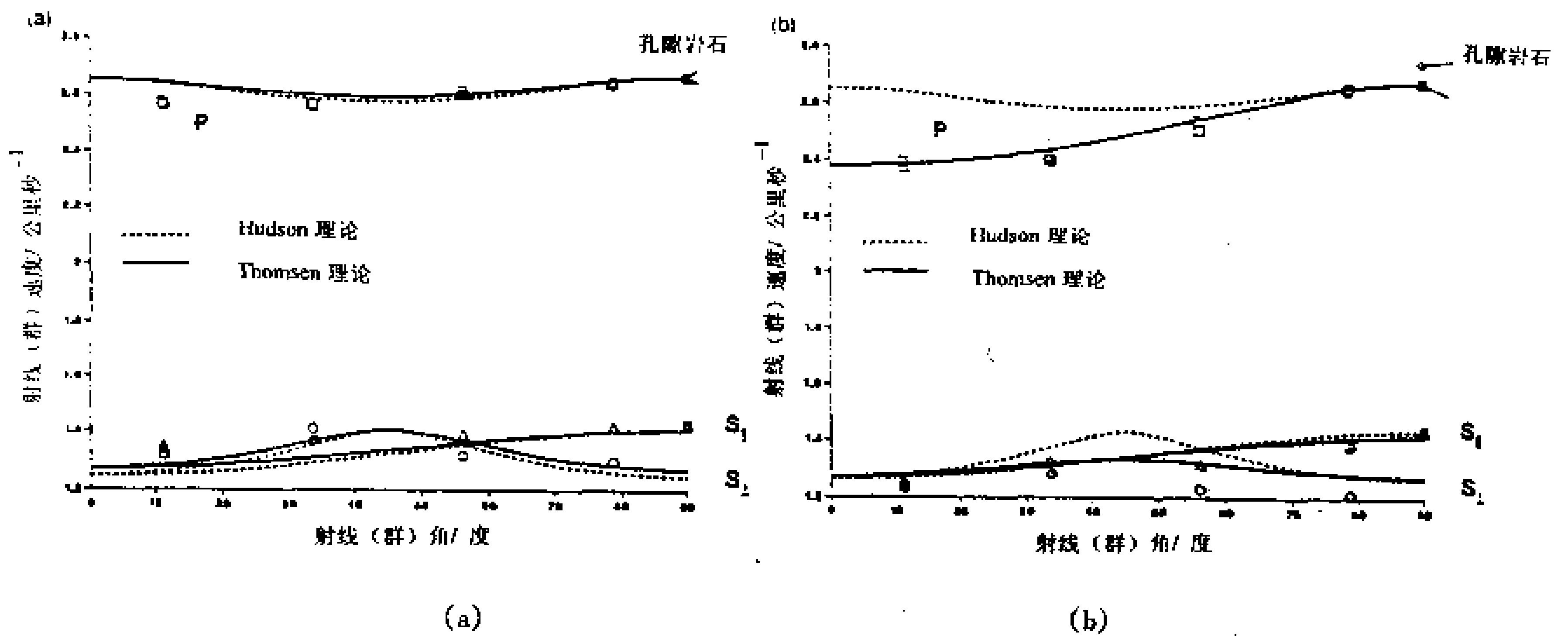
	干	饱和	输入裂隙参数	
$V_p(90°)(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	2.56	2.67	裂隙密度 η_c	0.100
$V_{s11}(90°)(\mathrm{kms^{-1}})$	1.52	1.41	裂隙孔隙度 ϕ_c	0.0023
$K_f(\mathrm{Mpsi})$	0.0	0.32	纵横比 c/a	0.0036
$\rho(\mathrm{gcm^{-3}})$	1.722	2.072	等径孔隙度 ϕ_p	0.35

Thomsen 导出参数

	饱和 低频 (图 8.2.6a)	饱　和 适当高频 (图 8.2.6b)	干 (图 8.2.7a,b)
$\alpha_0(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	2.38	2.07	2.07
$\beta_0(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	1.27	1.37	1.37
ε	0.139	0.005	0.267
δ	0.091	-0.097	0.277
γ	0.115	0.115	0.115
ν	0.321	0.307	0.241
$\alpha(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	2.75	2.67	2.61
$\beta(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	1.41	1.41	1.52
K_S(Mpsi)	4.55	3.19	—

Hudson(1981, §3.3)导出参数

	饱和 (图 8.2.6a,b)	干的 (图 8.2.7a,b)
$\alpha_0(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	2.67	2.65
$\beta_0(\mathrm{km \cdot s^{-1}})$	1.41	1.52
ε_H	0.006	0.267
δ_H	-1.113	0.248
γ_H	0.109	0.114
$\nu_s(f)$	0.307	0.254



(a)　　　　(b)

图 8.2.6　(a)据 IKU 岩样 901c(饱和)解释的数据,适当高频情况;
(b) 据 IKU 岩样 901c(饱和)解释的数据,低频情况

如此,Thomsen 理论很好地预测了角度有关的衰减和色散,Hudson(1981)理论包括了散引起的衰减而明显忽略了相应的色散。

图 8.2.7 表明了干裂隙的情况。Thomsen 理论确实表明了 P 波和 S 波各向异性与实验结果很好定量一致,而 Hudson 理论严重地高估了 P 波各向异性,但横波各向异性还是很好

地解释了。

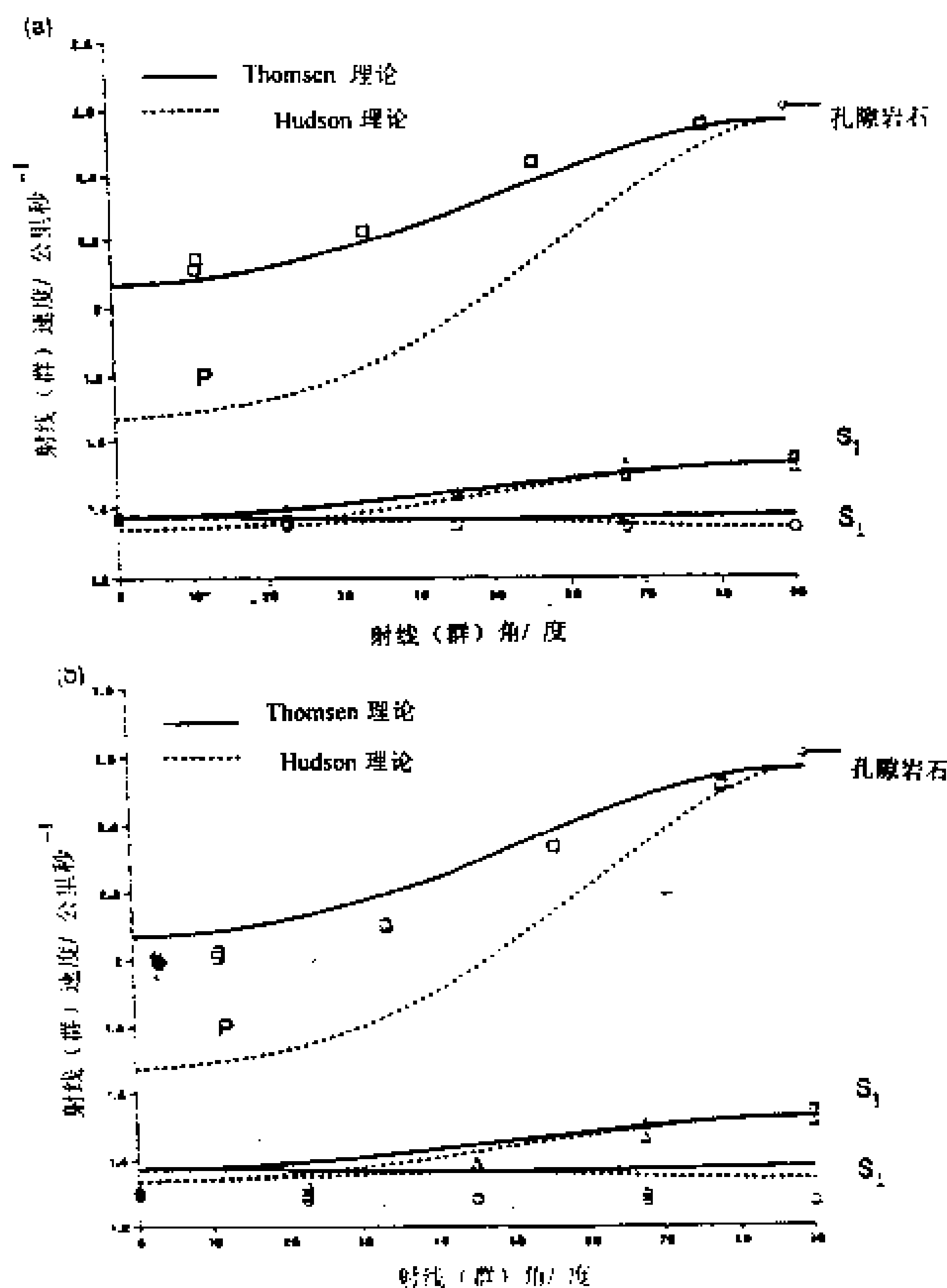


图 8.2.7 (a)据 IKU 岩样 901c(干)解释的数据,适当高频情况;
(b) 据 IKU 岩样 901c(干)解释的数据,低频情况

从以上理论和实验可知,裂隙的形状细节是不重要的,只要裂隙是薄的。各向异性的程度主要由裂隙密度确定。

8.3 垂直地震剖面检测裂缝

本节首先给出垂直地震剖面(VSP)资料用于检测裂缝的理论分析,然后重点叙述三分量 VSP 数据的处理流程和主要处理方法,最后给出遗传算反演用于估算横波分裂的方法原理(遗传算法反演方法可有效地用于三分量 VPS 资料的裂缝检测,适用于四分量或九分量地震资料的 Alford 旋转法等将在 8.4 节中详细介绍)。

8.3.1 VSP 资料用于检测裂缝的理论分析

为了进一步建立估算横波分裂的方法技术,本部分借助于侯安宁等(1995)求三维裂隙介质中 Green 函数的 Weyl 积分思想,导出了裂隙介质中的 VSP 记录;在此基础上应用各向

异性介质中波动方程的伪谱法(侯安宁等,1994)模拟了含不同裂隙方位的介质中的 VSP 记录;最后应用该解析表达式分析了所模拟的 VSP 记录中的横波分裂特征,即快横波极化方向和快慢横波到时之间的延迟特征。

1. 含裂隙介质中横波分裂的解析式

假设裂隙是垂直平行地排列分布于岩石当中。裂隙的走向与观测坐标系的 X 轴(正北)之间的夹角为 θ(我们规定从 X 轴到裂隙走向顺时针为正),如图 8.3.1。

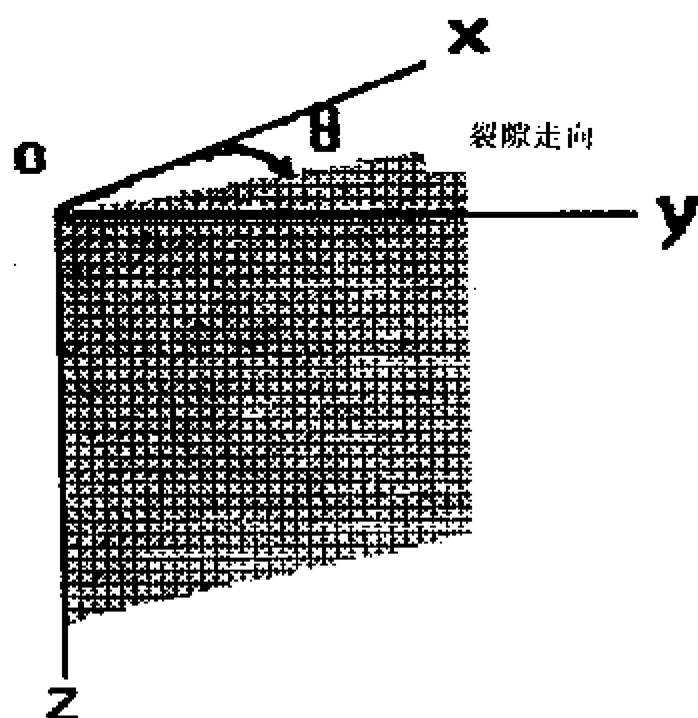


图 8.3.1 裂隙走向与观测坐标系间的关系。θ 角由 X 轴顺时针到裂隙走向为正

在图 8.3.1 的坐标系下,含裂隙等价各向异性介质中横波水平位移 U_x 和 U_y 满足方程[侯安宁,1994],

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_x=\frac{\partial}{\partial z}\left[A_{55}\frac{\partial U_x}{\partial z}+A_{45}\frac{\partial U_y}{\partial z}\right]+F_x$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_y=\frac{\partial}{\partial z}\left[A_{45}\frac{\partial U_x}{\partial z}+A_{44}\frac{\partial U_y}{\partial z}\right]+F_y \tag{8.3.1}$$

其中
$$A_{44}=V_{s1}^2(\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta)$$
$$A_{55}=V_{s1}^2(\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta)$$
$$A_{45}=V_{s1}^2/2(1-R^2)\sin^2\theta) \tag{8.3.2}$$
$$R=V_{s2}/V_{s1}$$

V_{s1}是快横波传播速度,V_{s2}是慢横波传播速度,F_x,F_y 分别是横波源的 x 分量和 y 分量。

不失一般性,下面我们就 $F_y=0$,F_x 为某一源函数导出(8.3.1)式的位移解。令

$$L_{11}=A_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
$$L_{12}=A_{45}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$L_{22}=A_{45}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

则(8.3.1)式可改写为

$$L_{ij}U_j=F_i \tag{8.3.3}$$

其中

$$L_{ij}=\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{12} & L_{12}\end{bmatrix}$$
$$f_1=s(t),\quad f_2=0,\quad U_i,i=x,y$$

对 8.3.3 式两边作傅氏变换后有

$$\begin{bmatrix}\overline{L_{11}} & \overline{L_{12x}}\\ \overline{L_{12}} & \overline{L_{22}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_x\\ U_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S(\omega\\ 0\end{bmatrix} \tag{8.3.4}$$

其中

$$\overline{L_{11}}=-[A_{55}R^2z-\omega^2]$$

$$\overline{L_{12}}=-[A_{45}R^2z]$$

$$\overline{L_{22}}=-[A_{44}R^2z-\omega^2]$$

$S(\omega)$是源函数的傅低变换，

$\overline{U_x},\overline{U_y}$为位移的傅氏变换，

K_z 为波数的 z 分量。

因此，由(8.3.4)式不难得出位移傅氏变换后的解为

$$\begin{bmatrix}\overline{U_x}\\\overline{U_y}\end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}A_{45}K^2z\\-[A_{55}K^2z-\omega^2]\end{bmatrix}S(\omega) \tag{8.3.5}$$

其中

$$D=(A_{55}K^2z-\omega^2)(A_{44}K^2z-\omega^2)-A_{45}^2K^4z$$

对(8.3.5)式作反傅氏变换，并用留数定理，我们可得到，

$$\begin{aligned}U_x(t)&=A\left[\cos^2\theta U\left(t-\frac{z}{V_{s1}}\right)+\sin^2\theta U\left(t-\frac{z}{V_{s2}}\right)\right]*S(t)\\U_y(t)&=B\cos\theta\sin\theta\left[U\left(t-\frac{z}{V_{s1}}\right)+U\left(t-\frac{z}{V_{s2}}\right)\right]*S(t)\end{aligned} \tag{8.3.6}$$

其中，A 和 B 为两个常数，* 表示褶积，$U(t)$为单位阶跃函数。

由(8.3.6)式知，在不同深度上记录的水平位移分量在一般情况下是由快横波(速度为 V_{s1})和慢横波(速度为 V_{s2})的三角函数加权迭加后的结果。该式中没有显式表达出透射或反射影响以及球面扩散影响等，这些影响可由 A 和 B 两个常数体现出来。观察(8.3.6)式我们看到，只有在观测坐标轴正好平行裂隙走向时水平位移才能是单一的快横波或慢横波，因此(8.3.6)式是分析和处理 VSP 记录中横波分裂的理论基础。

2. *横波分裂的数值模拟*

解析式(8.3.6)给出了 VSP 记录中横波分裂最本质、最基本的表达，但对于含不同方位裂隙的层状介质，当要想表达所有不同界面的反射等影响时会变得非常繁杂。这时，我们借助于数值解波动方程，就会获得包含各种影响在内的完整的记录，从而对 VSP 记录获得更真实的认识。

伪谱法求波动方程，指的是波场空间偏微分借助于快速傅氏变换，时间偏微分借助于有限差分法。有关该算法更详尽的内容请参见有关文献[侯安宁等，1990，1994]，这里我们应用该数值解法来分析横波分裂。

模型一：

为了便于与解析表达式结果对比，假设介质是均匀的。裂隙走向的方位角是2°，快横波速度是 2800m/s，慢横波速度是 2600m/s，因此各向异性因子 $\gamma=5\%$（该值为典型裂缝性地层的各向异性因子），其观测系统详见表 8.3.1。

表 8.3.1　　模型一的介质参数和观测系统参数

厚度(m)	$V_{s1}(m \cdot s^{-1})$	$V_{s2}(m \cdot s^{-1})$	裂隙方位角(°)
1500	2800	2660	20
源偏振方位角	源子波长度(ms)	井源距离(m)	源类型
0°	16	0	横波
最浅接收深度(m)	最深接收深度(m)	接收道数	采样间隔(ms)
50	540	50	1

模型二：

模型二介质由四个水平层和一个无限介质层组成。这四个层中的各向异性大小和裂隙的方位均不同，第一层和无限介质层几乎是各向同性的，各向异性最大的一层是第三层，有关各层的厚度和裂隙方位等见表 8.3.2。

表 8.3.2　　模型二的介质参数(观测系统参数同表 8.3.1)

层数	厚度(m)	$V_{s1}(m \cdot s^{-1})$	$V_{s2}(m \cdot s^{-1})$	R	裂隙方位(°)
1	70	2600	2574	0.99	0
2	080	2880	2660	0.95	15
3	080	2500	2250	0.90	35
4	080	2800	2576	0.92	20
5	无限	3000	2970	0.99	0

以上二个模型的 VSP 模拟记录分别见图 8.3.2 和图 8.3.3。

图 8.3.2 模型的各向异性大小与实际地下岩石中存在的各向异性大小相接近。在图

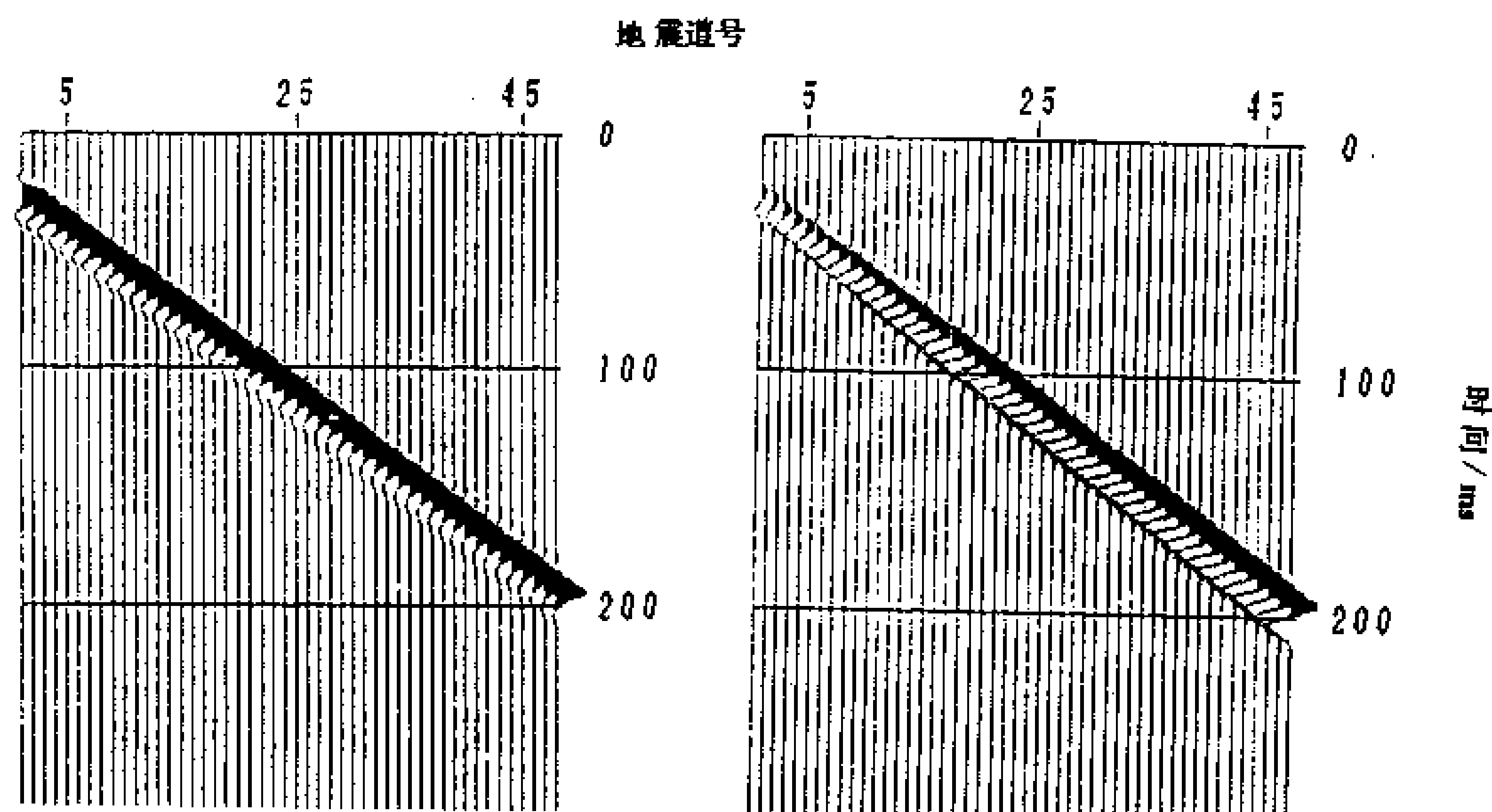


图 8.3.2　据模型一模拟的二分量 VSP 记录　(a) x 分量；(b) y 分量

中，我们从单一的 x 或 y 分量都看不到明显分裂的快慢横波。从二分量记录看，既然有两个互相垂直方向的水平分量，表明横波偏振既不与 x 轴重合，又不与 y 轴重合，但是仍不能断定存在横波分裂。此外，应特别注意 y 分量记录随着传播距离的增加，能量反而增加了，这一点在各向同性介质模型下是绝对不可能存在的。

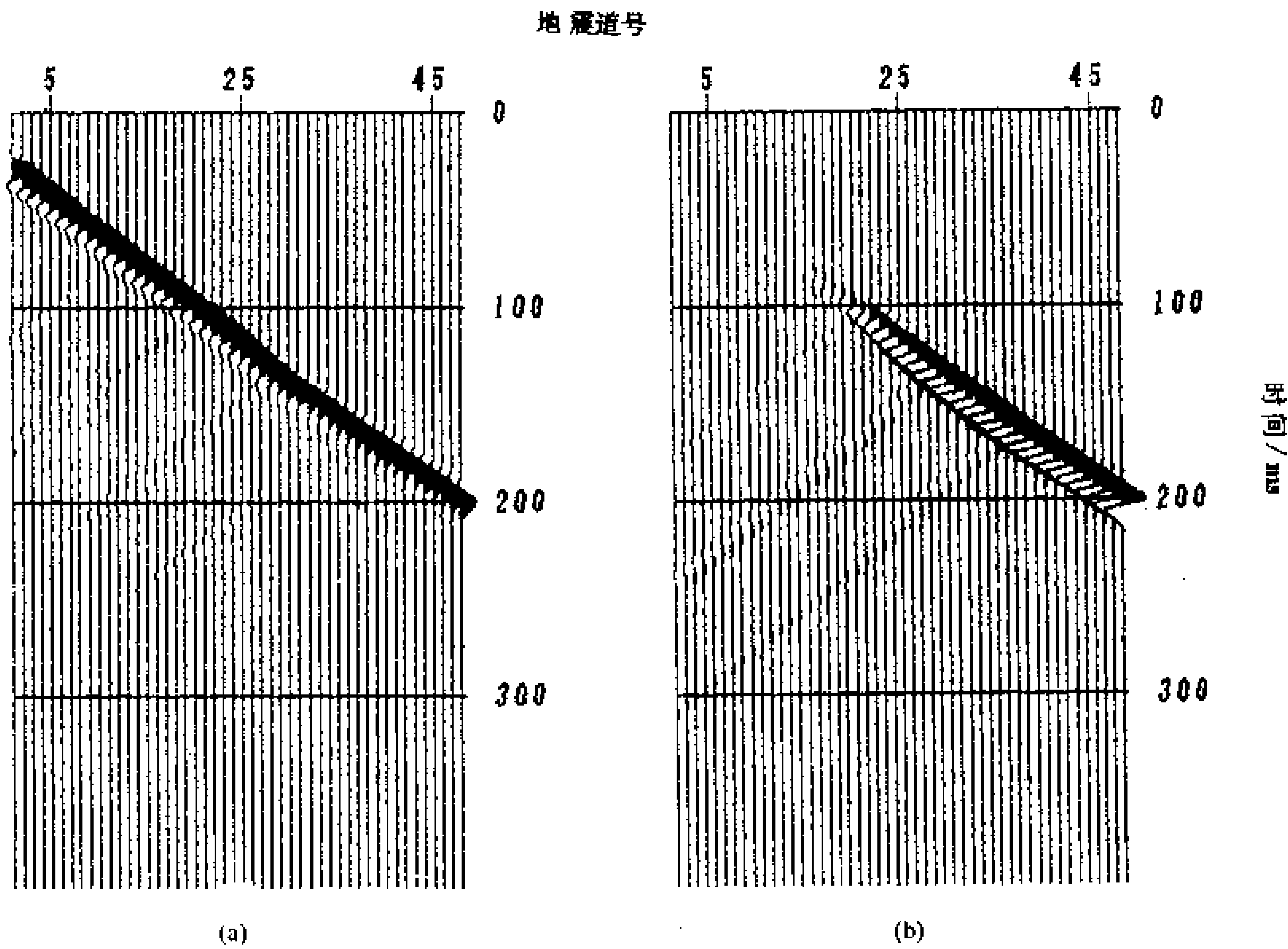


图 8.3.3　据模型二模拟的 VSP 记录(a) x 分量；(b) y 分量

由图 8.3.3 我们看到，在 x 分量上有四个反射波(上行波)。由于能量比下行波小许多，图中上行波不十分明显。在 y 分量上，明显有三个反射波组，且在其约 80ms 以前看不到下行波的 y 分量，这是由于横波源偏振方向与 x 轴重合，并且由于第一层是各向同性层，故 y 轴上不会有任何能量。

3. 横波分裂结果的比较与讨论

正如前面公式(8.3.6)和模拟结果图 8.3.2 和图 8.3.3 所表明的那样，横波在含裂隙介质中会分裂为快慢横波。但从 VSP 记录上看，快慢波在典型的各向异性系数下(各向异性约为 4%)是叠加干涉在一起的，除了观测系统的坐标轴恰巧与裂隙的方位平行或垂直。为了深入阐明横波分裂特征，我们将根据解析式(8.3.6)重点分析和讨论图 8.3.2 和图 8.3.3 中的下行横波。

由(8.3.6)式知，横波分裂主要取决于三个参数，即裂隙走向与坐标系 x 轴的夹角 θ，快慢横波单位距离的到时差 Δt

$$\Delta t = 1/V_{s2} - 1/V_{s1},$$

以及源子波 $s(t)$（在此我们没有考虑衰减和路径的影响）。

由表 8.3.1 知 $\theta=2°$，$\Delta t=0.0188$ms，源子波长度为 16ms。因此，分裂后快慢波在传播距离为 1000m 时，到时差为 18.8ms。但是由 θ 角确定的快慢波振幅比（由 8.3.6）式知）为 800，因而，在图 8.3.2 中，我们无法从模拟的记录中看到横波分裂。

根据表 8.3.2 第三层介质参数知，$\theta=35°$，$\Delta t=0.044$ms，源子波长度仍然是 16ms。在传播距离为 80m 时，快慢波到时差为 3.5556ms，因此尽管 θ 角确定的快慢波幅值比为 2，但到时差仍不足四分之一源子波长度，故在图 8.3.3 中仍不能直接看到横波分裂。

由解析表达式（8.3.6）所给 VSP 记录和模拟的 VSP 记录的比较分析，我们看到，即使是介质含有裂隙，并相应地存在横波分裂现象，但在许多情况下我们仍然不能从 VSP 记录上直接发现这种各向异性特有的现象。其原因在于如快横波极化方向（许多情况下与裂隙走向平行）、快慢波的到时差、源子波的长度等影响横波分裂的参数共同确定了横波分裂。事实上，在多数情况下，快慢横波是干涉在一起的。因此，要想利用横波分裂研究地下岩石内部结构，最关键的一步是要进行细致的计算机处理，以提取那些反映横波分裂的参数，尤其是横波偏振方向和快慢横波之间的到时差。

8.3.2 三分量 VSP 数据处理

为了可靠地观测横波分裂，特别是由垂直排列的裂隙导致横波分裂，目前国外多数的野外采集采用横波震源沿测线方向和垂直于测线方向激发，并且采用平行测线和垂直测线接收的四分量记录，井源距一般较小，如巴黎盆地（Bush 和 Crampin 1991）和加里福尼亚 Lost Hills 附近油田（Winterstein Meadows 1991）所进行的 VSP 观测。然而，目前国内大部分 VSP 采用 P 波源激发和三分量检波器接收。因此本部分介绍三分量 VSP 资料处理（四分量或九分量 VSP 资料的处理类似于三分量，但一般更为简单，参见 8.5 节）。需要指出的是，为了分析转换横波分裂，野外观测至少应设计两个方位不同的且夹角在约 45°的观测排列，VSP 的观测偏移距不宜过大，这样可以使资料处理及解释的结果更可靠。

1. 基本处理流程

P 波源三分量 VSP 数据的处理流程如图 8.3.4 所示。其中主要的处理过程是检波器水平分量的重新定位，P-SV 波分离和上下行波分离。

对每次观测中的每个分量记录剖面一般采用相同的带通滤波因子，以消除高频噪声，同时确保横波的极化信息不因此而受到畸变。

2. 检波器定位

VSP 记录是由三分量检波器在井下进行的。由于这个检波器从井底向上提升时，水平检波器的方位是在不断旋转的。因此，使用三分量记录前，必须测量出每一检波器处的水平方位以校正水平分量到统一的方位上。假设介质是弱各向异性的，则 P 波能量的最大幅度值应出现在源检波器所确定的平面上，而最小幅度值应出现在与之相互垂直的平面上。因此，在数据采集期间没有使用陀螺仪的情况下，P 波初至能量的极化图分析可以用来确定水平分量 x 和 y 记录的粒子运动方向。换句话说，以直达 P 波偏振方向在水平面内的投影作为参考，计算出三分量检波器观测时水平分量相对于参考方向的相应方位，然后将水平分量转换到与参考方向一致的坐标系中，这个工作称为检波器定位。

计算检波器观测相对于 P 波偏振方向的相对方位，最常见的有两种办法，即极化图法的

最小平方拟合法和 Disiena 等(1981)直方图技术法。前一种方法假设由于续至波的干扰和噪声影响使原来线性偏振的初至 P 波可能变成较复杂的视椭圆极化,利用最小平方拟合法给出一个较合理的偏振方位。Disiena 的直方图技术由于利用了振幅和极化信息,因而在应用于线性极化的直达波以自动估算定位角时证明更有效。

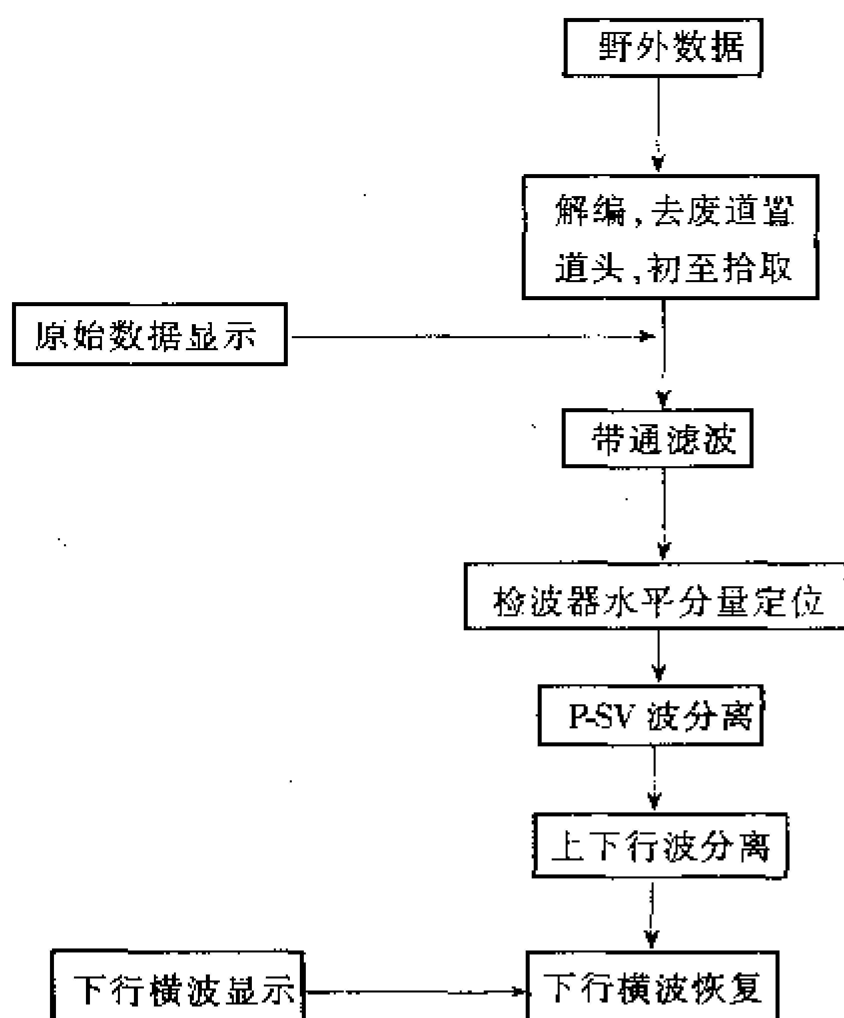


图 8.3.4 VSP 数据处理流程

直方图技术设水平分量为 x_i 和 y_i, $i=1,2,\cdots,M$,则有瞬时能量 R_i 和瞬时方位 θ_i 为

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \qquad (8.3.7)$$
$$\theta_i = \mathrm{arc\ tg}(y_i/x_i)$$

实际上,(8.3.7)式是将 $2D$ 直角坐标系的记录 x_i 和 y_i 转换成了作为时间函数的极化坐标 R_i 和 θ_i。如果我们作角 θ_i 的直方图(将 θ_i 按一定离散间隔取样),将在直方图上给出 θ_i 角的最大值。这个最大值在假设噪声是随机极化的,且信噪比大于 1 时即为我们所要计算的定位角。然而当水平记录 x_i 和 y_i 幅值不大时,实践证明 θ_i 是十分敏感于噪声的。因此,Disiena 直方图技术的最重要一步就是用振幅信息 R_i 或 R_i^2 去加权 θ_i,然后作加权后的直方图。这样的直方图由于对数据时窗大小、直方图离散间隔的宽度和噪声都不敏感,因而可自动地拾取出直方图中的峰值所对应的角作为定位角。

一旦获得定位角,则可通过下列旋转公式,将水平分量定位到包含井轴的源检波平面分量 $x'(t)$ 和垂直于这个平面的分量 $y'(t)$ 上,

$$x'(t) = x(t)\cos\theta + y(t)\sin\theta \qquad (8.3.8)$$
$$y'(t) = -x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta$$

其中 θ 为求出的检波器定位角,$x'(t)$ 称为定位水平分量,$y'(t)$ 称为水平横向分量(HT)。

图 8.3.5 给出了直方图技术求定位角的示意图。

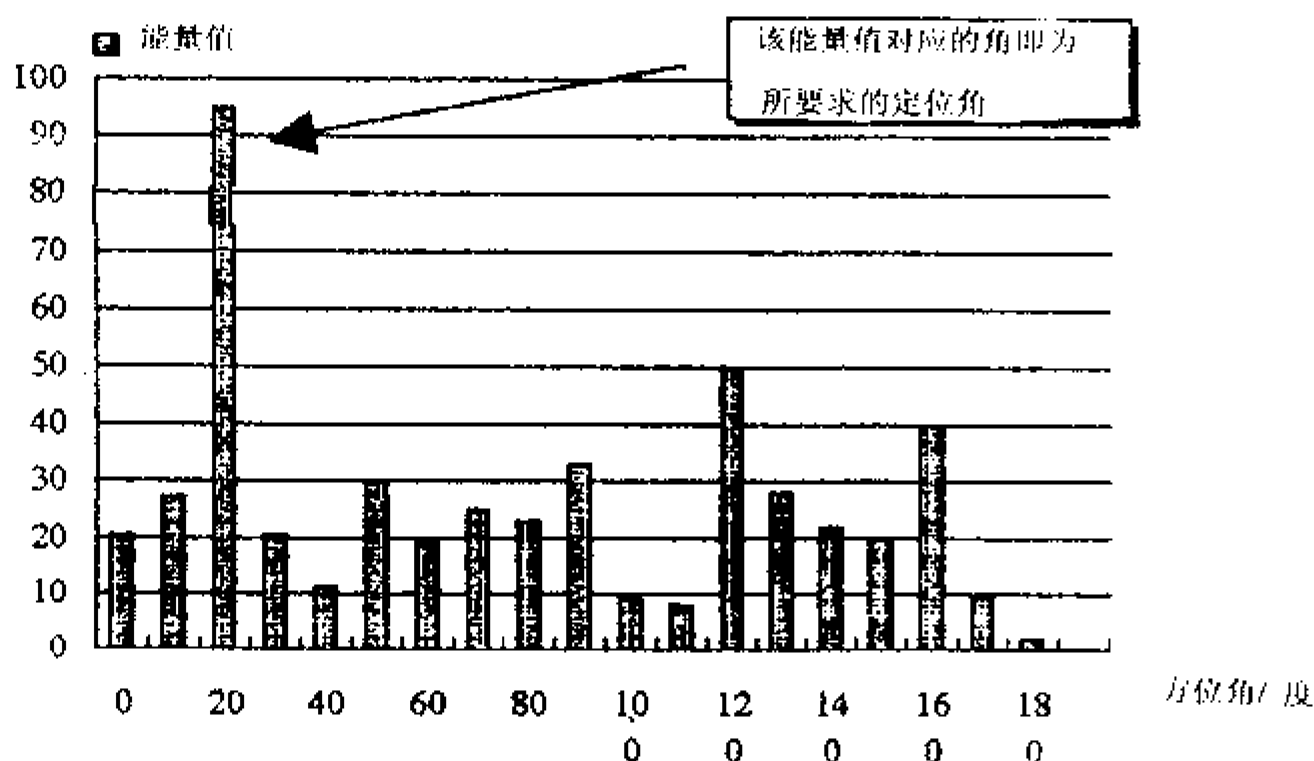


图 8.3.5 Disiena 的直方图技术

3. P-SV 波分离

前面检波器的定位是假设线性极化的 P 波初至粒子运动方向与波传播方向一致,粒子运动轨迹位于震源和检波器确定的平面内。因而定位后的 $x'(t)$初至 P 波中即包含了 P 波,同时也包含了 SV 波,原因是 SV 波极化也位于源和检波器确定的平面内。

分离 P-SV 波的思路仍然是利用极化分析。假设 SV 波极化与 P 波极化垂直,利用前面求定位角的办法,我们不难求得定位水平分量 $x'(t)$和垂直分量 $z(t)$所确定的直达 P 波的垂直入射角 φ。然后利用 φ 角最大化 P 波能量,同时实现将 $z(t)$和 $x'(t)$中的 SV 波分离。具体处理方法与上述检波器定位的方法类似。在获得垂直入射角后,应用以下旋转:

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= z(t)\cos\varphi + x'(t)\sin\varphi \\
v'(t) &= -z(t)\sin\varphi + x'(t)\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{8.3.9}
$$

其中 φ 角是垂直入射角,$v'(t)$是垂直横向分量(VT),$z'(t)$是定位垂直分量(OR)。

4. 上下行波分离

在水平定位和 P-SV 波分离后我们对数据进行上下行波分离。为了减少极性畸变,一般采用 F-K 滤波器将上行波消除,保留下行波,同时减少了剖面中的干涉能量。上下行波分离方法与单分量 VSP 时同,在此不再叙述,读者可参考一般教材书。

所有这些处理,都明显加强了下行转换横波,为研究横波分裂提供了一个较好的数据集。

图 8.3.6 给出了辽河盆地某地区三分量 VSP 资料处理前后的显示。图 8.3.6a 是 P 波能量最大的垂直分量(OR)。图 8.3.6b 是定位水平分量(VT 分量),该分量上主要是转换横波能量。转换横波在定位水平分量上能量较强,连续性较好。图 8.3.6c 是垂直于定位水平分量的另一个水平分量(HT 分量),能量较弱。如果介质是各向同性的,这一分量应该主要是噪声。因此,该分量上有效波组的出现,表明该井附近的介质是各向异性的,因而存在横波分裂现象。

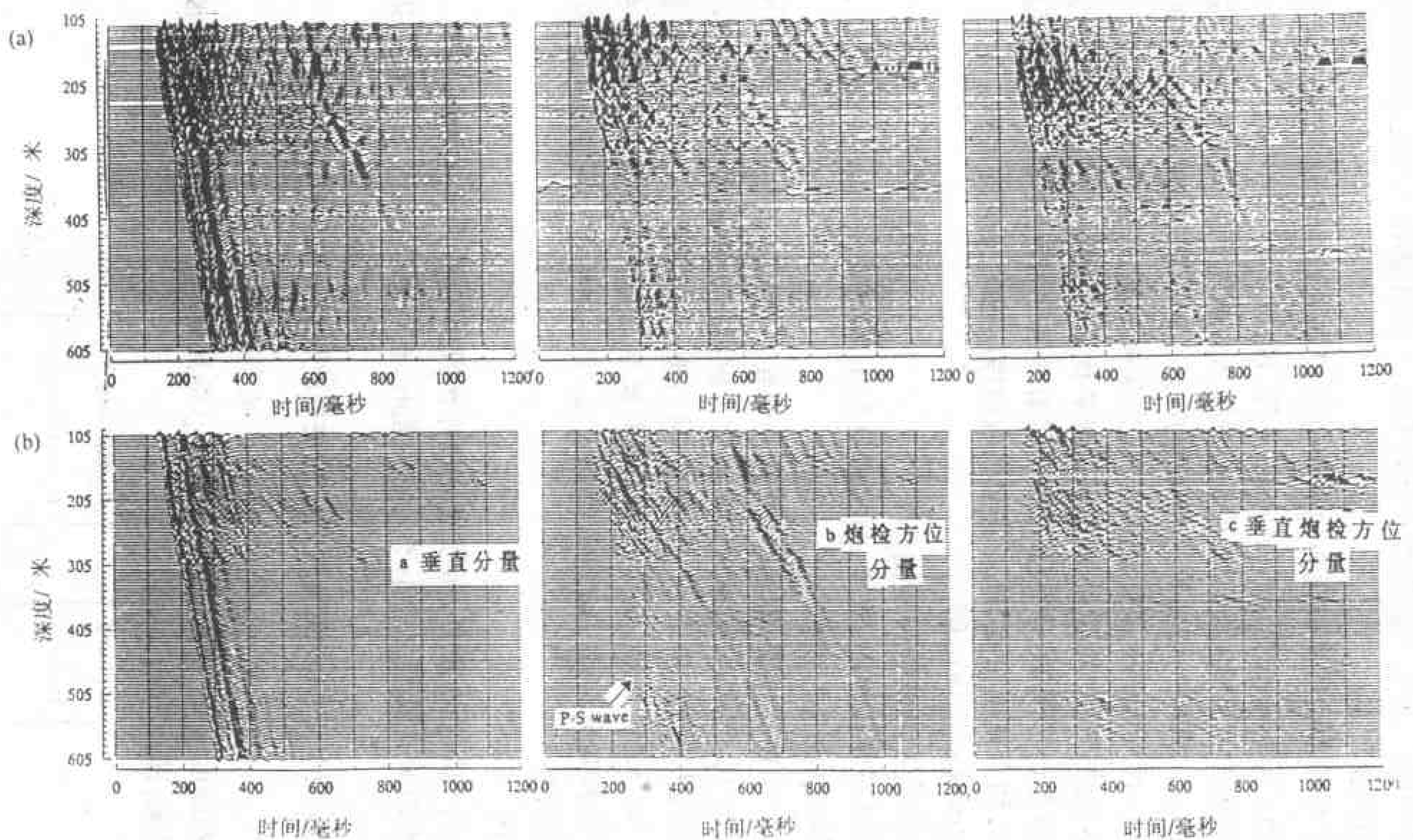


图 8.3.6　VSP2 资料原始三分量和经处理后的三分量显示

8.3.3 遗传算法估算裂缝方位

转换横波分析的目的是检测可能存在的横波分裂,从而给出裂缝方位。分析横波分裂的最早方法之一是作极化图,进而分析极化图中快横波的极化方向以及快慢横波之间的时间延迟。这种方法对于干涉较严重的横波分裂来说,一般不能准确确定时间延迟,但对于快波极化方向的判别则较可靠。

目前已发展了数种自动估算极化方向和快慢波时间延迟的方法,但大多数适用于四分量记录(Alford,1986; Wintestein 等,1991;Campden 等,1991)。对于仅有两个水平分量记录的VSP资料,估算方法较少。在此,我们介绍平面波叠加的遗传算法反演方法(侯安宁,马在田等,1995;Hou,Ma et al. 1996)。该法利用相邻检波器记录自动反演出快横波极化方位。

遗传算法作为一种良好的非线性优化方法,近年来开始应用于解决地震反演问题。其基本思想主要借鉴生物进化过程中的同态竞争和寻优繁衍原则,通过对寻优目标建立评估函数,并应用该函数在已形成的"染色体群种"(即物理问题编码)上模拟进化中的"自然随机选择"和"有性繁殖"两个基本过程,最终获得相应物理问题的全局优化解。

遗传算法反演的基本过程包括:

(1) 建立目标函数并对模型矢量编码

即对物理问题进行特征编码,建立二进制"染色体"位串。

(2) 确定种群数 Q 并进行遗传

其中遗传具有三个核心过程,即选择、交叉和变异。选择是根据种群上各模型的目标函数的大小择优先取出 Q_i 个种群,选择总体上决定了模型向目标函数增大的方向变化;交叉是在父代种群 Q_i 上随机配对,形成 $Q_{i/2}$对模型,然后按预定概率 P_C 确定某一对模型的二进制长串位上的某一部分是否交换,交叉反映了种群模型之间的共享程度;变异指在子种群上随机选择一位或多位按变异概率 Pm 进行奇偶变化,变异保证了一定程度的种群多样性,并避免模型陷入局部极值。

(3) 迭代与收敛

随着遗传三个过程的不断重复,所搜寻的目标函数值不断增大,当迭代至某一预定的目标函数值,且种群里的所有模型之差小于规定偏差时,迭代终止,这时 Q 个模型近似达到全局极值点附近。

遗传算法用于反演 VSP 中转换横波分裂的快横波极化方向,其目标函数为

$$E=\sum_{\omega}\sum_{m=1}^{M}\|\bar{u}_m(\omega)-u_m(\omega)\|^2, \tag{8.3.10}$$

其中 u_m 为在检波器深度 m 处所观测到的记录,$\bar{u}_m$ 是具局部平面波前的快慢横波叠加后模拟深度在 m 处的记录,即

$$\begin{bmatrix}\bar{u}_1(\omega)\\ \bar{u}_2(\omega)\\ \\ \bar{u}_m(\omega)\end{bmatrix}=\sum_{n=1}^{2}\begin{bmatrix}h_n\exp(i\omega s_n z_1)\\ h_n\exp(i\omega s_n z_2)\\ \\ h_n\exp(i\omega s_n z_m)\end{bmatrix}f_n(\omega) \tag{8.3.11}$$

在(8.3.11)式中,h_n 是极化方向的单位矢量,s_n 是似慢度,$f_n(\omega)$是波形的傅氏变换,ω 为频率。

图 8.3.7 展示了模型记录的快慢横波极化方向反演结果，图中 200～1000m 深度的快横波极化方向与地质模型(裂缝方位)相符。

图 8.3.8 显示了对我国辽河油田某地 VSP2 观测资料的快横波极化方向的反演结果。反演所用资料主要是对井中大约 310m 至 600m 深度的转换横波进行的。

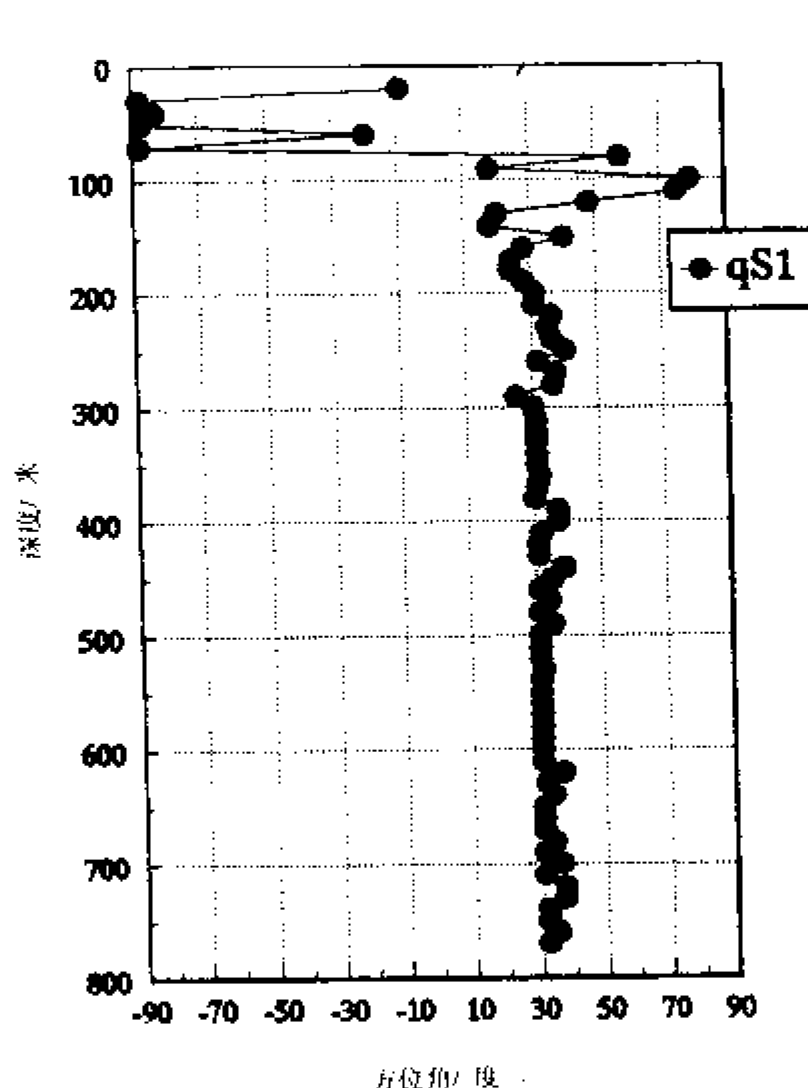


图 8.3.7　模型记录的快横波极化方向反演结果

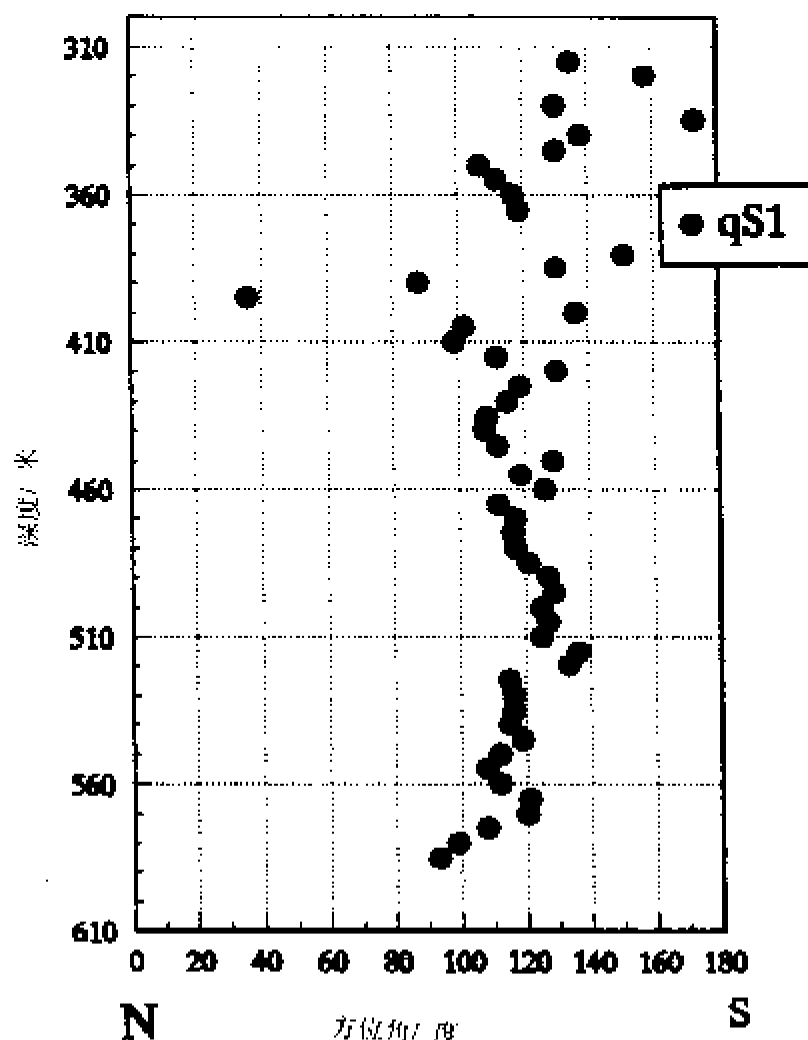


图 8.3.8　VSP2 观测资料的快横波极化方向的遗传算法反演结果。0°为正北方向，18°为正南方向

8.4　地面反射地震检测裂缝

本节首先进行横波反射地震记录与反射系数的理论分析，然后叙述地面地震用于检测裂缝的数据采集方法和处理流程，最后介绍旋转分析法和各向异性的分析。特别要指出的是旋转分析法也可用于 VSP 数据。此外，地面地震检测裂缝尽管已有不少成功的范例，但仍在发展中。

8.4.1　横波反射地震记录与反射系数

含裂缝的介质诱导的各向异性(也叫方位各向异性)对地面横波数据有两个很重要的影响，一是横波分裂，即形成沿近垂直射线路径的有到时差的快慢横波；二是反射振幅上对快慢横波有明显的差异。因此为了利用横波数据检测裂缝，我们首先从理论上分析一下记录特征和反射系数。在分析反射地震记录时，我们没有去考虑地面(自由界面)对横波的影响。S 体波在大于临界角($=\arcsin^{-1}(V_S/V_P)\approx 35°$)入射到自由界面时在反射波中诱导复杂的

相位和振幅特征。当然,即使是在临界角内,即"横波时窗"内(大部分地震反射数据也是在这个时窗内采集),除了法线入射外,也会存在转换波而使分析复杂。然而,自从1986年SEG年会以来所发表的论文表明,自由表面上横波地震的这些困难可通过适当的采集和处理而克服。这对地面地震用于检测裂缝具有极其重大的意义。

1. 四分量地面地震理论记录

图8.4.1给出了SH波观测的典型反射问题,其中裂缝走向是示意性的。一般来说,裂缝走向是垂直传播的快横波极化方向。如图中所示,常规的SH波的观测与裂缝走向有一个夹角。这也是过去横波勘探的一个真实而简单的模型。

图8.4.1 SH波观测的典型反射问题示意图

考虑极化(粒子位移或粒子速度)矢量相应于脉冲源(实际的响应是这个脉冲与真实源子波相褶积,这将在以后的分析中给出)。我们假设传统的CMP道集叠加形成了一个代表法线入射的无多次波的且噪声已衰减的理想地震道。因此,以下仅就垂直射线路径来讨论四分量记录(图8.4.1中的射线路径垂直于纸面)。

传统的SH观测一般是由垂直测线的源和垂直测线的检波器进行的。这个垂直测线的源设计成激发具有垂直测线极化的垂直向下辐射的横波。然而在方位各向异性介质中,这样的波不能传播(Crampin,1984)。在这种介质唯一的可垂直传播的横波是那些极化平行于裂隙走向和垂直于裂隙走向的S波。因此,源矢量(图8.4.1中表的SH)被介质矢量分解成图中所表明的两个主分量,$OS_{//}$和$OS_{\perp}$,它们平行于各向异性主轴。这种分解完全是几何性的(无物理耦合因素等),它在方位各向异介质中的表面突然产生,且除非介质本身是垂向

不均匀的，否则这种分解不会随着波的传播而改变。

具有正交极化的分裂的两个横波按照各自的速度传播。设平行于裂缝走向为 $V_{//}$，垂直于裂缝走向的为 $V_{\perp}$，则有 $V_{//} > V_{\perp}$。

两个横波垂直地传播，并在水平界面独立地被反射，相应的反射系数为 $R_{//}$ 和 $R_{\perp}$。我们假设各向异性是弱的(Thomsen 1985)，因此，两个反射系数是类似的。进一步，其几何扩散衰减等也是类似的。为了清晰化，这些效应在图 8.4.1 中和图 8.4.2 中都忽略了，换句话说，反射后的波极化矢量的幅值与各自的源矢量分量相同。

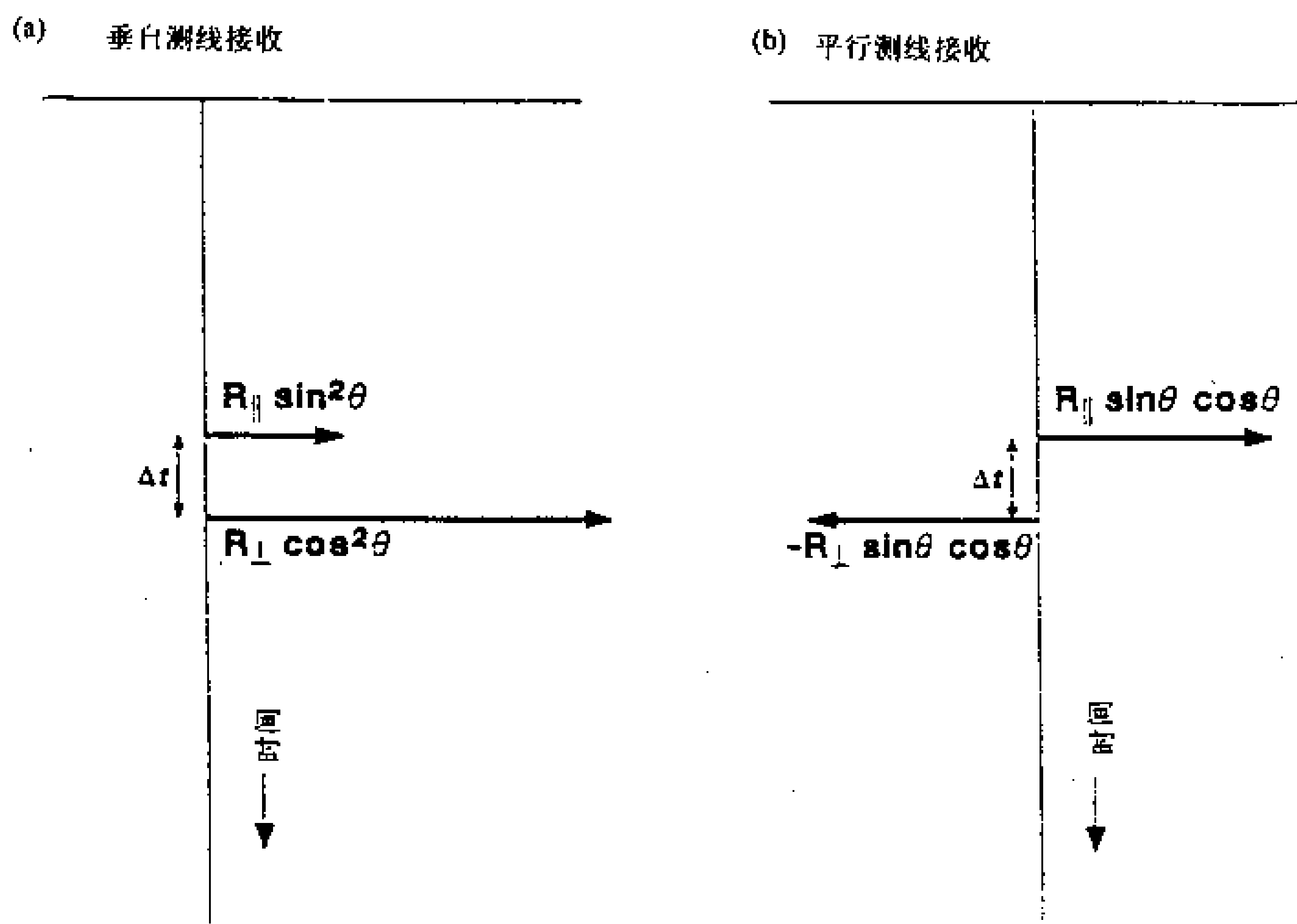


图 8.4.2　图 8.4.1 的典射反射问题的反射脉冲序列，在一个反射界面上产生的两上脉冲在垂直测线检波器(a) 和沿测线检波器(b) 上接收到

图 8.4.2 给出了一个反射界面上产生的两上脉冲被垂直测线和沿测线的检波器接收到的示意图。

快波(//)到达垂直测线检波器，且具有幅值

$$R_{//}\sin^2\theta f_{//}(t) * \delta(t - 2z/V_{//}).$$

这里 $f_{//}(t)$体现几何扩散和衰减等的滤波器。δ 函数指示了脉冲是从深度 z 以速度 $V_{//}$ 到达的。

后来到达的慢波(⊥)也到达垂直测线检波器，且具有视振幅

$$R_{\perp}\cos^2\theta f_{\perp}(t) * \delta(t - 2z/V_{\perp}).$$

因此从一个反射界面到达检波器的是两个波，其分隔的时间将是

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_{\perp} - t_{//} = t_{//}(t_{\perp}/t_{//} - 1) \\ &= t_{//}[2z/V_{\perp}/2z/V_{//})-1] = t_{//}(V_{//}/V_{\perp} - 1) = \gamma t_{//}.\end{aligned} \tag{8.4.1}$$

其中各向异性因子，

$$v = (V_{/\!/}/V_{\perp} - 1) \approx (1 - V_{\perp}/V_{/\!/})$$

与 Thomsen 定义的各向异性因子是一致的。

如果我们用有限延续长度的子波 $w(t)$ 与上面的反射脉冲序列褶积，则可得到垂直测线检波器上接收的记录为

$$S_{22}(t) = [R_{/\!/}\sin^2\theta\delta(t - t_{/\!/}) * f_{/\!/}(t) + R_{\perp}\cos^2\theta\delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t)] * w(t). \quad (8.4.2)$$

其中 S 的下标，第一个 2 代表垂直测线(y)接收器，第二个 2 代表垂直测线源。

同样的道理，沿测线的检波器也可接收到两个振幅相同，符号相反且具有相同时间延迟的两个信号，因而有记录，

$$S_{12}(t) = [R_{/\!/}\sin\theta\cos\theta\delta(t - t_{/\!/}) * f_{/\!/}(t) - R_{\perp}\sin\theta\cos\theta\delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t)] * w(t). \quad (8.4.3)$$

这个来自垂直测线的在沿测线观测的非零的信号对即使非常弱的方位各向异性也是一个十分敏感的检测器。

不难看出，如果传统的 SV 观测(具有沿测线源和检波器)在上述相同的测线上进行的话，也会有类似的分裂效应。尽管有不同的三角几何关系，我们不难推得在沿测线和垂直测线接收的记录为

$$S_{11}(t) = [R_{/\!/}\cos^2\theta\delta(t - t_{/\!/}) * f_{/\!/}(t) + R_{\perp}\sin\theta\delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t)] * w(t), \quad (8.4.4)$$

和

$$S_{21}(t) = [R_{/\!/}\sin\theta\cos\theta\delta(t - t_{/\!/}) * f_{/\!/}(t) - R_{\perp}\sin\theta\cos\theta\delta(t - t_{\perp}) * f_{\perp}(t)] * w(t). \quad (8.4.5)$$

以上结果很容易扩展到多层介质的情况，当然每一层的各向异性主方向是一样的。这时方程(8.4.2)和(8.4.5)式中用下列代换：

$$R_{/\!/}\delta(t - t_{/\!/}) \rightarrow \gamma_{/\!/}(t), \qquad R_{\perp}\delta(t - t_{\perp}) \rightarrow \gamma_{\perp}(t).$$

其中 $\gamma_{/\!/}(t)$ 和 $\gamma_{\perp}(t)$ 是主反射序列(无多次反射)，分别对应于快横波和慢横波。

当不同的层具有不同的各向异性主方向时，一般来说，每一个横波在一个界面上会再次分裂，但这样的多次分裂似乎并不是普遍的情况。

2. *SV 波和 SH 波的反射系数*

现在我们考虑平面波在两个各向异性介质之间的平界面上的反射问题。这个问题以一般方式由 Keith 和 Crampin(1977)就处理了。不过，为了实际应用，我们在此给出不太一般的但仍保持问题本质的表达形式。

在界面上下两个介质都是横向各向同性的，且上介质是具有垂直对称轴的，下介质是具有水平对称轴的情况下，有三种平面波存在，即准 P 波，准 SV 波和 SH 波。这些波在每一种介质的自然坐标系下很容易表达，而边界条件(决定能量分配)却在观测界面坐标系下很容易表达。两者的矛盾可通过坐标旋转(或 Bond 变换)而解决。因此，利用边界上位移连续和应力连续以及坐标变换可得不同入射角和不同方位角(相对于裂隙方位)时三种波的反射系数。

图 8.4.3 给出了 SH 波作为方位和入射角函数的反射系数的数值结果。由图知，SH 反射(垂直测线源和垂直测线接收)在所有的入射角处都强烈地依赖于方位。这个方位变化将在地震叠加后的道上仍保留十分明显，因而使得在水平界面上方位各向异性的诊断变得很

清晰。

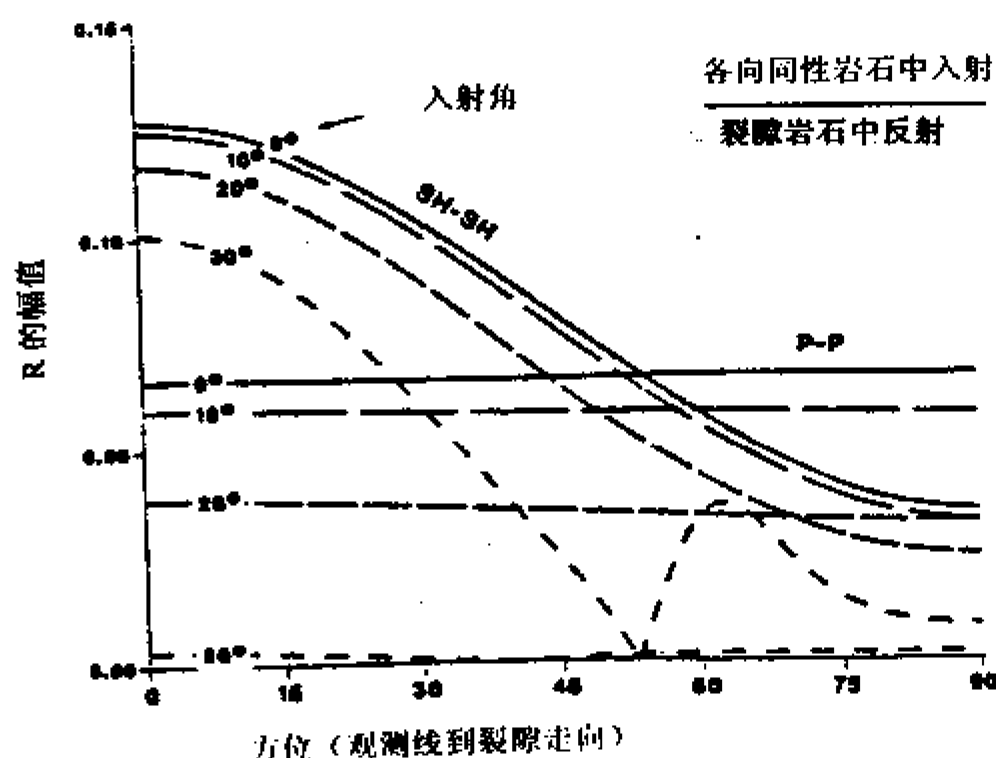


图 8.4.3　SH 波作为方位和入射角函数的反射系数

假设 SH 波沿各向异性的一个主轴极化且沿法线入射,则我们可得到较熟悉的法线反射系数为

$$R_{SH}(\theta=\pi/2)=-\frac{\rho_2 V_{/\!/2}-\rho_1 V_{S1}}{\rho_2 V_{/\!/2}+\rho V_{S1}}\quad, \tag{8.4.6}$$

这里 V_{s1}是上介质中垂直入射 S 波速度,$\theta=\pi/2$ 表示观测线垂直于裂缝方位。

在观测线平行裂缝方位时,法线入射 SH 波的反射系数为

$$R_{SH}(\theta=0)=\frac{\rho_2 V_{\perp 2}-\rho V_{S1}}{\rho V_{\perp 2}+\rho V_{S1}}\quad. \tag{8.4.7a}$$

$$=\frac{\rho_2 V_{/\!/2}(1-\gamma_2)-\rho_1 V_{S1}}{\rho_2 V_{/\!/2}(1-\gamma_2)+\rho V_{S1}}\quad, \tag{8.4.7b}$$

在横波阻抗差不大的情况下,(8.4.7)式变为

$$R_{SH}(\theta=0)\approx R_{SH}(\theta=\pi/2)+\gamma_2/2. \tag{8.4.7c}$$

很明显,在法线入射时,SV(沿测线)源有反射系数

$$R_{SV}(\theta)=R_{SH}(\pi/2-\theta).$$

因此,方程(8.4.7c)变成

$$R_{SH}(\theta=0)=R_{SV}(\theta=0)+\gamma_2/2. \tag{8.4.8}$$

如果界面两侧介质都是具有相同的主轴方向,则(8.4.6)和(8.4.7a)两个方程中的 V_{S1} 可由 $V_{/\!/}$或 $V_{\perp}$代替。由方程(8.4.7c)和方程(8.4.8)可以得到

$$R_{SH}(\theta=0)=R_{SH}(\theta=\pi/2)+(\gamma_2-\gamma_1)/2 \tag{8.4.9a}$$

$$=R_{SV}(\theta=0)+(\gamma_2-\gamma_1)/2 \tag{8.4.9b}$$

应用前面引入的主反射序 $\gamma_{/\!/}(t)$和 $\gamma_{\perp}(t)$,则方程(8.4.9b)一般化成

$$\gamma_{\perp}(t_{\perp})=\gamma_{/\!/}(t_{/\!/})+1/2(\gamma_2-\gamma_1) \tag{8.4.9c}$$

(8.4.9c)可作为具有高垂直分辨率的强裂缝带的指示。条件是 $\gamma_2 \neq \gamma_1$,即主时间序列在振幅上有一个确定量的差异。当然,如果 $\gamma_2 = \gamma_1$,则只有通过快慢横波剖面上的时差才能断定方位各向异性的存在。

8.4.2 多分量地面地震数据采集和处理

本部分主要介绍几种采集多分量地震数据的有效方法。数据的采集目的主要用于研究各向异性,特别是裂缝诱导的方位各向异性。数据的处理目前主要是利用传统的单分量P波数据的那些方法,因而我们重点说明多分量数据的处理流程的不同,然后专门介绍共转换点道集。

1. *多分量地震采集方法*

多分量地震的采集方法主要有二分量、四分量、三分量和九分量这四种形式。二分量观测利用了一个或两个源类型(即P波或SH波可控振源)和一个或两个接收器方位,这也是早期普遍进行的采集方式。在70后代后期80年代早期二分量的观测方式主要是组合P波和SH波观测,即沿测线进行两次独立的P-P和SH-SH波分量的记录。二分量采集的另一种不常用的方式是联合P波和SV波数据的采集,其目的是研究转换波。当然对海上观测来说,只有组合P波和两次转换(PSSP)波观测才能采集到多分量地震数据。

二分量数据在研究孔隙度变化,直接检测气藏和岩性横向变化等方面取得了一些成功。自1986年四分量野外采集成功地研究了地下裂缝等各向异性效应以来,目前主要采用四分量观测,三分量观测和九分量观测。

四分量采集可以说是研究横波分裂的专用采集技术。图8.4.4给出了这种采集技术,它是沿测线进行两次激发(一次平行测线和另一次垂直于测线)并利用两套水平检波器接收

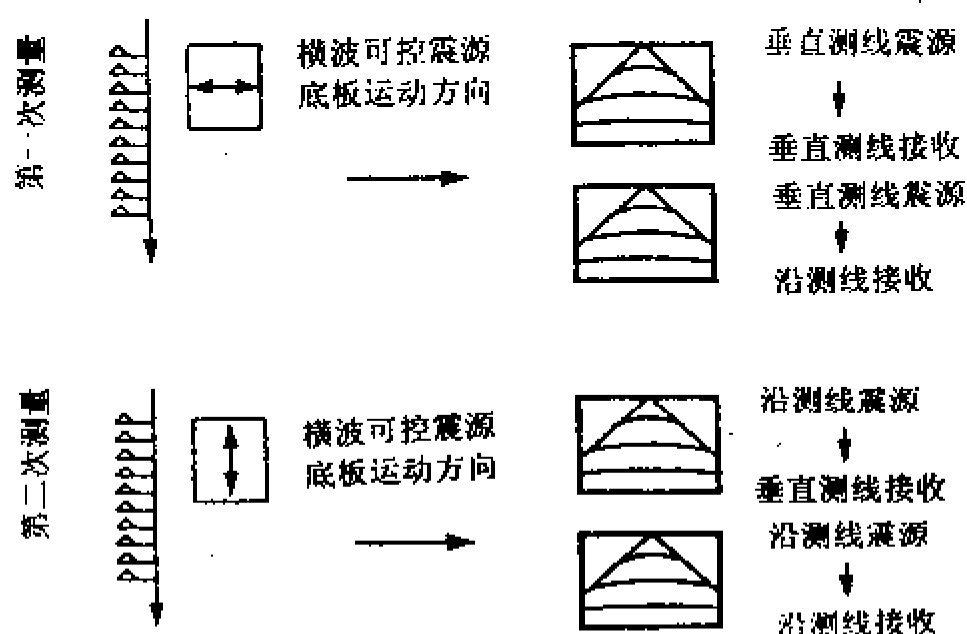


图8.4.4 多源多接收器横波数据采集技术。观测线被激发两次,即一次是垂直测线方向运动而另一次是平行测线。对每一个源位置,数据在每一点由两套水平检波器记录。一套检波器平行测线,另一套垂直测线。这种四分量接收数据用于研究横波分裂

完成的。

一种完整的多分量观测是由三个源(P波、测测线横波和垂直测线横波)和三个检波器(垂直的、径向的和横向的)而产生的九分量观测。图8.4.5显示这种观测方式。

接收器

源		x	y	z
	X	X_x SV-SV	X_y SV-SH	Z_z SV-P
	Y	Y_x SH-SV	Y_y SH-SH	Y_z SH-P
	Z	Z_x P-SV	Z_y P-SH	Z_z P-P

图 8.4.5 九分量地震采集使用了三个正交分量的源运动和相应的三个正交运动的检波器接收

九分量观测中的源可以是一种"全波场"源(即,一个源能产生三种正交的源运动),也可以是多个单分量源产生三种正交的源运动。接收器也类似,可以是三个平行测线放置的单分量检波器或一个扩展的三分量检波器。

由于九分量观测及处理等成本较高,目前用于研究横波分裂的野外观测,有许多是三分量的,即利用 P 波源和三分量检波器进行采集数据。这种观测方式主要是利用 P-SV 转换波,在 3D 观测上可大大降低数据量和成本。

需要指出的是多分集采集,象传统的单分量 P 波采样一样,也要进行标准的 CDP 数据采集技术。

2. *多分量数据的处理流程*

多分量地震数据的处理本质上比传统的 P 波地震数据处理更复杂。由于多分量数据的解释结果的大部分是据不同分量上反射波到时和振幅的比较而得出,因此,多分量数据的处理的主要目标是在处理后的 P 波和 S 波剖面上反射振幅、相位和到时的相似性和差异性都应该是 P 波和 S 波在地下传播时所具有相似性和差异性的指示,而不是数据处理的人为结果。

目前,多分量数据处理的绝大部分仍然是按单分量独立处理的方式进行,因此处理中特别要注意其一致性。如在已给定深度上 P 波和 S 波的速度比应在一个合理的范围内等。

多分量处理中唯一利用了多分量特性的是关于极化方面。如极化滤波和旋转处理。但为了不影响分析横波分裂,极化滤波一般较少使用。旋转处理将在后面专门叙述,因此,在此仅给出两个处理流程,一个是适用于四分量数据,另一个是适用于三分量数据,分别见图 8.4.6 和图 8.4.7。图 8.4.7 中共 CCP 道集是常规 P 波勘探中没有的,我们在下面加以介绍。

写道头和观测系统
基准面静校
CDP 抽道
NMO
剩余静校正
叠加
Alford 旋转确定角
应用旋转角于实际记录
将数据分离成 $S1$ 和 $S2$ 数据集
CDP 抽道集
独立求取 NMO(S1,S2)
独立应用 NMO
静校正应用
CDP 叠加
偏移

图 8.4.6 四分量横波数据处理流程

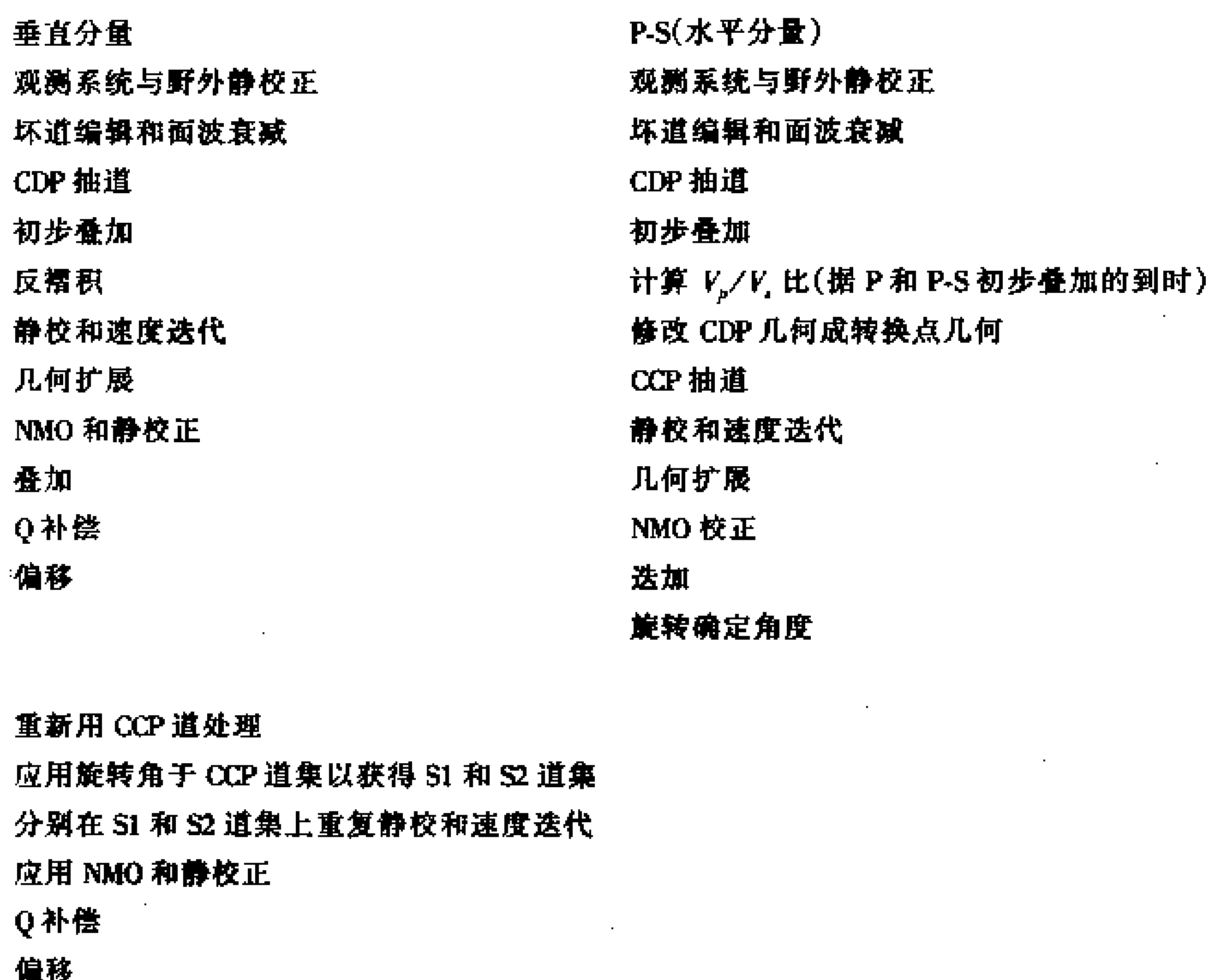


图 8.4.7　三分量地震数据处理流程

3．共转换点(CCP)道集

在利用三分量地震记录研究转换横波的分裂时要进行 CCP 道集分选。如果仍然按 CDP 点道集分选,则对反射点会产生类似于倾斜界面的 P-P 波反射光滑效应,图 8.4.8 显示了对 P-S 波射线路径几何不对称性,即下行能量的入射角不等于上行转换波的反射角。因此需要将具有相同或相近转换点的炮记录收集起来以形成共转换点道集。

Chung 和 Corrigan(1985)在假设平坦均匀层状模型下,发展了据炮检距 X,层厚度 z_i 表达出地下转换点所对应的地面位置(见图 8.4.9),即

$$\xi = \sum_i z_i \mathrm{tg}\theta_i, \qquad X = \xi + \zeta = \xi + \sum_i z_i \mathrm{tg}\eta_i, \tag{8.4.10}$$

这里 θ_i 是下行 P 波在 i 层上的入射角,η_i 是上行转换波 SV 在第 i 层的入射角,$i = 1, 2, \cdots\cdots n$。

定义射线参数 P 为

$$P = \frac{\sin\theta_i}{\alpha_i} = \frac{\sin\eta_i}{\beta_i},$$

其中 α_i 和 β_i 分别是 P 波和 S 波在第 i 层的速度,则 X 和 ζ 能表达成下式,

$$\xi = \sum_i \frac{z_i\alpha_i P}{(1-\alpha_i^2P^2)^{1/2}},$$

$$X = \xi + \sum_i \frac{z_i\beta_i P}{(1-\beta_i^2P^2)^{1/2}}.$$

由于 $P << 1$,上式分母作台劳展开后平方,可得

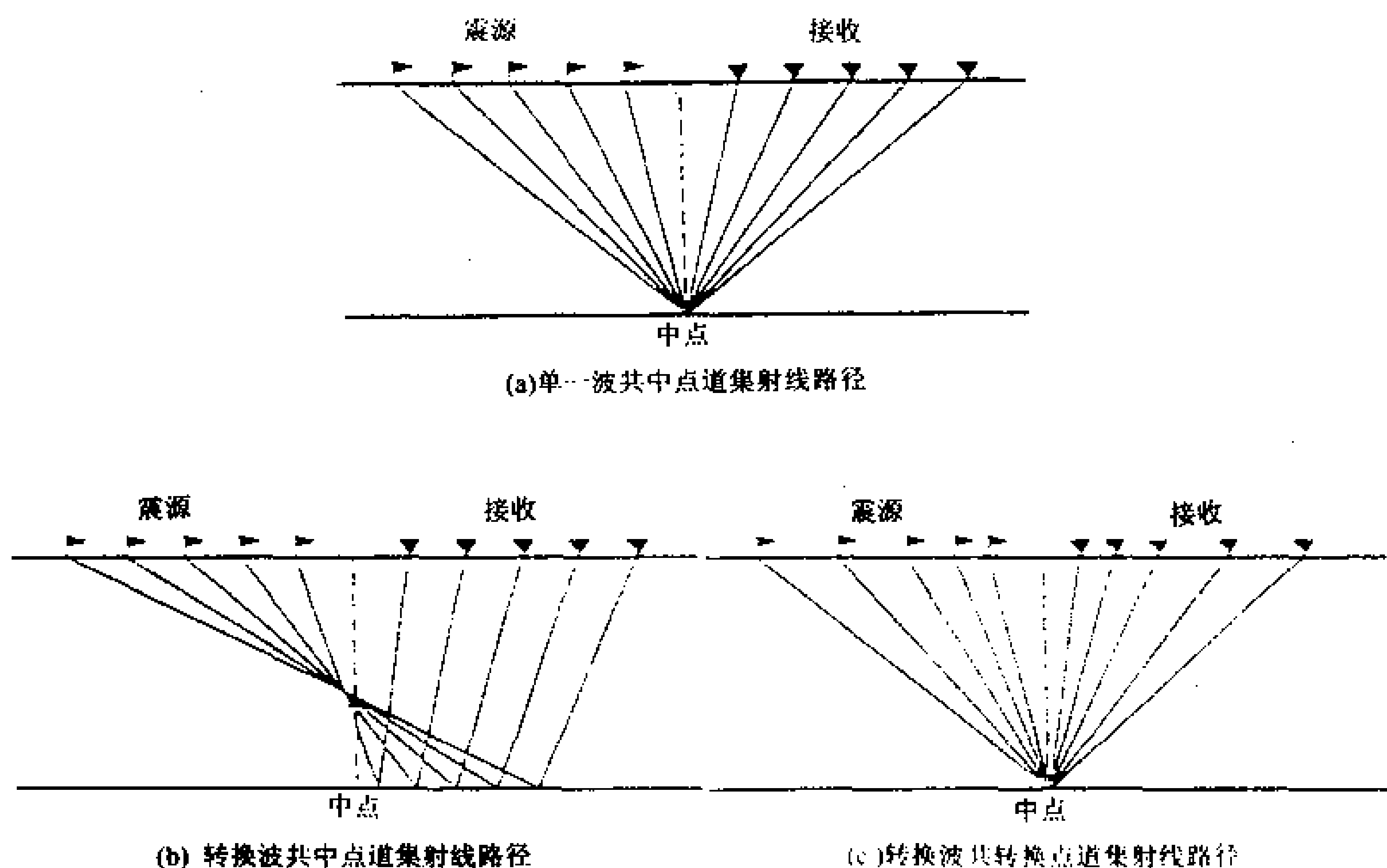


图 8.4.8 单一波地震数据观测(a) 和 P-SV 波观测(b) 的射线路径图。
在(c)中 P 波源与 SV 波检波器的地面位置安排使得在地下产生了一个共转换点。

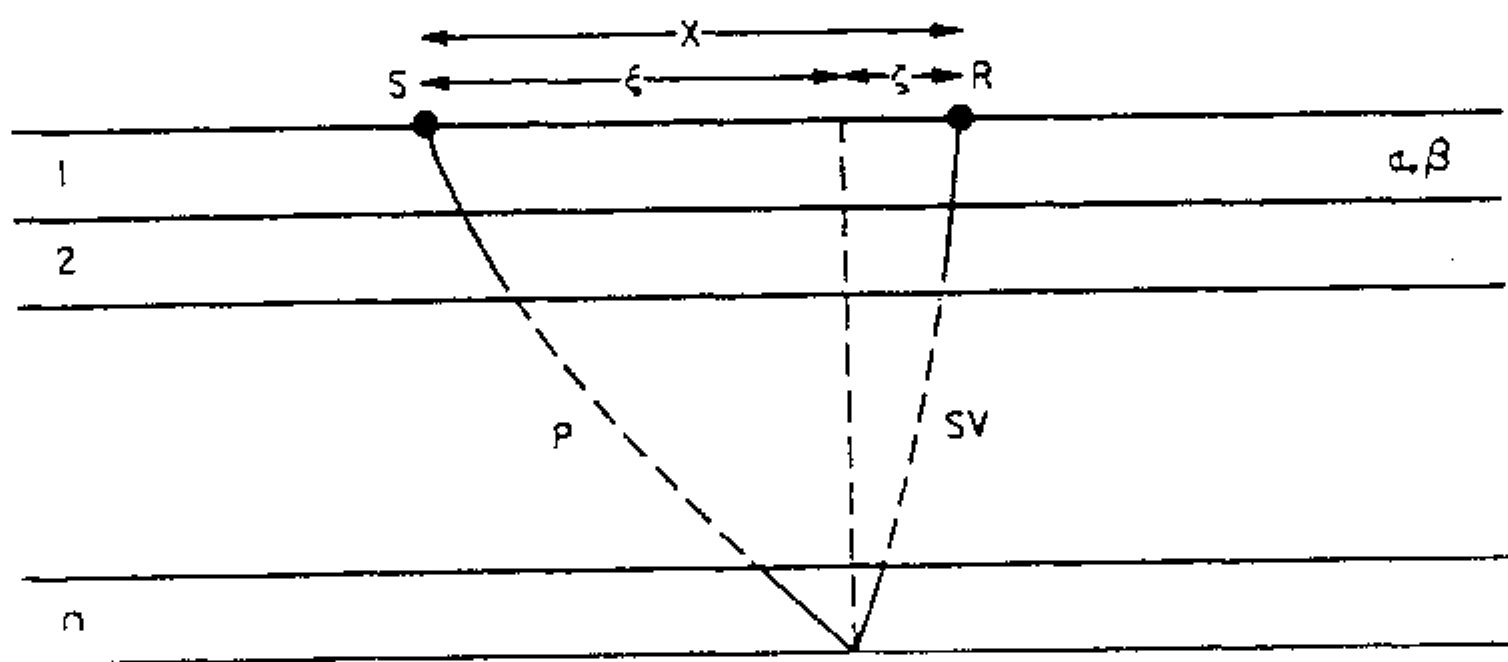


图 8.4.9 P-SV 波在多层介质中的射线与符号关系

$$X^2 = AP^2 + BP^4 + \cdots,$$

$$\xi^2 = CP^2 + DP^4 + \cdots,$$

其中 $A, B, C, D, \cdots$ 都是 z_i, α_i 和 β_i 的函数。

如果我们按 X 台劳级数展开 ξ,并丢掉一阶以上的项,则可得

$$\xi \approx EX, \tag{8.4.11}$$

其中

$$E = \frac{\sum_i z_i \alpha_i}{\sum_i z_i(\alpha_i + \beta_i)}$$

将 E 用感兴趣的反射处的$(V_p/V_s)_{平均}$和 S 波与 P 波的均方根速度 V_s 和 V_p 表达，则最终可得

$$\xi=\frac{X}{1+(V_p/V_s)_{平均}(V_s/V_p)^2} \tag{8.4.12}$$

式(8.4.12)可由计算机计算以提供特定反射时间处具有 CCP 道集的源检对集合，从而完成 CCP 轴道集。

8.4.3 旋转分析法与各向异性估算

Crampin(1985)强调了利用极化图来分析横波分裂。Alford(1986)给出了旋转分析技术，这一技术也可用于分析二分量水平记录。后来 Winterstein 等(1991)和 Thomsen 等(1995)又建立了剥层法。至此，旋转分析法对于近垂直传播的四分量横波记录来说，已发展得较完善。本部分我们除了叙述旋转分析法外，还要进一步说明利用地面地震剖面估算各向异性的办法。

1. *Alford 旋转法*

由四分量理论记录表达式(8.4.2)～(8.4.5)知，每个记录都是由两个波——快慢横波的三角加权叠加后形成。因此，Alford 旋转法就是从四个分量的数据中获得只包含一个波的主时间序列，即

$$S_{/\!/}(t_{/\!/})=f_{/\!/}*w*\gamma_{/\!/} \tag{8.4.13}$$

和

$$S_{\perp}(t_{\perp})=f_{\perp}*w*\gamma_{\perp}$$

实际上，如果我们将(8.4.2)～(8.4.5)写成矩阵的形式，则会有

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{/\!/}(t_{/\!/}) & 0 \\ 0 & S_{\perp}(t_{\perp}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{8.4.14}$$

其中

$$\underset{\sim}{R}(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

为旋转矩阵，且具有正交性质，即 $\underset{\sim}{R}^{-1}(\theta)\underset{\sim}{R}(\theta)=\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}(\theta)\underset{\sim}{R}(\theta)=\underset{\sim}{I}$。

由此，由(8.4.14)不难得到，

$$\begin{bmatrix} S_{/\!/}(t_{/\!/}) & 0 \\ 0 & S_{\perp}(t_{/\!/}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

即

$$S_{/\!/}(t_{/\!/})=\cos^2\theta S_{/\!/}(t)+\sin\theta\cos\theta[S_{21}(t)+S_{12}(t)]+\sin^2\theta S_{22}(t) \tag{8.4.15a}$$

$$S_{\perp}(t_{\perp})=\sin^2\theta S_{/\!/}(t)-\sin\theta\cos\theta[S_{21}(t)+S_{12}(t)]+\cos^2\theta S_{22}(t) \tag{8.4.15b}$$

此外，还有两个方程要满足，即

$$0=\sin^2\theta S_{21}(t)+\sin\theta\cos\theta[S_{11}(t)-S_{22}(t)]-\cos^2\theta S_{12}(t) \tag{8.4.16a}$$

$$0=\sin^2\theta S_{12}(t)+\sin\theta\cos\theta[S_{11}(t)-S_{22}(t)]-\cos^2\theta S_{21}(t) \tag{8.4.16b}$$

Alford(1986)首次推导出方程(8.4.15)和(8.4.16)。Thomsen(1988)也从不同的观点导出了上述方程。检查方程(8.4.16)知，这两个方程不能满足，除非有下列等式成立，

$$S_{12}(t)=S_{21}(t) \tag{8.4.17}$$

尽管方程(8.4.17)很容易由模型满足,但对实际数据就不一定能满足,故该式构成了有用的质量控制。即除非方程(8.4.17)在可接受的精度内由实际数据满足,否则(8.4.15)式代表的处理就是不正确的。因此,方程(8.4.17)是求旋转角的一个准则。

2. *剥层法*

在四分量记录剖面按矩阵形式排放时,Alford 旋转法就是寻找一个旋转角,使非对角线上的两上记录(S_{12}和 S_{21})达到最小,从而获得快慢横波 S_1 和 S_2 这两个对角线剖面。然后再通过互相关可获 S_1 和 S_2 剖面上的到时差。这在整个地下介质是均匀的各向异性时是成立的。当地下各向异性的主轴方向随深度在发生变化时,横波分裂在这时要多次进行。因而,Alford 旋转就会出现问题。Winterstein 和 Meadows(1991)首先在研究四分量的 VSP 时提出剥层(Layer Stripping)法,即为分析某一层以下的各向异性效应,简单地将该层内的各向异性减去。Thomsen 等(1995,1996)将这一技术扩展到地面四分量记录。下面将这一技术加以阐述。

剥层法有两个关于地下介质特征的假设。即,第一,S 波极化在某一层内必须是保持常数。因此,极化只在层边界上发生不连续的变化,且在已给定的层内,快慢波之间的延迟是从层的上边界的零值单调地增加到层下边界的某一个值。第二,每一个层必须是足够厚的,因而双折射足够的大到能对那一层的极化方向和延迟时间正确地求出。

剥层法的具体过程是

(1) 对所有的已初步处理的 VSP 数据或迭加后的地面数据计算极化方向和时间延迟(利用 Alford 旋转)。

(2) 在极化方向和时间延迟上寻找指示 S 波极化可能已发生变化的位置,并定义该位置以上的为一上层。然后应用旋转将源和接收器轴旋转到与该上层中快 S 波一致的自然坐标系中。

(3) 理想情况下,在旋转后的新坐标系下,非对角线分量的地震记录应该全是噪声,而在对角线上的两个记录除了时间差外应是相同的。当存在下层各向异性时,非对角线上的记录仍有不为零的尾波,这时要应用静态时移。对 VSP 数据,将非对角线上的记录和慢波记录将移动一个时间延迟量,使之与快波分量对齐。对地面数据而言,只将非对角线道向上移动时间延迟的一半,而慢波记录向上移动一个时间延迟。

(4) 在第(3) 步的剥层之后,再应用 Alford 旋转如第(1)步和第(2)步那样。这样重复(1)到(3)步,直到所有各向异性层进行完了为止。

3. *各向异性分析*

各向异性分析是指在多分量剖面已进行了处理,使之成为 S_1 剖面和 S_2 剖面后进一步给出各向异性大小(代表了裂缝密度分布)的估算。各向异性分析包括两个方面,一是旅行时变化分析,二是振幅变化分析。

旅行时变化分析各向异性大小一般是据下列公式

$$各向异性=\frac{\Delta T_2-\Delta T_1}{T_2-T_1},$$

这里 T_1 和 T_2 是在 S_1 剖面上分别在感兴趣地带的顶和底的反射到时,而 ΔT_1 和 ΔT_2 则是该反射层在 S_1 剖面和 S_2 剖面之间的到时差。

振幅变化分析是依据下列公式

$$R_{s1} - R_{s2} = -(1/2)(\gamma_2 - \gamma_1)$$

即法线反射系数差是反射界面上下两个层之间各向异性差的一半。

因此，在 S_1 剖面和 S_2 剖面上的振幅差给出了具有更大空间分辨力的各向异性差。

在进行上述各向异性分析后，一般将进一步绘制各向异性大小的平面图或剖面图。这样的图一般反映了裂缝方向的裂缝强度分布。

8.5 地震横波检测裂缝的实际效果

横波分裂现象已表明是检测储层单元内裂隙化岩石内部结构的可行工具。方位各向异性和方位可由分析四分量横波(来自 VSP，地面和十字双极横波测井等)甚至二分量横波而确定。本节主要目的是通过将地震横波分裂确定的裂缝方向与地质分析法(如岩心分析、露头分析)和测井分析法(如全波形声测井，井下电视和井下成像测井 FMI)所确定的进行比较，以检查地震法的实际效果。当然，最有效的检验是钻井。本节最后给出一个已被钻井证实的实例。

8.5.1 从 VSP 和井下声波测井确定的天然裂缝

本部分我们主要比较 VSP 和十字双极声测井的结果。所比较的剖面上天然裂缝也可从岩心和井下成像(FMI)测井中获得。VSP 的地震波长是数百英尺，而十字双极测井的波长是一英尺或不到一英尺的数量级。因此，通过比较，我们可看到据岩心分析而得到的裂缝方位、大小和缝宽等不同的裂缝、裂隙是否在 VSP 和十字双极测井上也有响应。

1. 数据采集和处理

VSP 数据是在美国的 Oklahoma 州于 1992 年采集。两个横波可控震源，扫描范围是 5～50Hz，源方位是北 31°东，井源距为 40m。井中接收位置是从 2440m 到 3010m，23m 道距，共记录 63 道。三分量检波器上组合有磁倾仪，该仪用来确定检波器上相对于磁北的方位角。采集方法使用了 2×2 横波四分量矩阵法，获得了 xx, xy, yx 和 yy 的记录(第一个 x 或 y 代表源方位，第二个 x 或 y 代表检波器方位)。数据的处理主要包括了检波器定位，不同方向源产生的数据的振幅调整和带通滤波(5～35Hz)。记录中信号的主频范围是 16-20Hz。

十字双极测井仪包含了单极源和双极源。双极源和检波器在两个正交水平轴 x 和 y 上排列。x 方向双极源与 y 方向双极源置于测井仪的上部。在源下相距 4.85m(16ft)处有四个不同深度的接收器(彼此相距 0.305m(1ft))。十字双极可测量特定极化的横波能量，因而在每一个深度上可获得 2×2 横波数据矩阵。数据记录了 18ms，为了避免管套波只使用了 4ms 的数据。主要的横波能量在 2.2～5.2kHz 范围内。带通滤波器(1.75-5.8kHz)用于减少噪声。象 VSP 一样，来自 x 源和 y 源的数据作了振幅调整以及接收方位的校正。

2. 极化方向估算与裂缝方向

应用剥层法技术和旋转法估算了 VSP 记录的快波极化方向和快慢波之间的时间延迟。表 8.5.1 给出了从近地表到 3010m 的极化方向和快波分量。图 8.5.1 表明了快分裂横波的极化方位。图 8.5.2 表明了时间延迟。

表 8.5.1　　VSP 数据极化方向和快波分量随深度的变化

深度(m)	Alford 旋转(°)	剥层法(°)	快横波分量
0~533	30	-	yy
533~1997	52-55	60-70	yy
1997~2508	-	35-50	xx
2508~2530	-	60-70	yy
2530~2896	-	35-50	xx
2896~3010	-	30-35	xx

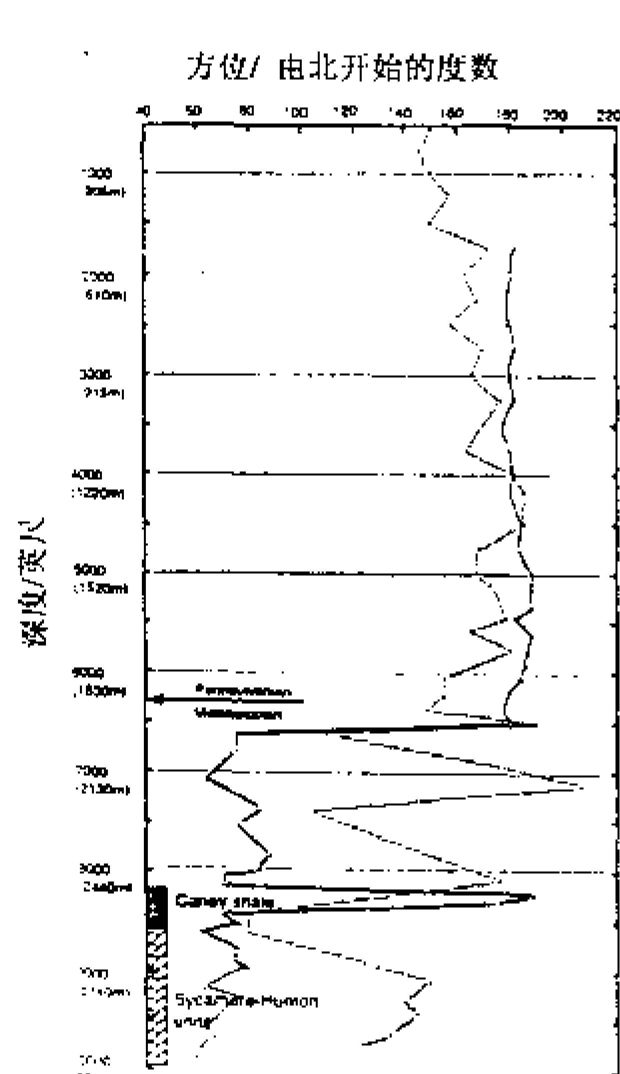


图 8.5.1　由分析 VSP 所得的各向异性方位与深度关系，实线代表使用了剥层技术，虚线代表独立的 Alford 旋转技术

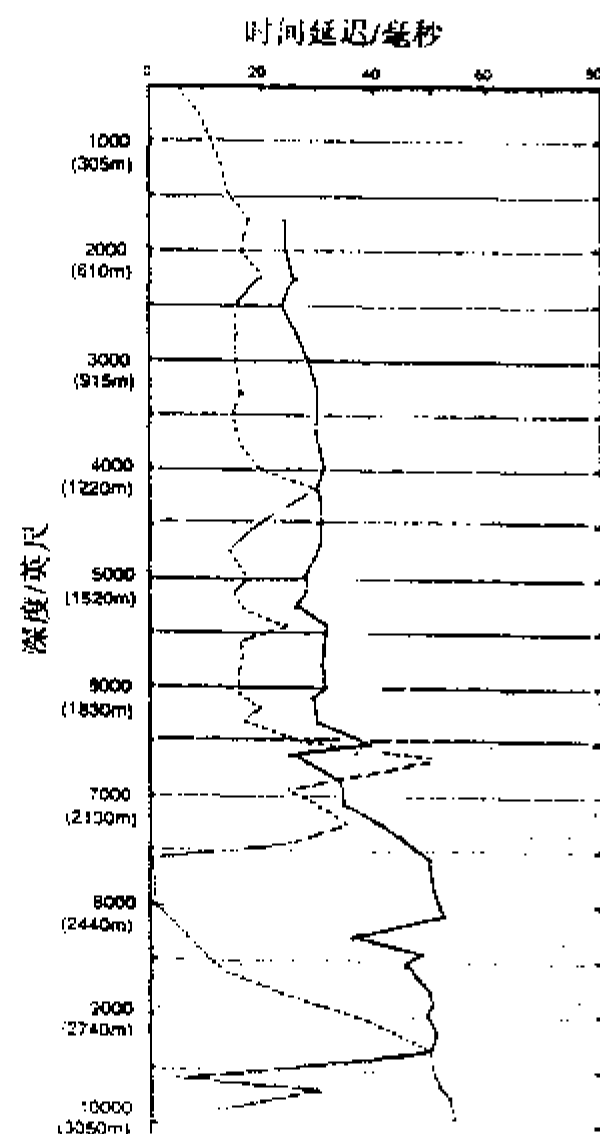


图 8.5.2　由分析 VSP 所得的快慢横波之间的时间延迟。实线代表剥层的结果，虚线代表独立的旋转结果

对于十字双极横波测井的四个分量是在深度间隔 2652~2988m 上进行估算极化方向的。图 8.5.3 总结了在碳酸盐深度间隔 2713~2970m 上可用的数据分析结果。三个明显不同的组给出方位主要在 N35°-75°E 范围内。

岩心分析裂缝及裂缝方位是在三个间隔上进行，即 2709~2712m，2713~2722m，2893~2902m。宏观裂缝是垂直或近垂直。裂缝有些是开启的，有些充填了方解石或泥。在特定深度间隔上既有开启缝，也有充填缝。方解石充填的裂缝在 2900~2903m 的深度上，但得不到缝方位。图 8.5.3 给出了来自岩心数据裂缝方位的玫瑰花图和在 2690~2740m 上进行的 FMI 的裂缝走向直方图的结果。十分有意思的是在 2893~2896m 间隔上岩心数据表明了

N95° ~ 110°E 的缝方位与十字双极数据在 2893m 处的缝方位类似。

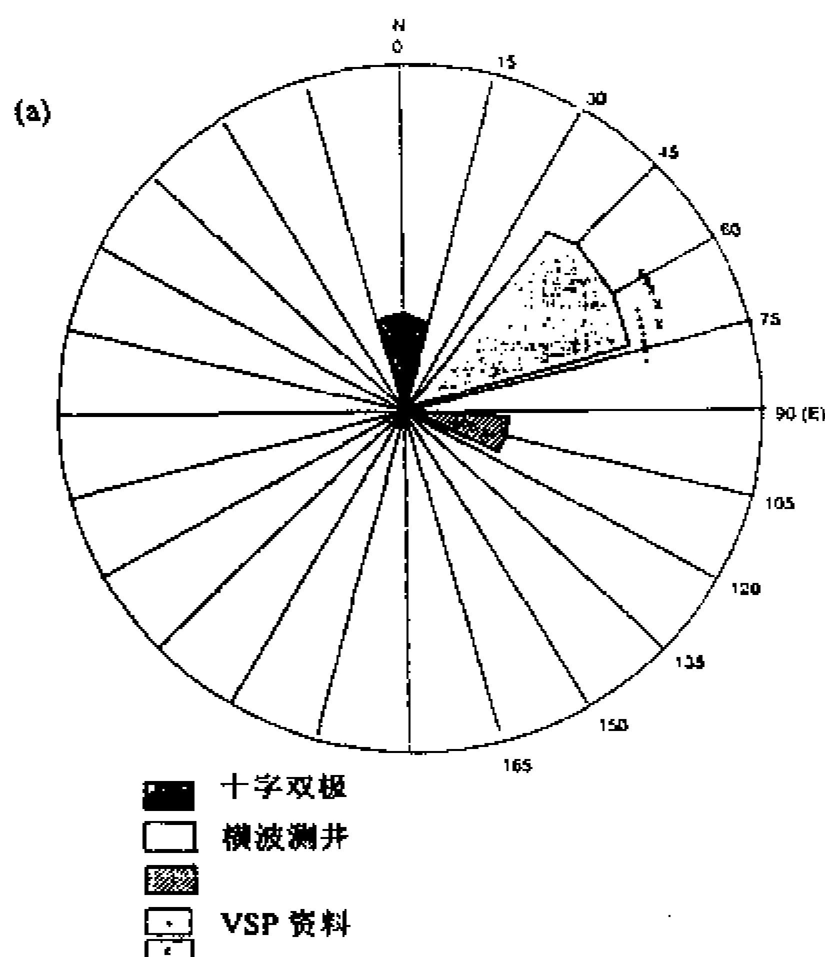


图 8.5.3a　来自碳酸盐剖面特定深度间隔上十字双极横波测井获得的各向异性方位图（据 VSP 数据获得的方位也给出了）

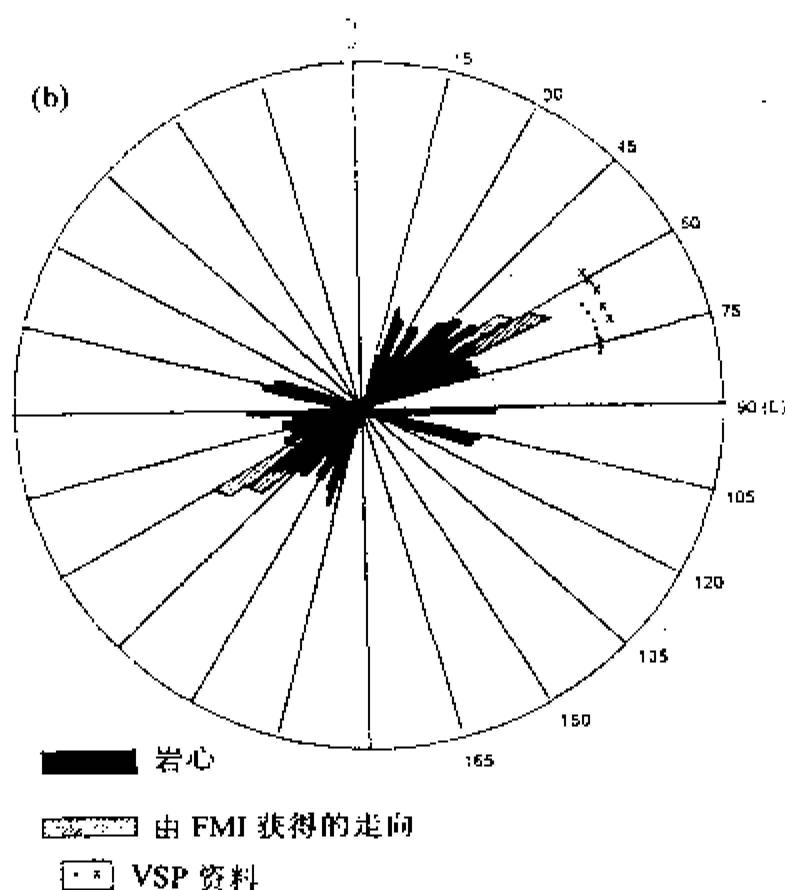


图 8.5.3b　据岩心和 FMI 获得的在碳酸盐剖面上特定深度间隔上裂缝方位图，岩心结果：2715-18m，N15° ~ 30°E，2893 ~ 96m，N95° ~ 110°E；2713 ~ 20，2893 ~ 98m，N40° ~ 75°E（来自 VSP 的各向异性方位也给出了）

3. 结果比较讨论

在 Oklahoma 某口井的 VSP 的数据已表明了横波极化方向随深度是变化的。所得结果表明了在相应剖面上有三个各向异性层。主要的方位变化是在 Pennsylvanian-Mississippian 边界的深度附近。在该处横波分裂时间延迟的变化说明了在这个不整合面以下的裂缝裂隙是在古应力场下打开的，后续的部分矿化保持了这些缝是开启的。

在 2620 ~ 2988m 碳酸盐深度上的天然裂缝得到了由定位岩心和 FMI 测井的分析证实。裂缝是垂直到近垂直的，两个主方位是 N40° ~ 70°E（北东向）和 N95° ~ 110°E（东南东向）。在这个间隔由上 VSP 数据得到的主方位一般来说与岩心和 FMI 中的北东一致。

十字双极测井是响应于比声波长 0.9 ~ 0.3m 还要小的裂缝或微裂隙。十字双极测井数据的各向异性分析得到了三个不同的方位，其中北东向和东南东向的两个方位相应于岩心测量的结果。北东向的缝方位相应于从 VSP 数据（在 2710 ~ 2896m）获得的方位。因此，VSP 响应于北东向近平行排列的宏观裂缝和微观裂隙的组合结果。

8.5.2　用 P-S 转换波确定的储层内裂缝方向

P-S 转换波被认为是成本有效的描述裂缝走向、密度和横向范围的另一种多分量观测。实际问题上，P-S 波比非转换波具有更多的困难。但经过细心的观测设计，采集和处理，各向异性参数也能成功地从 P-S 转换波中获得。本部分以委内瑞拉西南部的裂缝储层内各向

异性估算为例表明这一事实。

1. 地面三分量记录的观测设计、采集和处理

三条 10 公里的三分量测线中心位于感兴趣的地段，交点与一口井位重合，而且每一测线又至少与具有完整的测井信息的另两口井相交。此外，有两条测线与已从过去 P 波数据中获知的两个正断层(北东-南西向和北西-南东向)几乎平行，但第三条测线几乎是平分那两条测线。

一个噪声测试排列检查了转换波的质量、面波色散和最佳源检空间间隔。基于噪声测试分析，为了加强转换波，设计了采集参数(见表 8.5.2)。

表 8.5.2　三分量地面观测参数

每分量道数	16	炸药深度	10m
3C 检波器总数	648	炸药量	1kg
近偏移距道	17m	采样率	2ms
远偏移距道	3672m	低　截	没用
每串检波器个数	6	高　截	128Hz
单个检波器间距	3.4m	陷　波	没用
每条测线炮数	124	记录长	6s
炮点间距	51m		

为了各向异性分析，数据的质量无论如何强调都不会过分。原始炮记录就旅行时，振幅和相对于每条测线上的反射波组都要检查。

数据处理流程(见图 8.4.7)的设计是为了对所有分量来说保存相对真振幅、最大化频带和最优化速度和静校正。数据初步叠加后估算了由 P 和 P-S 旅行时确定的 V_P/V_S 为 2.5 (平均值)。所有分量在做了偏移之后都展示了不同分量之间易于相关的反射波。图 8.5.4 给出了三条测线各分量的偏移剖面。为确保处理质量，所有可能的分量在交点处作了检查，P 波剖面还与合成记录作了对比。

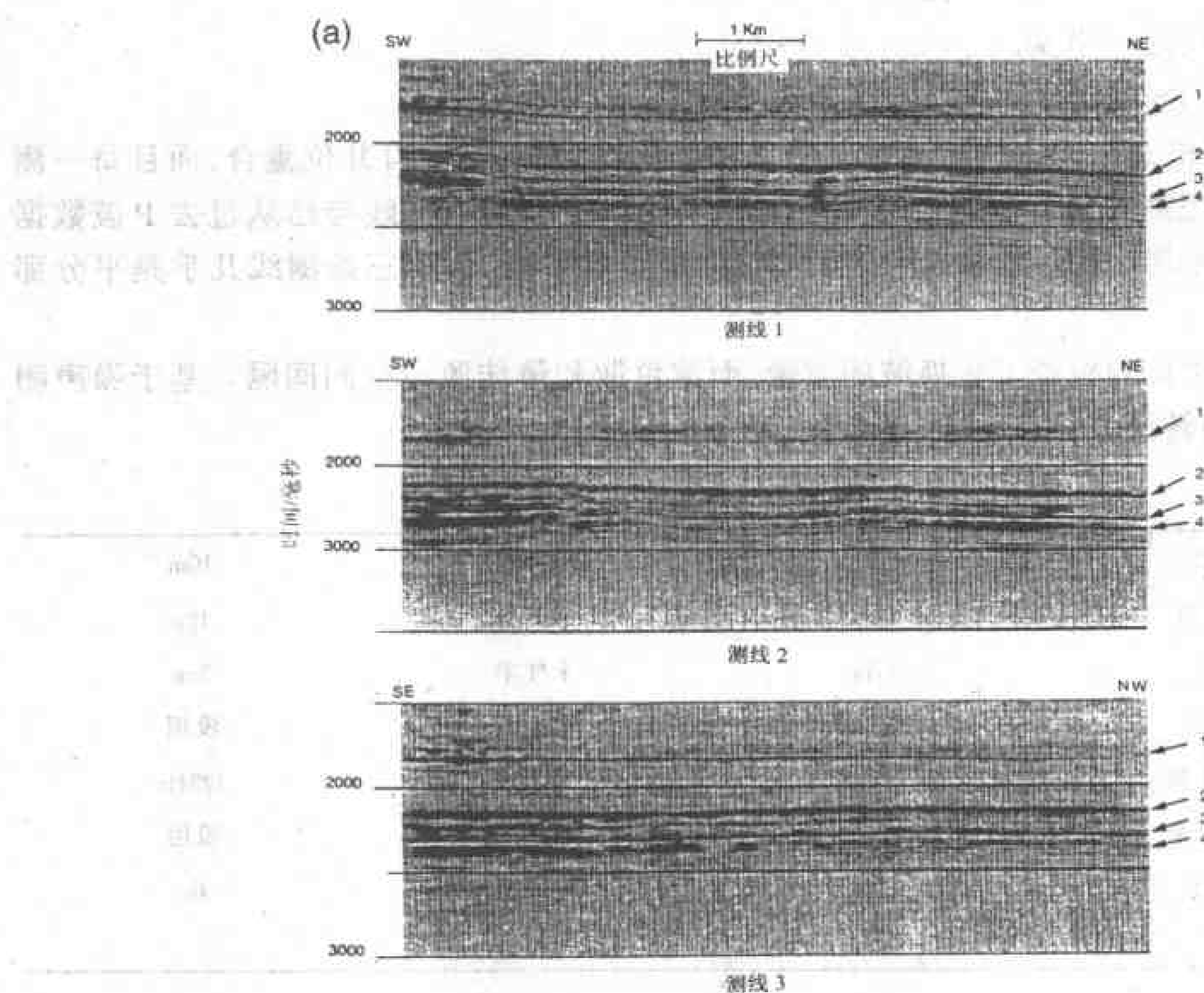
2. 旋转分析与各向异性成图

图 8.5.5 说明了二分量记录旋转方法。旋转角的合理性是由 S_1 和 S_2 之间的互相关和能量比来检查。能量比在 3D P-S 转换波数据分析时证明更可取。另一种办法是应用旋转角，评价 S_1 和 S_2 之间的旅行时差。正确的旋转角应使 S_1 和 S_2 剖面间的时间差达到最大，图 8.5.6 表明了测线在旋转后交点处的 P-S 剖面，剖面在 3200～4100ms 很好地匹配了(旋转后)。图 8.5.7 给出了使用能量比作为准则从三条测线上获得的旋转角。这些角都是相对于北给出的，且测线间的角是内插给出。

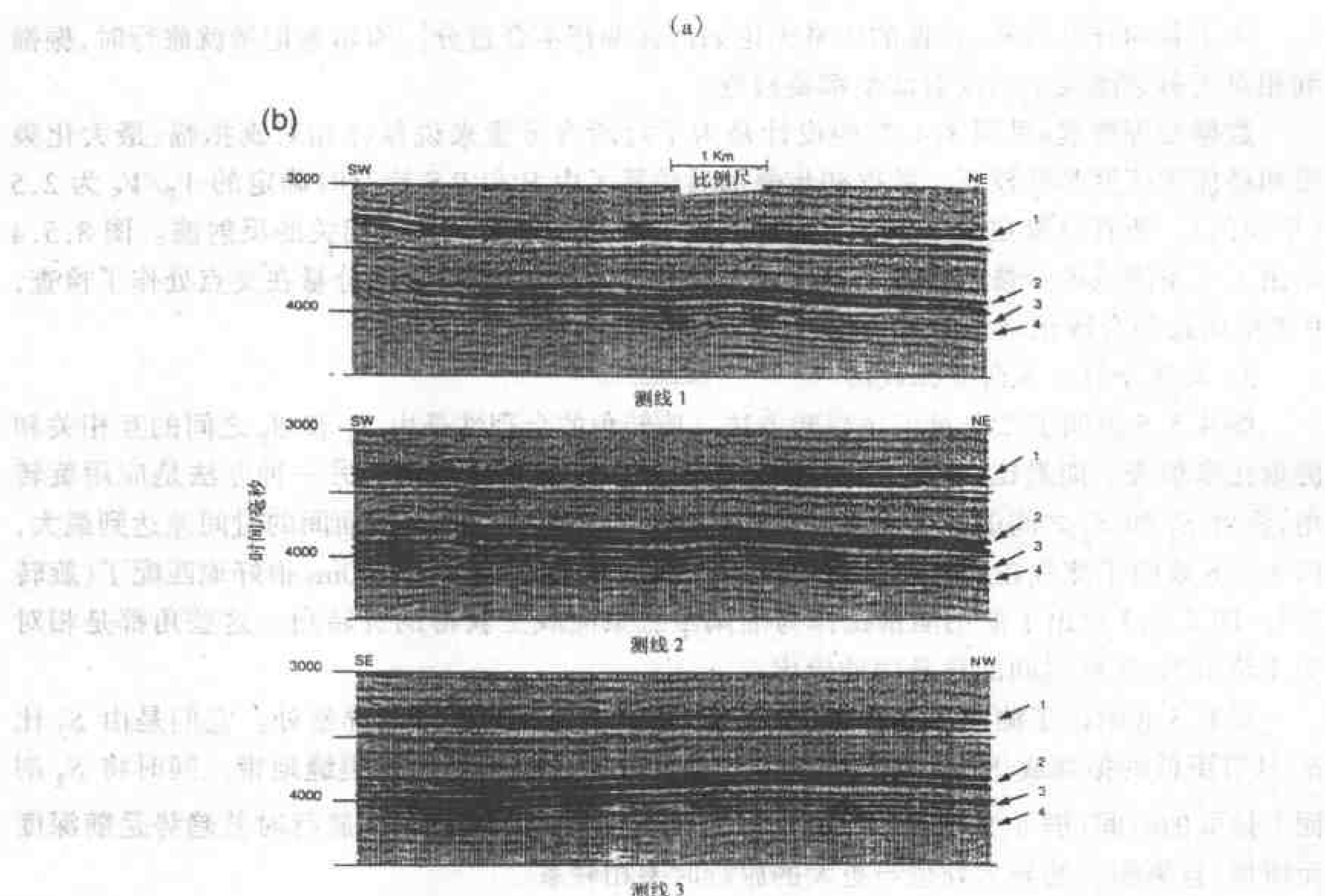
图 8.5.8 给出了测线 1 在储层处 S_1 和 S_2 剖面上反射振幅的异常处。它们是由 S_2 比 S_1 具有更低的振幅或 S_2 与 S_1 剖面的不连续性有差异而指示的强裂缝地带。同时将 S_2 剖面上拾取的时间(图 8.5.8 底)重叠画到 S_1 剖面上(图 8.5.8 顶)。旅行时差趋势是随深度而增加，且振幅上的异常处也与更大的旅行时差相联系。

为了更好地看出沿测线的到时差，按以下步骤构造各向异性图：

(1) 将 P 波反射事件与转换波剖面上的事件相联系。


(a)
SW
1 Km
比例尺
NE
2000
3000
测线 1
SW
NE
时间/毫秒
2000
3000
测线 2
SE
NW
2000
3000
测线 3

(a)


(b)
3000
SW
1 Km
比例尺
NE
4000
测线 1
3000
SW
NE
时间/毫秒
4000
测线 2
3000
SE
NW
4000
测线 3

(b)

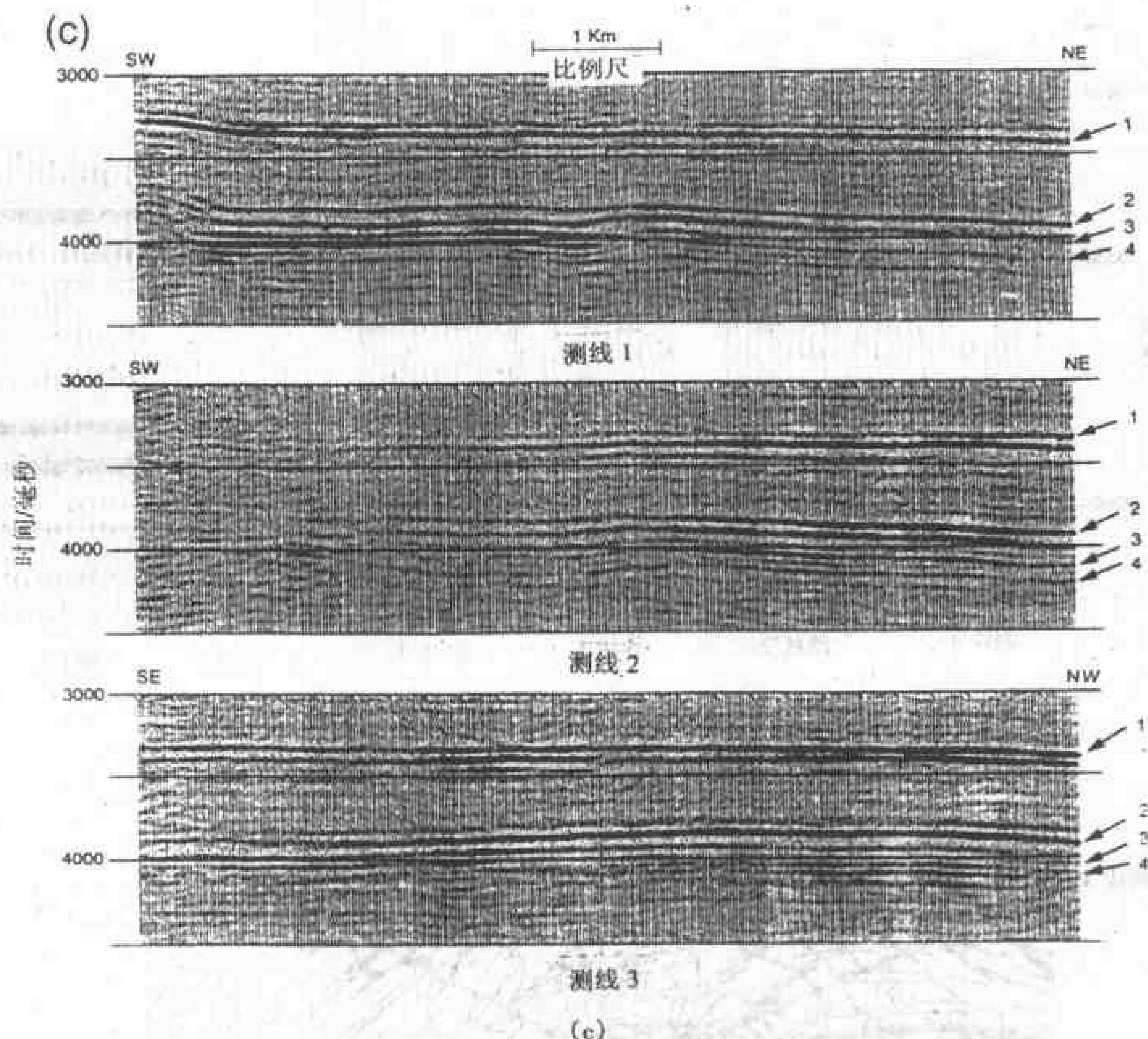


图 8.5.4 三条测线的偏移剖面的相对真振幅图。

(a) 垂直分量；(b) 径向分量；(c)横向分量（感兴趣的波组表有 1-4）

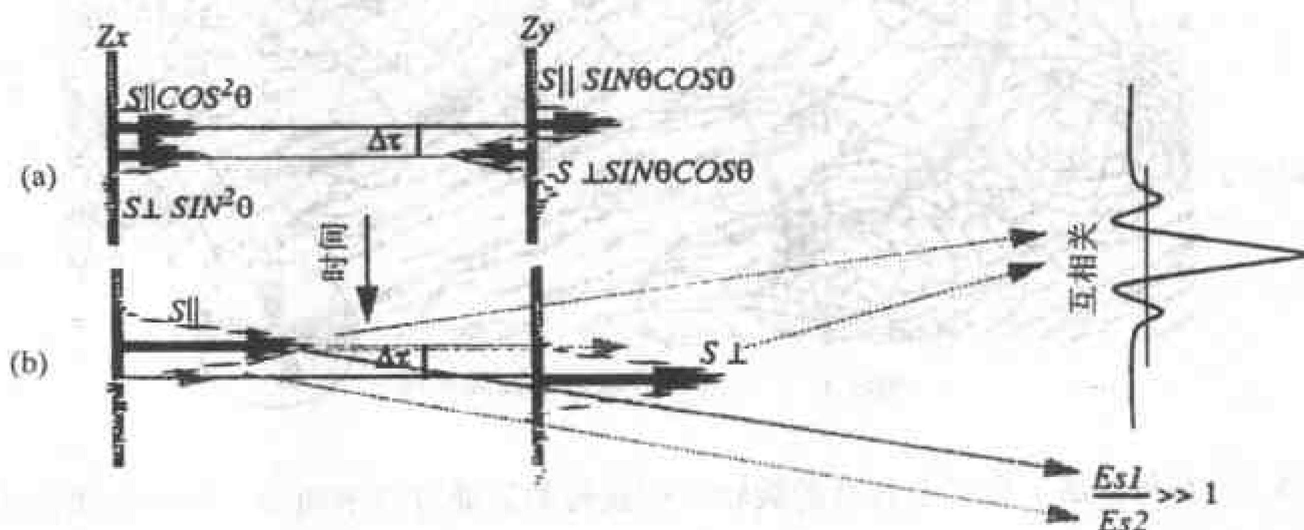


图 8.5.5 两分量旋转确定旋转角

S_1 和 S_2 的互相关和能量比 E_{S1}/E_{S2} 作为正确旋转角的判别标准

(2) 拾取感兴趣的反射层时间。

(3) 在每一个反射的相应深度之间计算 S_1 和 S_2 的到时差。

(4) 到时差绘制到所有测线的所有深度点上(到时差是正的,表示裂缝走向为北西-南东,负的表示南西-北东)。

上述分析结果与 FMS 测井和井口椭圆性分析结果相一致,反映观测到了两个方位的裂

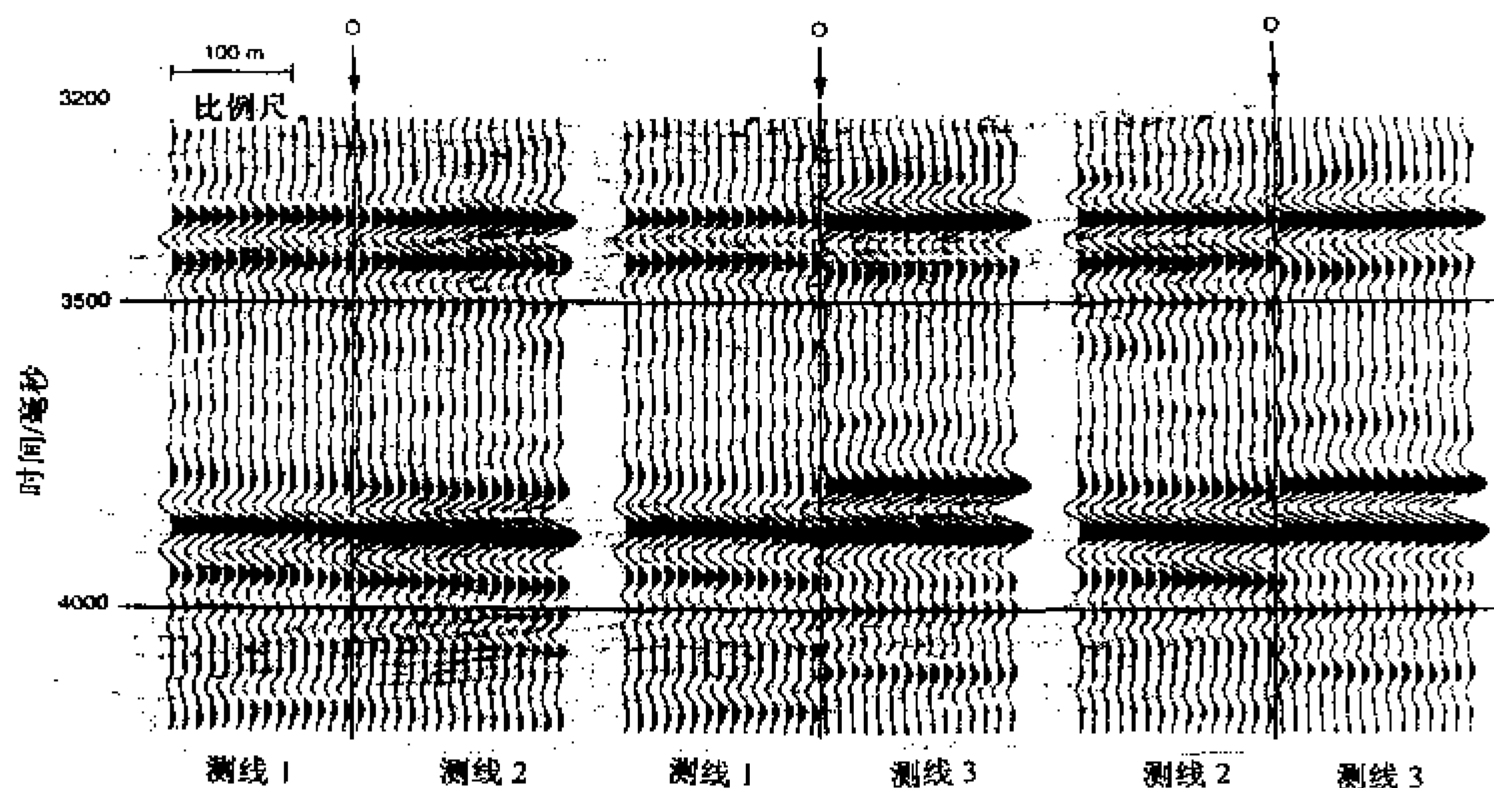


图 8.5.6 测线和测线在交点处进行旋转后(S_1 和 S_2)的对比。

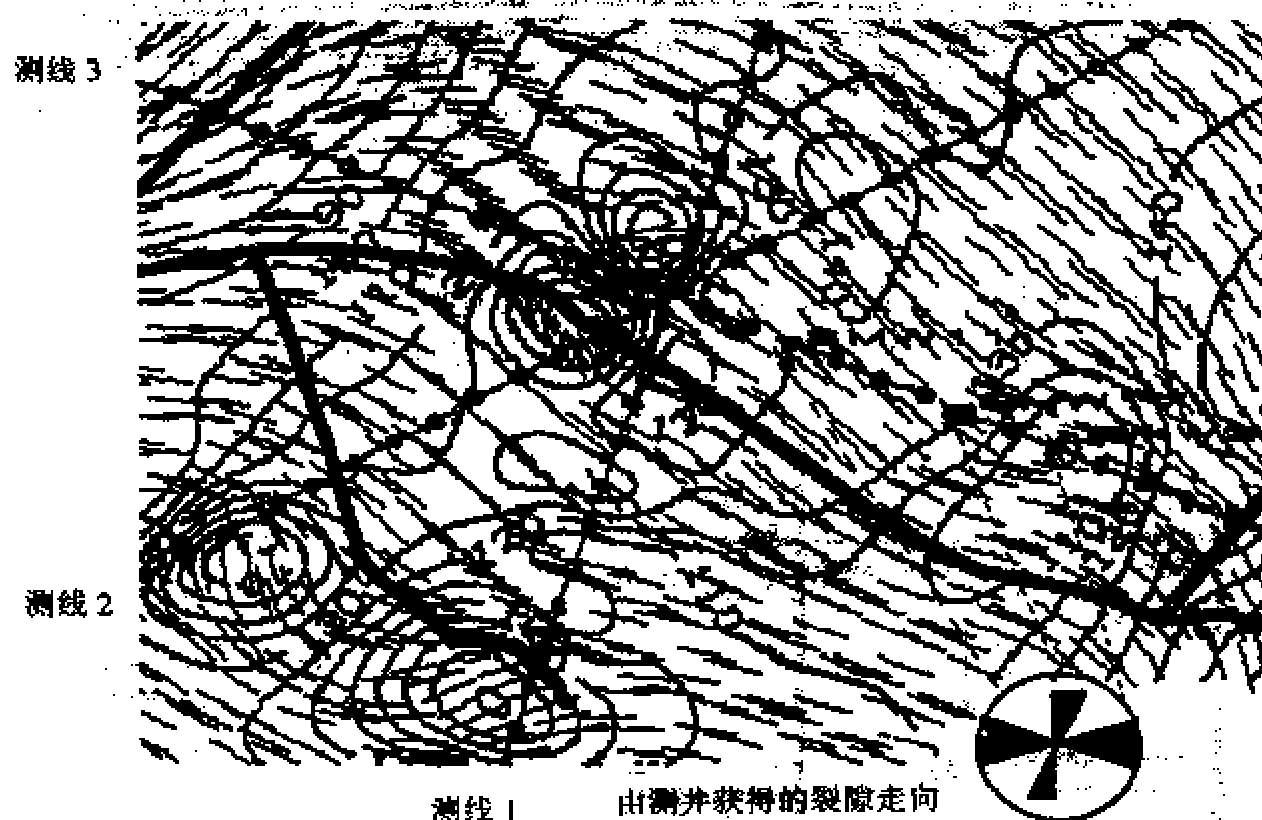


图 8.5.7 在第 3 层上由三条测线的旋转分析获得的裂缝方位平面图。图中粗黑线为断层。

缝系统,且主要的是北西-南东方向。

8.5.3 地面四分量横波预测垂直裂缝强度

美国 Texas 中心的奥斯汀白垩层是研究横波分裂的天然实验室。由于平行分布的垂直裂缝提供了生产石油的主要通道,在这里 83%的井是水平的。Mueller(1992)报导了使用新的横波技术预测了裂缝的方位和裂缝强度,并得到了实际钻井的证实。

1. 数据采集和处理

数据的采集是按四分量方式进行的(见图 8.4.4)。这种采集是一种能充分接收到不同极化横波到达的形式。野外采集参数见表 8.5.1。

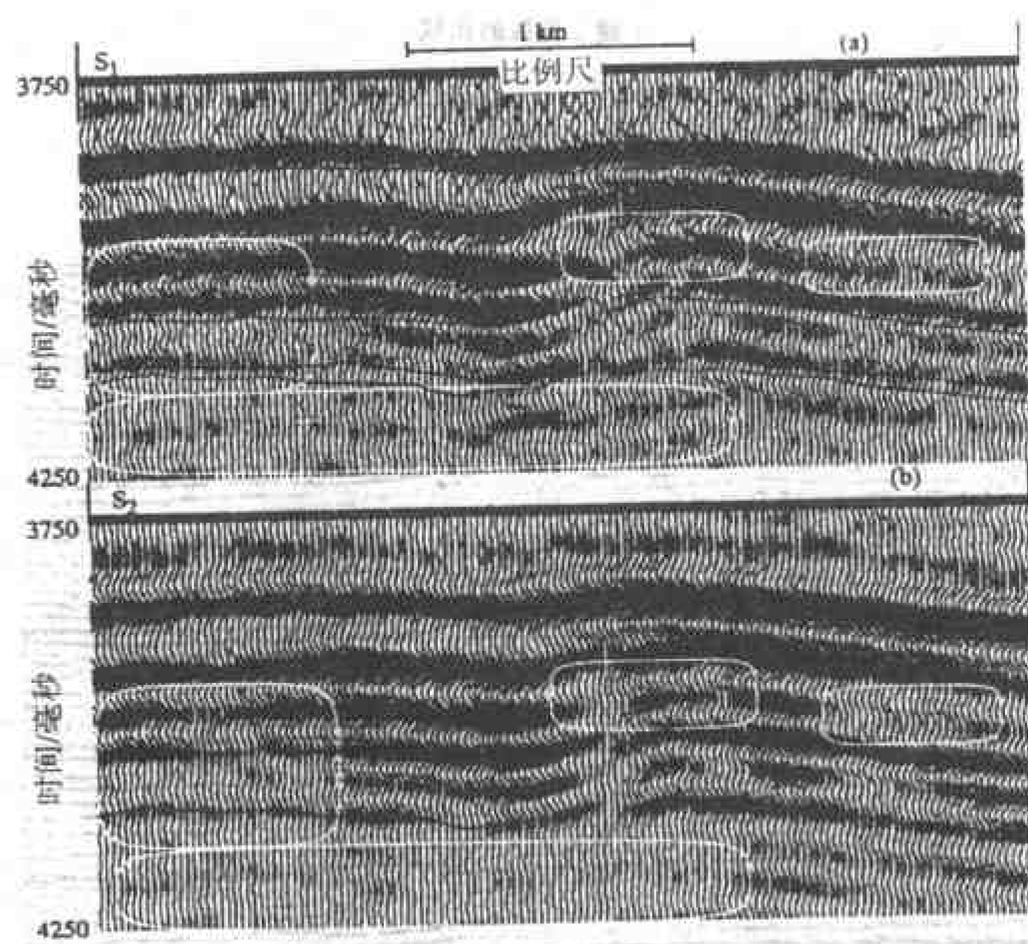


图 8.5.8　储层上测线 1 的 S_1 和 S_2 相对振幅图。黑线代表了在 S_2 和 S_1 剖面上的拾取的时间。线框指示了振幅异常带

表 8.5.1　　　四分量地面地震采集参数

参数	值
检波器组间隔	33.5m
检波器组长度	67.0m
每组检波器	24
检波器组中心在小旗处。沿测线和垂直测线的检波器组并置沿测线排列。排列中心放炮。	
远偏移距	2010.0m
每一端检波器组数	60
沿测线偏移距	67.0m
可控震源	4
源间隔	67.0m
源长度	53.4m
源组合	4×16.8m
每一炮点震源平板沿测线和垂直测线振动	
每炮点 10 次移动的扫描数	10
扫描频率	8～56Hz
扫描长度	24s
记录长度	30s
听取时间	6s

数据处理流程见图 8.4.6(但本次没有做偏移)。处理结果见图 8.5.9。由图可见，在奥斯汀白垩层处(正好在 4s 以下)，同一个反射层的到时差约有 70ms(这个值相应于 2% 的 S 波双折射)。

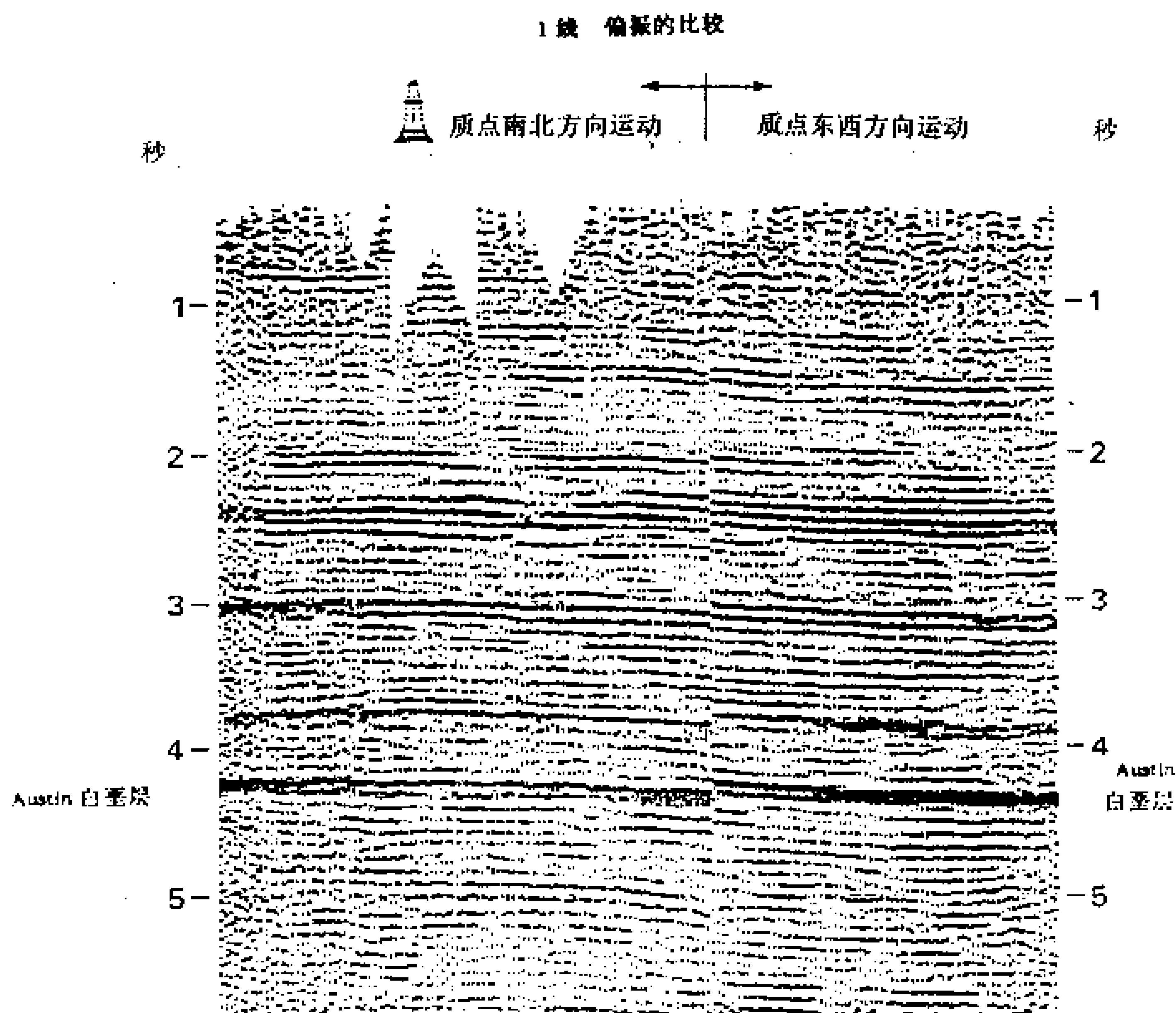


图 8.5.9 测线 1 横波地震处理结果比较

左边显示了南北向粒子运动而右边显示了东西向粒子运动。

两剖面在交点处由方位各向异性导致了时间不匹配(随时间增加而单调增加)

用于将采集的四分量记录旋转到天然极化方向的角度是通过 Alford 旋转分析在迭加数据上逐点进行而获得。计算时分两个时窗,一个是奥斯汀白垩层,另一个是整个数据。最后得到相同的方位,表明了该区各向异性的主轴在东西方向。

2. S_1 和 S_2 剖面解释与钻井证实

由于到时差确定的是平均各向异性(即平均裂缝方位和强度),而迭加后的快(S_1)和慢(S_2)横波剖面上振幅信息都反映了储层的岩石特性。故在此比较 S_1 和 S_2 剖面上的振幅。

S_1 剖面,代表了平行于裂缝平面的横波极化,描述了本质上是不含裂缝的地层速度影响的粒子运动。相反,S_2 剖面代表了反射率十分敏感的弱性化的或裂缝化的地层中粒子运动。因此,S_2 速度受裂缝影响,且作为裂缝强度的函数,从不含裂缝的速度值开始减小。

图 8.5.10 比较了 S_1 和 S_2 数据集之间的反射特点。S_1 剖面的澳斯汀白垩层位(左边 4.85s,右边 4.95s)具有一致的反射振幅。然而,S_2 剖面在同样的层位(左边 4.92s,右边5.0 s)处有明显的振幅变化,明显的对比表明了慢波对横向裂缝强度变化的敏感性。

为了评价解释结果,已钻了一口水平井用于测试来自该地另一测线上 S_2 振幅的异常,如图8.5.11所示。在地震剖面上解释的 S_2 异常在图上用沿剖面线的黑实方块表示。图 8.5.12 表示了在钻井轨迹上方解石充填裂缝的位置。事实表明,水平井孔使石油产量大大高

于邻近的那些传统井。因此，振幅异常在旅行时方法不能分辨的薄的高裂隙强度带的有利地段上是十分有用的。

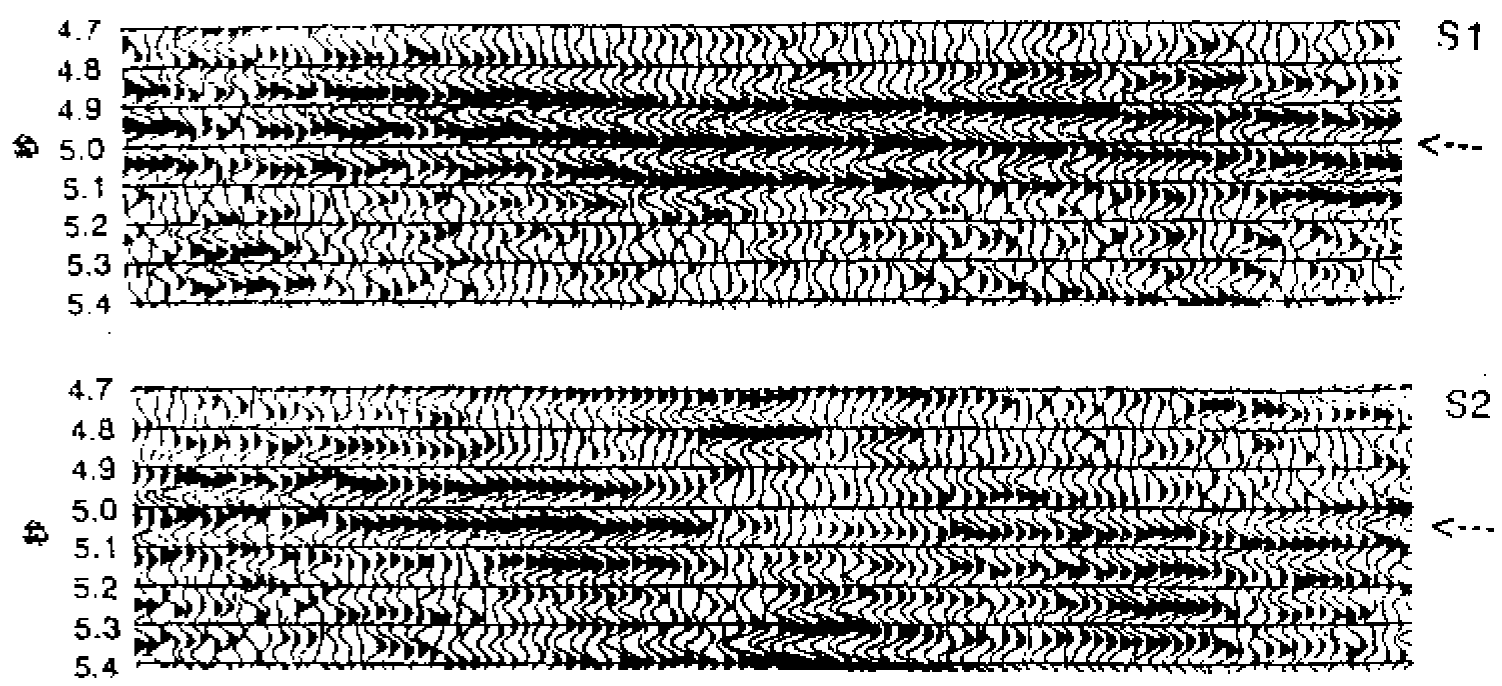


图 8.5.10　S_1 和 S_2 剖面上澳斯汀白垩层反射强度的对比

在 S_1 剖面上澳斯汀白垩反射界面(从 4.85s 到 4.95s)具有一致的振幅。在 S_2 剖面上同样的反射层振幅横向发生变化。注意、最突出的振幅异常在中部，代表了大约 250m 宽的高裂缝带，也注意 S_2 剖面上白垩反射界面延迟了 60～70ms

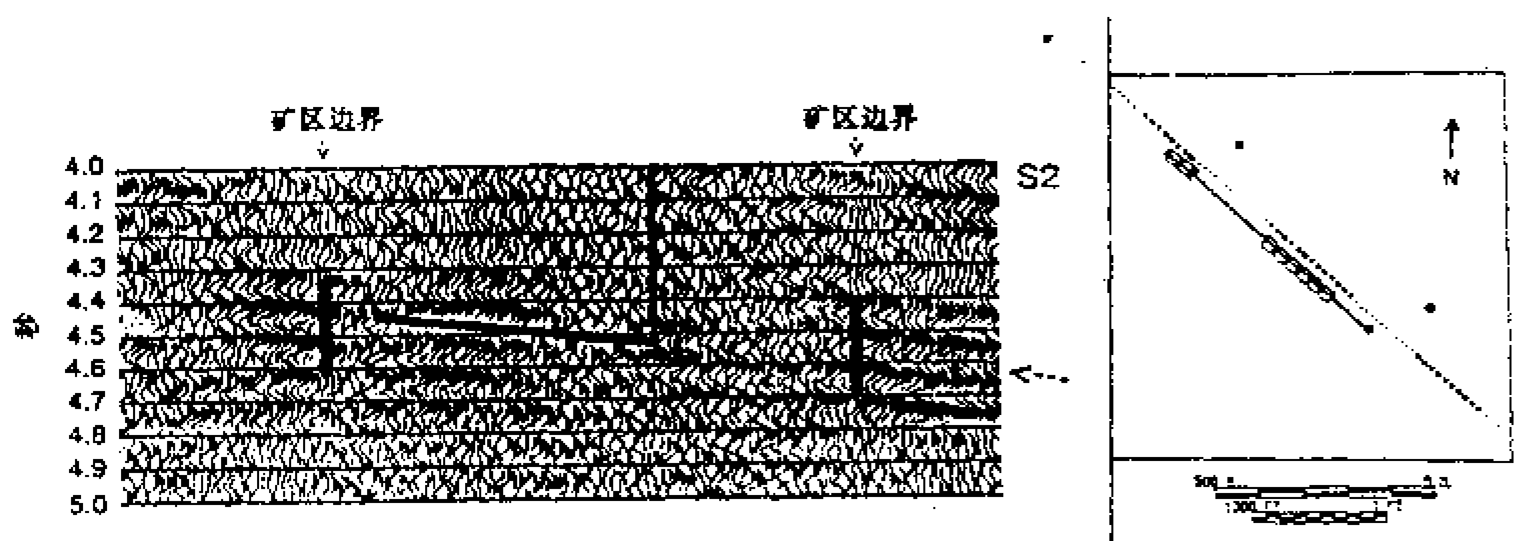


图 8.5.11　S_2 地震剖面和为测试振幅异常所钻的一口井的平面图

大的方边框代表了租约边界。实心点是已钻到澳斯汀白垩层的生产井地面位置。从测试井离开的走向北西的粗黑线代表了水平井位。水平井位上的白方框是泥浆测井确定的石油充填的裂隙地带。浅的虚线是横波观测剖面，虚线上的小黑方块代表了所解释的 S_2 振幅异常

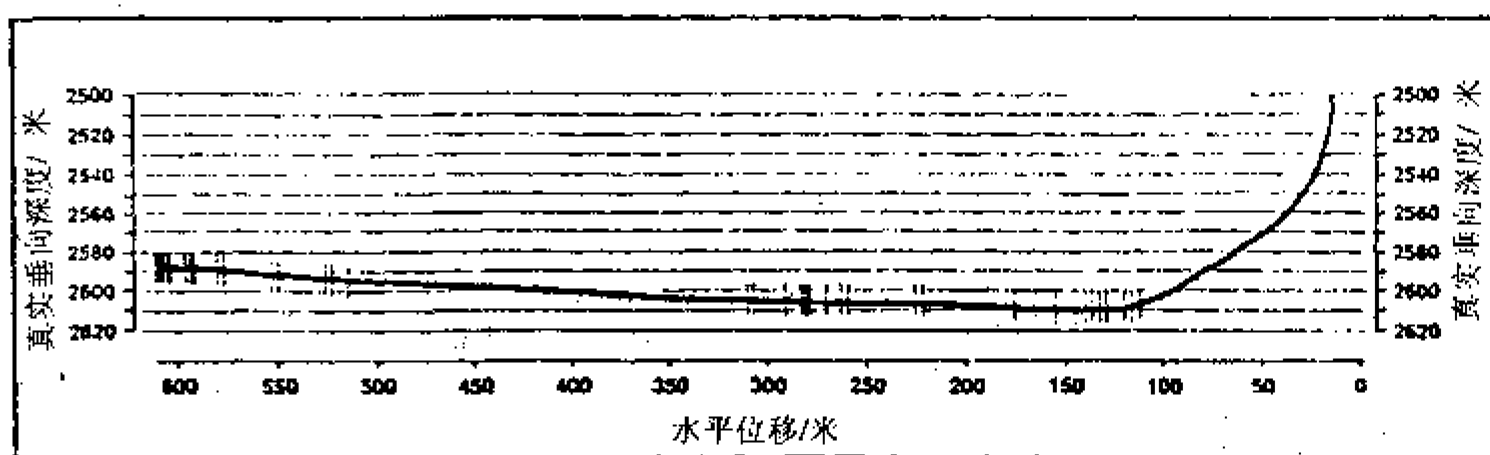


图 8.5.12 用于测试 S_2 振幅异常的泥浆水平测井显示。与井位相交的垂直线代表了部分方解石充填的裂缝位置

第8章参考文献

1. Alford, R.M., Shear data in the presence of azimuthal anisotropy: Dilley, Texas: 56th Ann. Internal. Mtg., Explor. Geophy., Expanded Abstracts, 1986, 476-479
2. Beckham, W. E., Seismic anisotropy and natural fractures from VSP and borehole Sonic tools-A field Study, Geophysics, 1996, 61, 456-466
3. Crampin, S., Suggestions for a Consistent terminology for seismic anisotropy, Gephy. Prosp. 1989, 37, 753-770.
4. Hou Anning. and Ma Zaitian, Mode-Converted Shear wave Splitting in Three-Component VSP's, China's Postdoctors' Contributions to the 30th International Geological Gongress, Petroleum Industry Press of China, Beijing, 1996.
5. Hudson, J.A., Overall properties of a cracked solid, Math. Proc. Canbr. Phil. Soc., 1980, 88, 371-384.
6. Lynn, H.B., and Thomsen, L.A., Reflection shear-wave data collected near the principal axes of azimuithal anisotropy: Geophysics, 1990, 55, 147-156.
7. Ma Zaitian and Hou Anning, Fracturing and shear-wave splitting, The 30 International Geological Congress, Abstracts, 1996, Beijing.
8. Thomsen, L., 1986, Elastic anisotropy due to aligned cracks; Theoretical modesls, Trans. Ann. Geophys, Union, 1986,67, 1207.
9. Winterstein, D.F., and Meadows, M.A., Shear-wave Polorizations and subsurface stress directions at Lost Hills field, Geophyics, 1991, 56, 1331-1348.
10. 马在田,多分量地震学理论与应用问题,同济大学学报,1995,23,136-140
11. 侯安宁,何樵登和马在田,三维裂隙介质中强性波 Green 函数的 Weyl 积分解研究,地球物理学报,1995, 38(增Ⅰ),135—143.
12. 侯安宁,马在田等,横波分裂参数的遗传算法反演,中国地球物理第 11 届年会论文集,石油工业出版社,1995.
13. 侯安宁,何樵登,各向异性介质中弹性波记录的傅里叶变换法正演模拟,石油地球物理勘探,1994,29(增 1),64-71.
14. 侯安宁,马在田,垂直地震剖面横波分裂的理论研究,同济大学学报,1996, 2, 574-579.
15. Mueller, M.C., Prediction of lateral variability in fracture intensity using multicomponent shear-wave surface seismic as a precursor to horizontal drilling in the Austin Chalk, GJI, 1991, 107, 409-415.
16. Peacock, S, et al., Seismic velocities in fractured rocks: an experimental verification of Hudson's theory Geophy,

Prosp., 1994, 42, 27-80.
17. Thomesen, L., Elastic anisotropy due to aligned cracks in porous rock, Geophys. Prosp., 1995, 43, 805-829.
18. Rathore, J.S., et at., P-and S-wave anisotropy of a synthetic sandstone with controlled crack geometry, Geophys. Prosp., 1994, 43, 711-728.

第 9 章 人工神经网络的应用

9.1 引言

地球物理探测的目的是利用获取的地下的各种物理信息对地质体进行定性和定量评价。定性评价是根据采集的地球物理信息寻找有利油气藏存在的地带和层位。定量评价通常是根据测量的各种地球物理资料估算出地层的几个定量参数,如孔隙度、饱和度、渗透率等。由于油气分布在三维地质体上,所以对油气区的评价和预测要给出定性评价结果和定量参数在空间上的分布。得到了这些评价指标的分布,对于勘探区块,可以提高钻井成功率,减少勘探成本;对于开发区块,则为优化钻采方案提供了必要条件。

石油地球物理勘探资料的采集、处理和解释主要利用计算机来完成。目前,计算机无论在速度上,还是在存储量上,都已大大超过人的能力,完成人无法相比的工作量。然而,随着采集资料量的迅速增加,勘探的地质体越来越复杂,传统的计算方法,遇到了一些困难(刘瑞林,马在田,1995)。例如,有经验的解释人员可以根据以前的经验从大量的资料中较准确地指出含油气异常的层位,而传统的方法在解决这类问题时,则错误较多。再如,对复杂地层的参数估计一直是石油地球物理勘探中的难题(马在田,1986)。所有这些都促使人们寻求新的计算途径来解决这些问题。

人工神经网络是近年来迅速发展的信息处理技术之一。石油地球物理勘探资料的处理和解释问题,一般地说,就是信息的处理、加工问题。因此,人工神经网络信息处理技术为勘探资料的处理和解释提供了一条新的途径(McCormack,1991)。近年来,人工神经网络在利用勘探资料进行油气预测和评价的应用研究中取得了一些进展,显示出良好应用前景。本章先对人工神经网络的信息处理原理、几种常用的人工神经网络模型作简要介绍,然后着重讨论人工神经网络在测井资料、地震资料油气评价中的几个典型应用。

9.2 生物神经系统的功能及特点

人工神经网络的研究是受生物神经系统的研究结果启发而来。各种人工神经网络模型是抓住了生物神经系统的某些方面的特点而构成的计算模型。这些计算模型不是实际生物神经系统的逼真描述,而是生物神经系统的某种简化和抽象,用来实现人脑的某些功能。

神经生理学研究表明(Kuffler,S.W.,Nicholls,J.G.等,1991;Dayhoff,1990),当动物进化到一定阶段,机体内有神经成分出现,随着进化水平的提高,其神经系统的结构和功能就越来越复杂。然而,不论是低等动物的简单类型神经系统还是高等动物的复杂类型神经系统,它们的结构与功能单位都是神经细胞,即神经元(neuron)。图 9.2.1 是一个典型神经细胞的示意图。神经元的输出域是称为轴突(axon)的长纤维。由胞体(cell body)触发的信号沿着轴突传给其它神经元。神经细胞的输入域是称为树突(dendrites)的纤维集。轴突和树突的连接点叫做突触(synaps)。当一个胞体在树突处收到一系列的信号时,结果是神经元的胞体

沿轴突送出一个信号,即神经元呈兴奋状态。反之,当神经元的输入域接收的信号较少时,神经元的胞体不发出信号,即处于抑制状态。整个生物神经系统的功能是传递、加工和储存信息,即不断地将体内、体外环境变化信息汇集起来进行加工处理,再送到相应的效应器官(如肌肉、腺体等),给出相应的反应,直到引出复杂的行为。

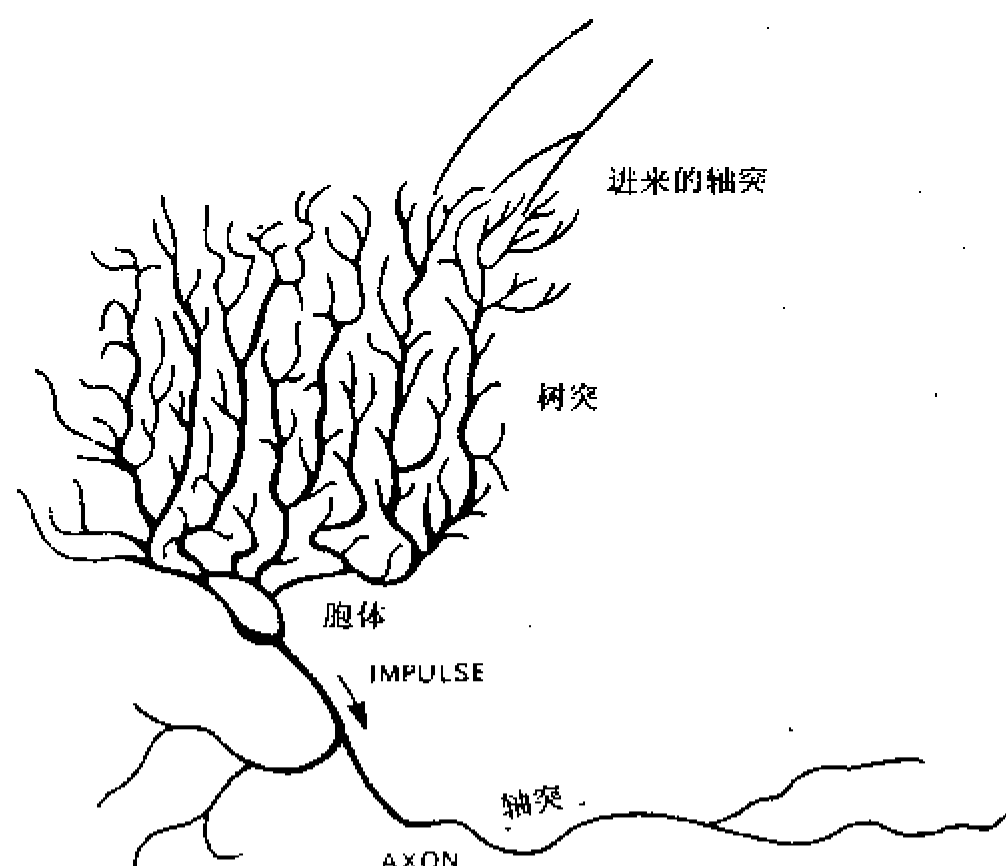


图 9.2.1　生物神经细胞示意图

在生物世界中,发育最完善,对信息加工、处理最有效的生物神经系统,应数人脑。人脑是人的神经系统中枢,它由 $10^{11}-10^{12}$个神经元组成。这些神经元疏密交替地分布在大脑的皮层中,虽然数量极多,但高度有序,组成一个极其复杂的网络。人的神经系统中每个神经元可以有 $1-10^4$ 个突触点接受信息,即每个神经元可以同时接受几百或几千个其它神经元传来的信息;同时这个神经元将加工后的信息传送给其它众多的神经元。信息在一个神经元内的传送是借助于电信号,即动作电位来实现的。动作电位在神经元中的扩布称为传导。两个神经元间的信息传递也借助于电信号,但主要借助于化学物质,即递质(transmiter)来实现。电化学物质携带的信息在神经元间的传播速度一般为 ms 量级。这比目前数字计算机的一次运算速度(ns 量级)要低得多。然而,人在完成某些任务时,要比计算机快得多、准确得多。例如,人们识别一个熟人的面孔,通常能在秒的量级作出反应。而用传统的算法程序来做这类事情,则错误较多,并且很慢。这说明人脑信息处理的机制与目前计算机的处理机制不同。大量的研究表明,人脑的神经系统具有如下基本特点:

(1) 并行结构并行处理

人脑对信息的加工处理是建立在大规模并行处理的基础上的。尽管信息在神经元之间的传递需要 ms 量级的时间,但用大量慢的神经细胞构成的系统进行并行处理,在处理某些问题时,其实际效果要比以冯·诺意曼原理构成的串行计算机要快得多。

(2) 自适应性和自组织能力

人的复杂的智能是经过长期的学习、不断积累而来。这种对知识 学习、积累,就是人脑的自适应性、自组织能力的表现。人们认为,人脑的学习是在感受的外界信息的刺激下,通

过加强或减弱某些神经元之间突触的强度，形成概念之间的内部表达来实现人的很多智能活动的。人脑实际上是一个复杂的非线性系统。

(3) 容错性和联想能力

人脑的功能并不因局部损伤和大量神经细胞的正常死亡而伤失，说明人脑的“容错性”。通常说“窥一斑而知全豹”，从某种意义上就体现了人脑的联想能力。

9.3 几种人工神经网络模型

人工神经网络模型试图用大量简单的处理单元(神经元)构成的系统进行并行处理来模拟生物神经系统的某些结构和功能。目前已发展了众多的神经网络模型(Lipmann, 1987; Khanna, 1990; Simpson, 1990)。下面仅对在油气评价和预测中获得应用的几种模型作简要讨论。

9.3.1 神经元模型

人工神经网络由神经元模型构成。后面在不致引起混淆的情况下亦称神经元。神经元模型是人工神经网络的基本处理单元。它一般是多输入、单输出的一个非线性处理单元，也可以具有一定的内部状态和阈值。常用的神经元模型如图 9.3.1 所示。图中 u_i 为神经元的内部状态，θ_i 为阈值，$I_1, I_2, \cdots, I_n$ 为该神经元的输入，W_{ij}为其它神经元与该神经元的连接权，O_i 为该神经元的输出。

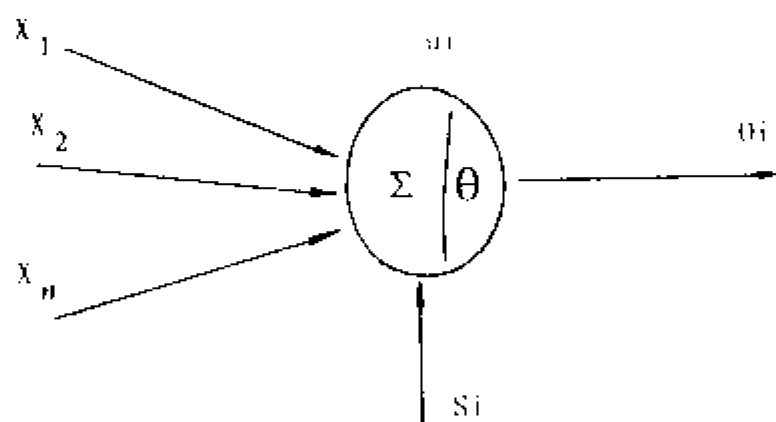


图 9.3.1 神经元模型

设神经元的总输入为 X_i，则

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} I_j \tag{9.3.1a}$$

$$u_i = f(X_i) \tag{9.3.1b}$$

$$O_i = g(u_i) \tag{9.3.1c}$$

当神经元没有内部状态时，

$$O_i = u_i = f(X_i) \tag{9.3.2}$$

根据 $f(x)$的输入、输出特性不同，神经元可分为如下几种类型：

(1) 阈值逻辑型：在这种模型中，神经元没有内部状态，$f(x)$为一阶跃函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{9.3.3}$$

这是一种离散的二值神经元模型。

(2) 区间分段线性：

$$f(x)=\begin{cases}+\alpha & x_i\geqslant\alpha\\ x & |x_i|\leqslant\alpha\\ -\alpha & x_i\leqslant\alpha\end{cases} \tag{9.3.4}$$

其中 α 为一常数。

(3) S 状曲线型：这是最常用的神经元模型，一般没有内部状态，其输出连续取值。$f(x)$ 可取如下形式：

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}\text{或者}f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \tag{9.3.5}$$

(4) 微分或差分模型：这类模型反映神经元的状态随时间的变化过程，由一个微分方程决定

$$\frac{du_i}{dt}=-\frac{1}{\tau}u_i+x_i\quad,\quad O_i=g(u_i) \tag{9.3.6}$$

τ 为该神经元的时间延迟。

(5) 概率动作模型：在这种模型中，神经元的状态是根据输入的大小，按一定的概率原则工作的。例如，在 Boltzmann 机中，神经元的状态变化，由

$$P_i=\frac{1}{1+\exp(-\Delta E_i/T)} \tag{9.3.7}$$

决定。式中 ΔE_i 为系统能量变化，T 为网络系统的"温度"。

实际的生物神经元是非常复杂的。有人曾列举出描述生物神经元的参数多达 40 多个。但上面的神经元模型中只考虑了少数几个参数。可见，在神经元模型这个层次上已是对实际生物神经元的大大简化和抽象。

9.3.2 感知机(perceptron)

感知机是一种典型的前馈型人工神经网络模型。由 Rosenblatt 于 1957 年发明(Tou, 1974)。其结构和模式分类性能如图 9.3.2 所示。这种仅有一层连接权构成的网络能用一个超平面将输入矢量分为 A 类或者 B 类。分类的方法是对输入矢量的各分量加权求和，减去阈值 θ，再经过一个线性限幅函数的运算形成输出。如果输出为 +1，该输入模式就判为 A 类；如果输出为是 -1，该模式就判为 B 类。感知机在对未知模式进行分类之前，必须用足够数量的已知类别的输入样本对网络进行训练，获得网络的连接权值和阈值。连接权和阈值确定了对模式空间划分的超平面。

感知机的训练过程用迭代算法。感知机收敛定理证明，如果输入模式是线性可分的，则迭代过程可以在有限步迭代后，w 和 θ 收敛到稳定的数值。因此，感知机可以解决线性可分问题。但是，Minsky 和 Papert(1969)证明，感知机仅能解决线性可分问题，它不能表达简单的异或问题。

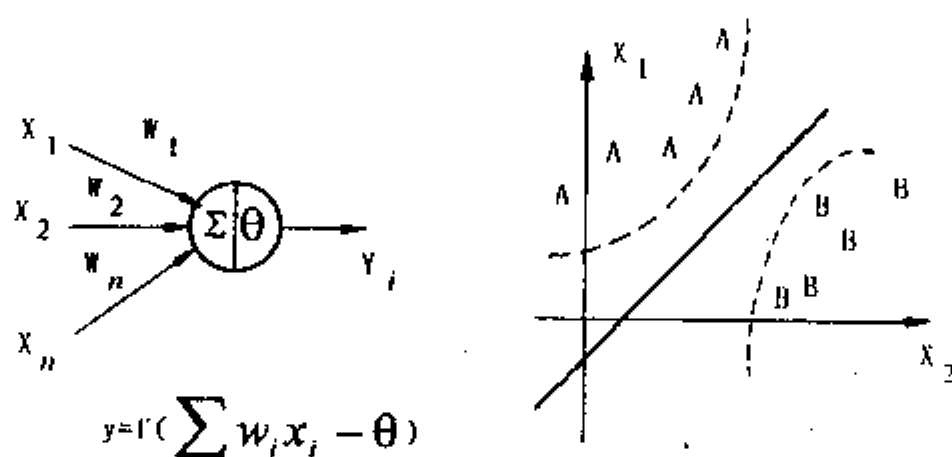


图 9.3.2 单层感知机及其分类性能

9.3.3 层状网络和误差反传播算法(BP)

层状网络,又称为多层感知机,是目前应用最广泛的神经网络模型之一。其结构如图 9.3.3 所示。人们很早就意识到多层网络的作用,但一直未找到训练隐层连接权的有效算法。1974 年,Werbos(1994)在他的博士论文中实际上已给出了一般的 Backpropagation 算法,但未引起科学界的注意(Widrow,1990)。直到 Rumelhart 等(1986)的书的出版,这种网络模型才被广泛的研究和应用。标准的误差反传播算法采用梯度下降搜索技术,按最小平方误差准则迭代修正连接权和阈值。训练时,采用已知类别的样本构成网络的训练集。迭代开始之前对网络的连接权给一小的随机值。设输入 X^p 经网络运算后得到网络的实际输出 O^p,网络要求的输出 D^p。两者之间的误差平方 $E^p = |O^p - D^p|^2$,用来修正网络的连接权。在具体实现网络连接权的修正时,由于要先算出输出层连接权的修正量,然后逐层计算前面各层连接权的修正量,误差信息在网络中的流向相对于网络的输入信息在网络中的流向来说相反,故这个算法称为误差反传播(Error Backpropagation)。从网络神经元的排列来说,属于层状网络结构,一层中的神经元之间没有互连。

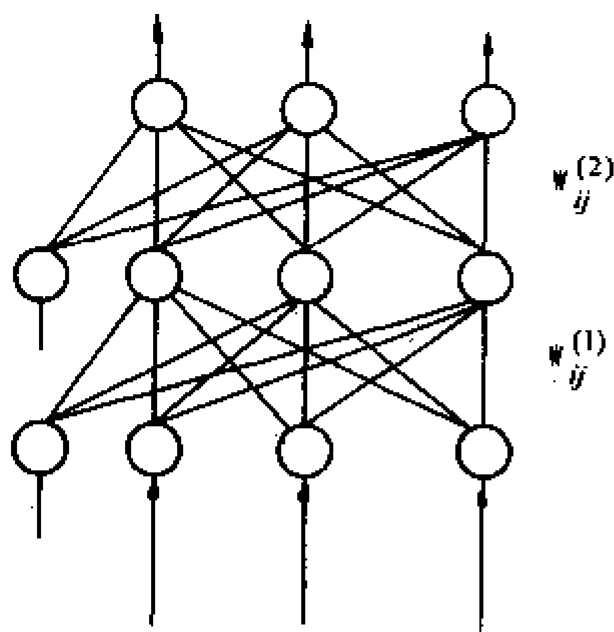


图 9.3.3 层状网络结构

在层状网络中,每层神经元的输出状态只影响下一层神经元的状态。第 k 层神经元 i 所接受的输入 $net_i^{(k)}$ 是前一层神经元输出的线性叠加。

$$\mathrm{net}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} W_{ij}^{(k-1)} O_j^{(k-1)} \tag{9.3.8}$$

式中 $W_{ij}^{(k-1)}$是$k-1$层神经元j与k层神经元I之间的连接权，第k层神经元I的输出为

$$O_i^{(k)} = f(\mathrm{net}_i^{(k)}) \qquad (k=2,3,\cdots) \tag{9.3.9}$$

$f(x)$可以取为$f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$，或者$\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，或者为径向基函数。

对于输入层$O_j^{(1)}=X_j^p$，X_j^p为输入样本p的j分量。对于模式识别问题，设样本X^p网络要求的输出为D^p，如果要分类的问题为C类，D^p的各分量可以按下列方式给定，第l类样本要求的输出矢量的各分量为

$$D_{lj} = \delta_{lj} \qquad (l,j=1,2,\cdots,C) \tag{9.3.10}$$

神经元之间的连接权在开始时是未确定的。连接权的大小用已知样本集(通常称为训练集)对网络进行训练来确定。每个神经元的阈值用同样的方法确定。这时只要在每层网络中附加一个节点，对这个节点固定其输出状态，并通过连接权连接到下一层的各神经元，如图9.3.4所示。训练了这些连接权，也就得到了各神经元的θ_i。下面以三层网络为例给出连接权的迭代算法。

(Ⅰ)输出层连接权的修正公式

设X^p经网络运算后的实际输出为O^p，修正连接权的目的是为了使网络的实际输出逼近网络要求的输出D^p。输出层两者的误差平方和为

$$E^p = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_3}(O_l^p - D_l^p)^2 \tag{9.3.11}$$

根据这个误差可以得到连接权的修正公式。通常采用梯度下降法，使误差向误差曲面最陡的方向下降

$$\frac{\partial E^p}{\partial W_{li}^{(2)}} = \frac{\partial E^p}{\partial O_l^p}\frac{\partial O_l^p}{\partial \mathrm{net}_l^{(3)}}\frac{\partial \mathrm{net}_l^{(3)}}{\partial W_{li}^{(2)}} \tag{9.3.12}$$

令
$$\delta_1^{(2)} = \frac{\partial E^p}{\partial O_l^p}\frac{\partial O_l^p}{\partial \mathrm{net}_i^{(3)}} = (O_l^p - D_l^p)\cdot f(\mathrm{net}_l^{(3)}) \tag{9.3.13}$$

而
$$\frac{\partial \mathrm{net}_l^{(3)}}{\partial W_{li}^{(2)}} = O_i^{(2)} \tag{9.3.14}$$

∴
$$\frac{\partial E^p}{\partial W_{li}^{(2)}} = \delta_l^{(2)}\cdot O_i^{(2)} \tag{9.3.15}$$

于是样本p导出的对权$W_{li}^{(2)}$的修正公式

$$W_{li}^{(2)}(t+1) = W_{li}^{(2)}(t) - \alpha\frac{\partial E^p}{\partial W_{li}^{(2)}} \tag{9.3.16}$$

t表示对训练集迭代循环的次数，α为学习率常数。

(Ⅱ)中间层(又称隐层)连接权的修正公式

$$\frac{\partial E^p}{\partial W_{ij}^{(1)}} = \sum_{l=1}^{N_3}\frac{\partial E^p}{\partial O_l^p}\cdot\frac{\partial O_l^p}{\partial W_{ij}^{(1)}}$$

$$= \sum_{l=1}^{N_3} \frac{\partial E^p}{\partial O_l^p} \cdot \frac{\partial O_l^p}{\partial \text{net}_l^{(3)}} \cdot \frac{\partial \text{net}_l^{(3)}}{\partial O_i^{(2)}} \cdot \frac{\partial O_i^{(2)}}{\partial \text{net}_i^{(2)}} \cdot \frac{\partial \text{net}_i^{(2)}}{\partial W_{ij}^{(1)}}$$

$$= \sum_{l=1}^{N_3} \delta_l^{(2)} \cdot W_{li}^{(2)} \cdot f'(\text{net}_i^{(2)}) \cdot O_j^{(1)} = \delta_i^{(1)} \cdot O_j^{(1)} \qquad (9.3.17)$$

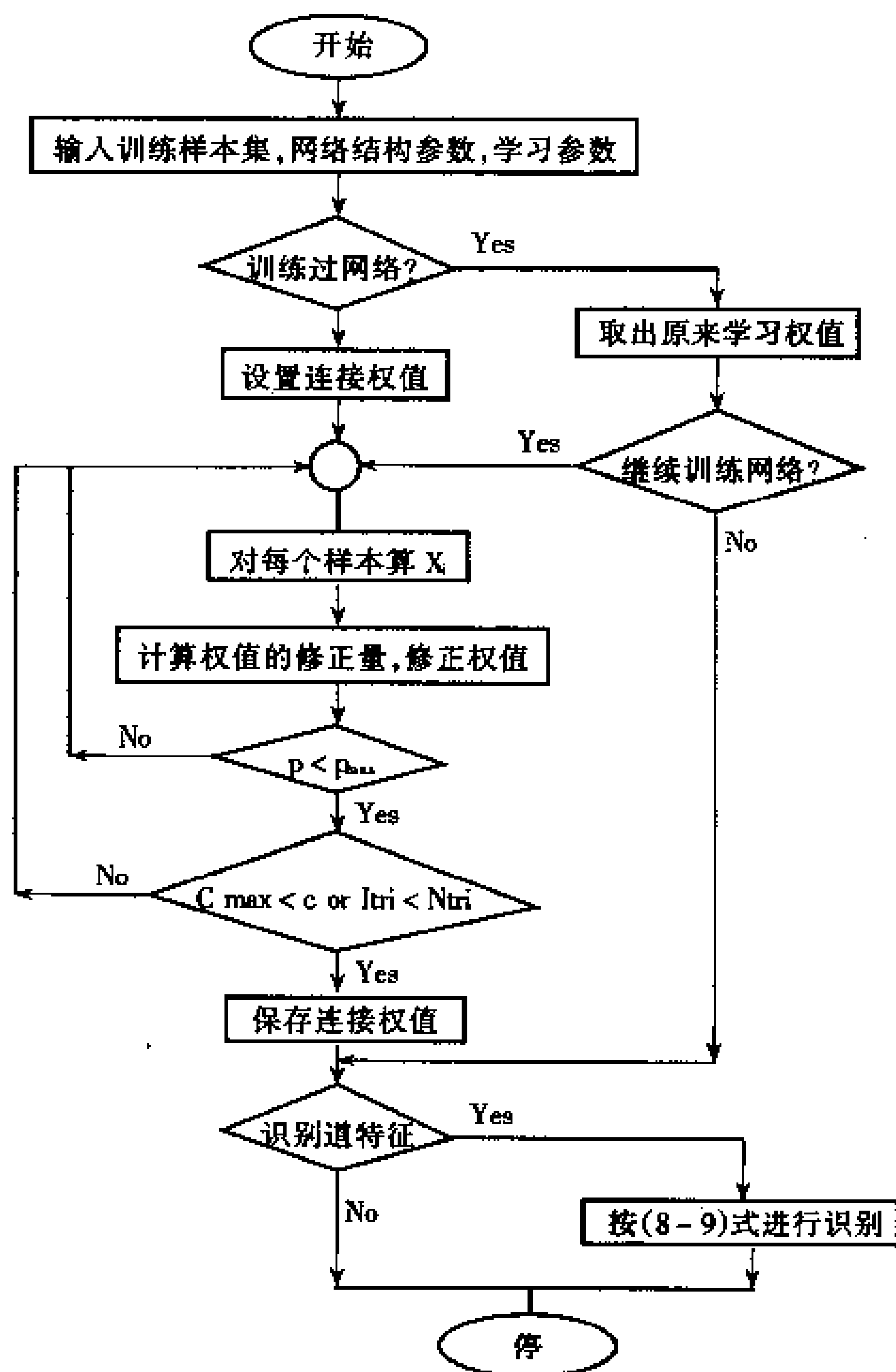


图 9.3.4　BP 网络算法框图

式中 $\delta_i^{(1)} = \sum_{l=1}^{N_3} \delta_l^{(2)} \cdot W_{li}^{(2)} \cdot f'(\text{net}_i^{(2)})$。可见,为了求出隐层连接权的修正量,必先求出前一层的修正量。在一般情况下,对于更多层的网络,有

$$\delta_i^{(k-1)} = \sum_{l=1}^{N_{k+1}} \delta_l^{(k)} \cdot W_{li}^{(k)} \cdot f'(\text{net}_i^k) \qquad (k = K-1, K-2, \cdots, 2) \qquad (9.3.18)$$

K 为网络节点的层数。从上面的公式可以看出误差反传播算法的原理。

$$W_{ij}^{(1)}(t+1) = W_{ij}^{(1)}(t) - \alpha \frac{\partial E^p}{\partial W_{ij}^{(1)}} \qquad (9.3.19)$$

通常为增加学习的稳定性,用下式修正权

$$W_{ij}^{(k)}(t+1) = W_{ij}^{(k)}(t) - \alpha \cdot \delta_i^{(k)} \cdot O_j^{(k)} + \eta(W_{ij}^{(k)}(t) - W_{(ij)}^{(k)}(t-1)) \qquad (9.3.20)$$

式中 η 为冲量常数，$W_{ij}^{(k)}(t-1)$是网络上一次迭代循环之前的连接权值。

为了提高学习速度，通常采用"批学习"方式，在这种方式中，对训练集所有样本求出其权的修正量后，修正一次连接权。即

$$\frac{\partial E}{\partial W_{ij}^{(k)}}=\sum_{p}\frac{\partial E^{p}}{\partial W_{ij}^{(k)}} \tag{9.3.21}$$

通常可以用下式作为训练结束条件

$$err_{\max}=\underset{p}{\mathrm{Max}}\{\mathrm{Max}\,|D_{i}^{p}-O_{i}^{p}|\}\leqslant\varepsilon \tag{9.3.22}$$

或者达到设定的最大迭代次数，训练结束。

在具体实现中，前一次的学习结果（权值）可以保存在一个文件中，下一次的学习可以直接从原来的权值开始。程序框图如图 9.3.4 所示。

层状网络通过例子的学习，实际上实现了一个从输入空间到输出空间的非线性映射。

9.3.4 自组织特征映射网络

自组织特征映射网络(self-organizing feature map)是 Kohonen(1982,1990)提出的。这种网络模型是对大脑中存在的对感知的外界刺激进行自组织现象的模拟。与前面的 BP 网络不同，自组织网络作模式分类器时，不需要提供网络要求的输出。网络对输入的模式自动进行自组织，把相拟的模式聚集在一起。这种网络模型优于一般传统非监督模式分类方法之处在于，它利用并行结构把高维的特征向量映射到两维的平面上，提供了一种分析高维模式关系的直观形式。

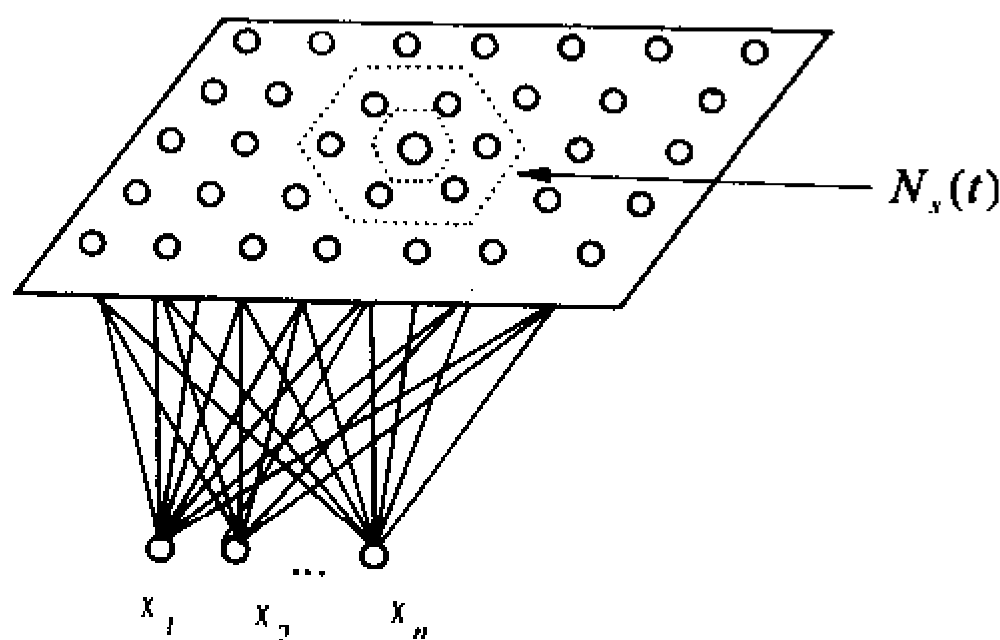


图 9.3.5 Kohonen 网络的结构

Kohonen 网络是一个两层的网络。第一层是输入层，第二层通常是组织成二维方格形式的竞争层。网络结构如图 9.3.5 所示。Kohonen 网络的计算步骤如下：

(1) 对第一层到第二层的连接权赋一小的随机值；

(2) 对网络提供一个输入；

(3) 计算输入矢量与到每一输出节点连接权之间的距离：

$$d_{j}=\sum_{i}^{N}(x_{i}(t)-W_{ij}(t))^{2} \tag{9.3.23}$$

式中,$x_i(t)$是输入节点 i 时间 t 的输入,$W_{ij}(t)$是时间 t 输入节点 I 到输出节点 j 的连接权。

(4) 找出距离最小的赢节点 j^*;

(5) 更新节点 j^* 及其邻节点的连接权;

$$W_{ij}(t+1) = W_{ij}(t) + \eta(t)(x_i(t) - W_{ij}(t)) \tag{9.3.24}$$

式中 $j \in j^*$ 的邻节点,$0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1$

(6) 重复步骤 2。

当网络的连接权迭代稳定时,迭代结束。具体实现时,对模式的归一化与 BP 网络不同。通常用 $X_i = X_i / |X|$ 把输入模式归一化。此外,对于赢节点 j^* 的邻节点的定义不同,具体实现略有差别(Eberhart,1990)。

9.3.5 时间延迟神经网络模型

前面讨论的几种网络模型在进行模式分类时,实现的是从输入空间到输出空间的静态映射关系。如果模式矢量是从含有随时间、空间变化的信号(例如地震信号、语音信号、测井曲线等)中截取的一段进行特征提取得到的,则这些网络模型只能考虑该段的特征与类别之间的静态映射关系,而不能考虑特征随时间、空间的变化与模式类别之间的联系。对于这类随时间、空间变化的信号,如果在作模式分类时,能考虑信号变化的历史和背景,无疑会使分类更准确。例如,一部运动的汽车,如果拍摄有 $t-1$ 时刻和 t 时刻汽车处于不同背景下的照片,我们就容易判断 t 时刻汽车的运动状况。为了使网络对这类时变或空变的信息进行有效的辨识,在网络模型中应引入对前面时刻的"记忆"。对于模式分类问题,进行特征提取时,就不仅需要提取单一时窗的特征,而应提取一个特征串。神经网络模型,通过对已知串的学习,从而获得特征与类别的联系以及特征的变化与类别的联系。此时网络的结构和学习算法就要比通常的网络稍复杂一些。

1. 一般的链导数规则

为了仍用梯度下降法修正网络的连接权,必须计算出相应连接权的偏导数。由有序方程集合构成的变量的偏导数计算可借助 Werbos(1989,1990,1994)引进的链式规则进行。设$\{z_1, \cdots, z_i, \cdots, z_j, \cdots, z_n\}$是由 n 个方程确定的 n 个变量,这 n 个方程定义了一个有序方程集合:

$$z_i = f_i(z_1, \cdots, z_{i-1}) \tag{9.3.25}$$

由方程的次序性,变量$\{z_1, \cdots, z_{i-1}\}$必须在 z_i 之前计算出。例如,对于如下三个方程形成的一个有序方程集:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= 4z_1 \\ z_3 &= z_1 + 2z_2 \end{aligned} \tag{9.3.26}$$

当我们计算偏导数时,必须知道哪些变量是常数,哪些变量是变量。对于普通的偏导数,是除在表达式中显式出现的变量之外,而其余为常量。按这个意义,

$$\frac{\partial z_3}{\partial z_1} = 1。$$

对于有序方程集合定义的变量,其偏导数应按复合函数的偏导数来求,其常项和变项由

有序方程集所确定。为区别于通常的偏导数,变量 z_j 对于 z_i 的偏导数,由于有序方程集限制的复合关系,用$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_i}$表示,称为序偏导数(ordered partial derivative)。

定义如下:

$$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_i}=\frac{\partial z_j}{\partial z_i}\bigg|_{\{z_1,\cdots,z_{i-1}\}=\text{const}} \tag{9.3.27}$$

由定义,可以导出如下两个性质:

(1) $\frac{\partial^+ z_{i+1}}{\partial z_i}=\frac{\partial z_{i+1}}{\partial z_i}$,及$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_i}=0$,如果 $j<i$。 (9.3.28)

(2) 当 $j>i+1$ 时,有如下两个计算导数的链式规则

$$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_i}=\frac{\partial z_j}{\partial z_i}+\sum_{k=i+1}^{j-1}\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial z_k}{\partial z_i} \tag{9.3.29}$$

$$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_i}=\frac{\partial z_j}{\partial z_i}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\partial z_j}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial^+ z_k}{\partial z_i} \tag{9.3.30}$$

上面例子中三个方程决定的变量 z_3 对于 z_1 的偏导数为$\frac{\partial^+ z_3}{\partial z_1}=9$。

前面讨论的 BP 网络算法对于隐节点连接权的修正式是这里讨论的一个特殊情况。令 $z_j=E_p$, $z_i=W_{ij}^{(1)}$,中间变元取为 $z_k=\text{net}_i^{(2)}$,应用(9.3.29)式即得相应结果。从式(9.3.29)及式(9.3.30)可以看出,为了计算出$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_i}(j>i+1)$,必先计算出$\frac{\partial^+ z_j}{\partial z_k}(k>i)$,也即这种偏导数的计算必须逆变量次序进行。这正是 Backpropagation 的含义所在。从一般意义上说,BP 算法实际上是一种计算有序方程集合定义的变量集合的偏导数的一种方法。这种方法避开了雅可比行列式的计算。

2. 一般时间延迟神经网络(time-delay neural network)算法

时间延迟神经网络实际上是一种具有局部递归全局前馈的网络结构(locally recurrent glbal feedforward)。网络中的一些神经元在 t 时的输入含有前面时间 $t-1, t-2, \cdots, t-k$ 时的输入和输出值。因此这种网络具有对前面时间信息的“记忆”作用。应用(9.3.29)式可以得到延迟网络的连接权的修正公式。

设 $F^t=\{f_1^t, f_2^t, \cdots, f_m^t\}$, $(t=1,2,\cdots,L)$为 t 时窗归一化的特征矢量,其中 L 为时窗滑动的次数,m 为特征矢量的维数。$X_j(t)$为网络时间 t 节点 j 的输出(对于输入节点,$X_j(t)=f_j^t$), $\text{net}_i(t)$为当前网络节点 i 的总输入,$O_i(t)$当前网络节点 i 的总输出。

$$\text{net}_i(t)=\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij}^{(0)}X_j(t)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N+n}W_{ij}^{(k)}X_j(t-k) \tag{9.3.31}$$

$$X_i(t)=O_i(t)=f(\text{net}_i(t)) \tag{9.3.32}$$

$$(i=m+1, m+2, \cdots, N+n)$$

式中 K 为网络的延迟数,$W_{ij}^{(k)}$为网络延迟 $k(k=0,1,\cdots,k)$的连接权,N 为输入节点数加中间层节点数,$N\text{-}m$ 为中间层的节点数,n 为输出层节点数。对于模式识别问题,网络节点的传输函数仍采用 S 型函数(Rumelhart et al., 1986)。网络结构如图 9.3.6 所示。

设对于特征串 P 网络对于最后一框特征信息网络变换的输出为 O_β^L,网络要求的输出为

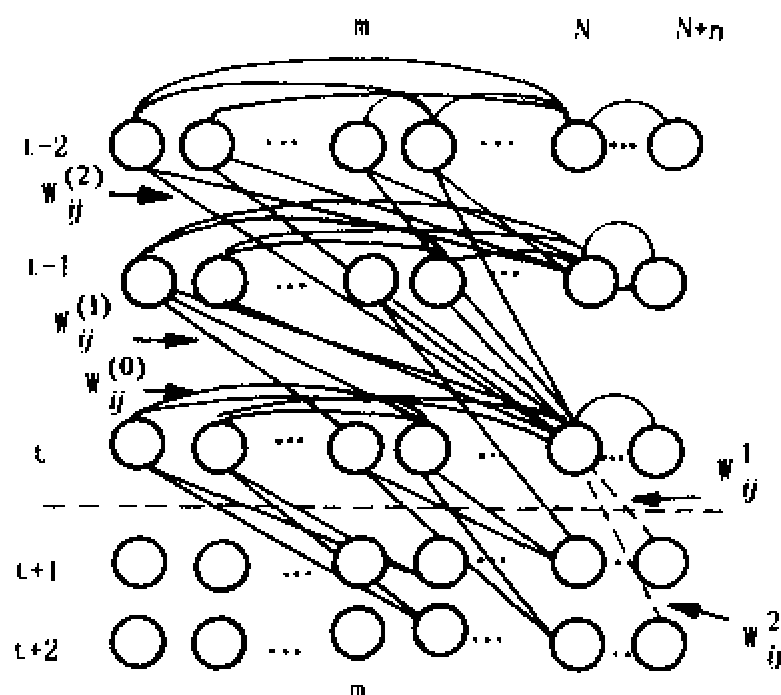


图 9.3.6　时间延迟神经网络结构

$D_\beta^L(\beta=1,2,\cdots,n)$，其误差平方和为

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{m}(O_\beta^L-D_\beta^L)^2 \tag{9.3.33a}$$

这里，假定只是串的端点误差用于调整权，一般地，应为

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\sum_{\beta=1}^{m}(O_\beta^l-D_\beta^l)^2 \tag{9.3.33b}$$

式中 L 为串长度。

根据(9.3.31)式和(9.3.33)式就可以得到时间延迟网络模型连接权的修正公式为

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial W_{ij}^{(0)}}=\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_i(t)}\frac{\partial \mathrm{net}_i(t)}{\partial W_{ij}^{(0)}}=\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_i(t)}X_j(t) \tag{9.3.34}$$

而

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_i(t)}=\frac{\partial^+ E_p}{\partial X_i(t)}\frac{\partial^+ X_i(t)}{\partial \mathrm{net}_i(t)}=\frac{\partial^+ E_p}{\partial X_i(t)}f'(\mathrm{net}_i(t)) \tag{9.3.35}$$

对于输出节点，由(9.3.33)式可算出$\frac{\partial^+ E_p}{\partial x_i(t)}$。对于隐层节点，由网络的连接方式(9.3.31)式及函数的复合关系，有

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial X_i(t)}=\sum_{\eta=i+1}^{N+n}\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_\eta}W_{\eta i}^{(0)}+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\eta=i+1}^{N+n}\frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{net}_\eta(t+k)}W_{\eta i}^{(k)} \tag{9.3.36}$$

对于 $K=2$ 时，时间 t 节点 i 的输出 $X_i(t)$ 对于其它节的影响如图 9.3.7 虚线所示，由(9.3.31)式 $t\to t+1$ 有

$$\mathrm{net}_i(t+1)=\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij}^{(0)}X_j(t+1-k)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n+N}W_{ij}^{(k)}(t+1-k) \tag{9.3.37}$$

$(l=1,2,\cdots,k)$

于是

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial W_{ij}^{(1)}}=\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_i(t+1)}X_j(t) \tag{9.3.38}$$

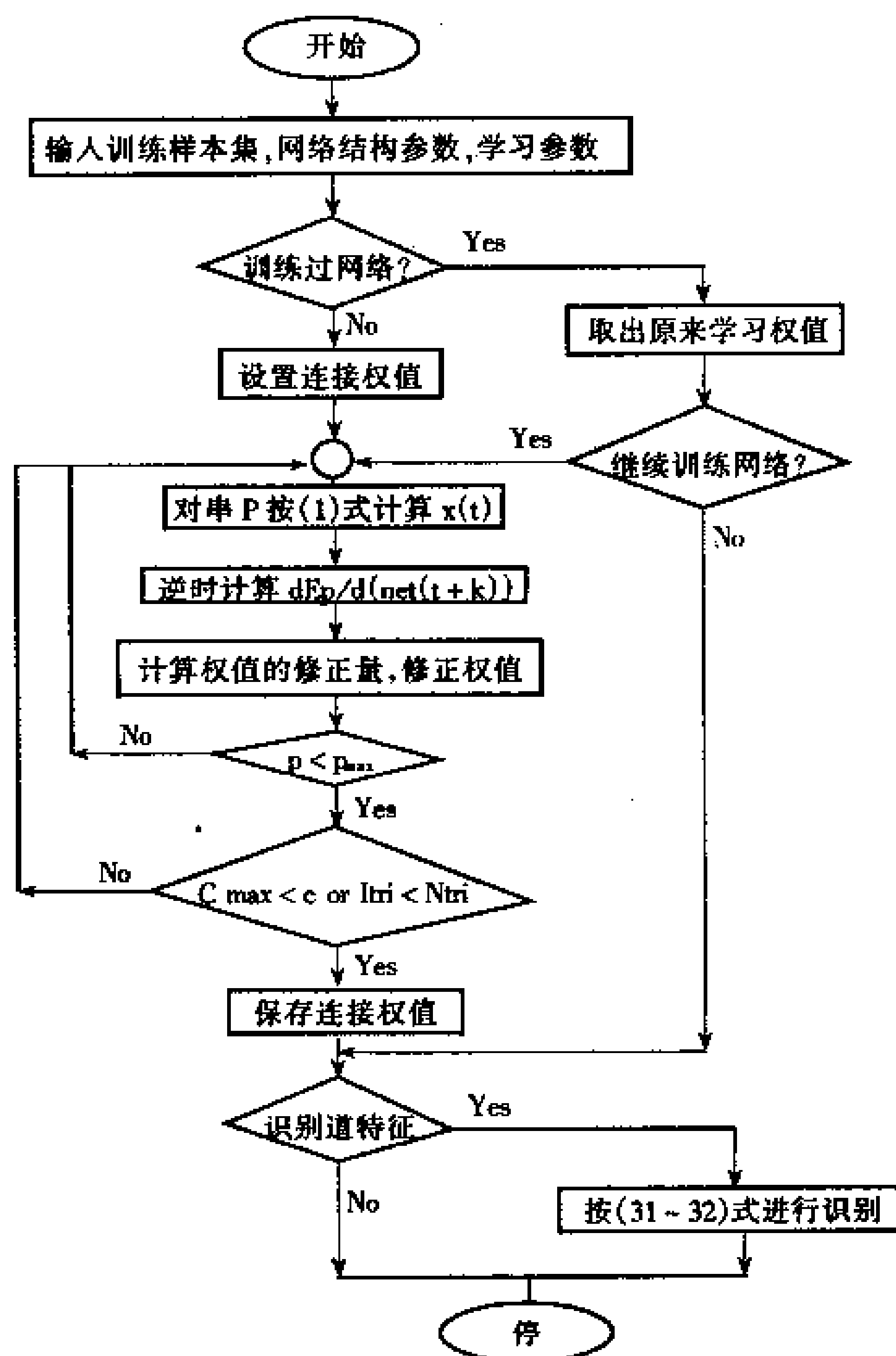


图9.3.7 时间延迟网络实现框图

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_i(t+1)} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial^+ X_i(t+1)}{\partial \mathrm{net}_i(t+1)} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial X_i} \cdot f'(\mathrm{net}_i(t+1))$$

$(l=1,2,\cdots,k)$连接权的修正量为

$$\Delta W_{ij}^{(k)} = -\alpha \frac{\partial^+ E_p}{\partial W_{ij}^{(k)}} \tag{9.3.39}$$

式中 α 为一小的正常数。

由(9.3.35)式及(9.3.38)式可以看出,为求出$\frac{\partial^+ E_p}{\partial X_i(t)}$,必须已知$\frac{\partial^+ E_p}{\partial \mathrm{net}_\eta(t+k)}$($\eta=i+1,\cdots,N+n$)($k>0$),因此,为了利用上面的式子进行计算,必须逆时进行。先要计算出最后一时窗的$\frac{\partial E_p}{\partial \mathrm{net}_\eta(L)}$,然后逐次逆向计算例 $t=1$。具体实现时间延迟网络时要使 $L>K$,即特征提取时窗滑动的次数大于网络的延迟数。如果按(9.3.33a)式,对于第 L 框前面 $L-1$ 框的特征信息,网络的实际输出与要求输出之间的误差不参与网络连接权的调整。从前面的推导可以看出,时间延迟网络含有对前面时窗特征信息的"记忆"作用。因此,网络通过特征

串的学习不仅表达了相应时窗内特征信息与网络要求的输出之间的复杂关系，同时也表达了特征信息随时间变化与网络要求的输出之间的联系。时间延迟网络的实现如图 9.3.7 所示。

9.4 人工神经网络在测井资料岩性识别和沉积相识别中的应用

根据测井资料进行岩性划分、沉积相划分等问题，属于定性评价问题。神经网络在这类地质体勘探信息定性评价方面，主要是应用其模式分类能力。模式的分类或识别，按需要提供已知模式与否又分为两种：监督模式识别和非监督模式识别。监督模式识别需要一个已知类别的模式集对分类器进行设计；非监督识别则不需要已知类别的模式集。

对于监督分类问题，目前在勘探资料的油气评价中应用最广泛的是误差反传播(BP)网络模型，时间延迟网络(TDNN)等模型。这些网络模型对于多维数据的分类有如下几个方面的优点(刘瑞林，马在田，1995)：

1. 用 BP 网络构造的分类器对数据的分布形式与统计方法相比要求不苛刻。网络对未知数据的分类只取决于给定学习的例子。通常以 Bayes 理论为基础的统计模式识别技术要用到 Bayes 公式，

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{N}P(A_i)P(B|A_i)} \tag{9.4.1}$$

式中，$A_i(i=1,2,\cdots,N)$是对事件 B 的 N 个不相容的划分；$P(A_i)$为先验概率，一般要根据以往的经验确定；$P(B|A_i)$称为类条件概率，一般要根据对事件的了解，对其分布形式作适当的假定(如正态总体假设)后，再用已知数据进行参数估计；$P(A_i|B)$称为后验概率，表示事件 B 出现的条件下，事件 A_i 出现的概率。可见，以 Bayes 公式为基础的统计识别方法取决于两点：一是先验概率的人为规定，二是对类条件概率的分布形式作适当假设后再进行参数估计。在很多情况下，特别是对地球物理测量的数据，实际类条件概率的分布形式是未知的，这就给以 Bayes 公式为基础的统计识别技术的应用带来了一定的困难。

2. 网络一经例子训练，可以在模式空间形成任意复杂的决策区域(Lippmann，1987)，这是线性判别函数所不具备的。

3. 由于网络采用并行结构而使其具有很强的抗干扰能力。这在实际应用中是重要的，因为实际的勘探数据中总存在着各种各样的干扰。

4. 利用延迟神经网络模型，一方面可以具备上述 BP 网络的优点，同时可以考虑上文或下文之间的关系，亦即考虑实际问题的马尔可夫性。

由于神经网络具有这些优点，用神经网络构成的监督模式识别方法广泛应用于测井资料的岩性识别、油水层识别、沉积相识别、地震资料油气预测、地震相识别等问题中。

9.4.1 测井资料岩性识别[McCormack，1991，Rogers，1992]

确定地层的岩性是测井资料地层评价的重要工作之一。通常知道了地层的岩性，也就知道了储集层的位置所在。此外，研究沉积环境，选择定量解释模型也都需要地层的岩性信息。

岩性的确定对于一个区块最初是用钻井取芯和岩屑录井资料来获得,但存在取芯费用高及岩屑录井资料的连续性不好等缺点。用测井资料来判别岩性则不存在上述问题。在油田的勘探阶段以及随后的开发阶段,总有一部分取芯井,相应取芯井段的岩性(由地质人员的观察确定)是已知的。这就给监督识别技术提供了基础资料。

监督岩性识别又分为两种方式进行。一种方式是分层识别,一种是逐点识别(按测井资料的采样间隔)。前一种方式要求先对测井资料进行分层,接着从分层数据中提取出一些特征信息,然后对于特征信息进行标准化、归一化处理,最后应用于网络的训练和识别。在这种方式中分层的精度影响识别结果,但分层后使学习和识别的样本减少,速度大大加快。逐点识别则是直接根据数字化的测井资料进行识别。测井资料岩性识别的基本步骤如下:

1. 选择对岩性敏感的测井序列。对于大多地区,自然电位(SP),自然伽玛(GR),岩性密度、声波时差、深电阻率等测井资料能够较好地反映岩性。通常把这几种测井资料作为划分岩性依据。对其标准化,归一化。

2. 测井资料与取心资料深度对齐,对要识别出的几种岩性进行编码,例如,要划分出三种岩性,砂岩、泥岩、灰岩,相应的编码可分别取为(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)。对于取芯的井段,标准化的测井资料构成网络的输入,岩性编码构成网络要求的输出。这些输入、输出样本对构成网络的训练集。

3. 对网络模型进行训练,使网络找到输入测井信息到岩性编码的一个非线性映射。

4. 将测井资料输入神经网络,计算未取芯部分的岩性编码。

5. 绘图输出,得到相应井段的岩性图件。

从上面的步骤可以看出,测井岩性识别的效果主要取决于网络训练样本的充分性、代表性。充分性指要有足够的训练样本,代表性指每一类的训练样本要能充分反映该类样本的整体特征。通常 BP 网络实现的是输入信息到岩性编码之间的静态非线性映射关系,当岩层较厚(大于测井仪器纵向分辨率),则误识部分仅存在于不同岩性的界面部分,由于测井仪器分辨率的限制,在不同岩性的界面处,测井曲线是渐变的,测井值的变化不仅反映该深度点岩性本身的影响,也反映围岩的影响,这是逐点孤立识别系统精度提高的难点,采用延迟网络模型可以改进效果,这里不再赘述,参见 Liu etal.,(1992)的文章。

9.4.2 测井资料沉积相识别

在石油勘探中,沉积环境解释通常是利用取芯和岩屑分析获得,但存在资料缺乏的问题,因为并不是每口井都有取芯资料。用测井资料来解释沉积环境则不存在这类问题(每口井都有测井资料),且有利于计算机实现的优点。这对于帮助了解盆地平面上各个地质时期的古地理面貌和发育史,查明控制油气形成与分布的地层条件,经济地勘探开发油气藏具有重要意义。

人工利用测井资料解释沉积环境,是一种"相面"的方法。在很大程度上依赖于地质人员对地区地质情况的了解和已有的经验,即依赖于人们对相应地区的测井曲线形态特征与沉积环境对应关系的认识。尽管测井曲线的形状特征与沉积环境有关系已为许多研究所证实,但不同的地区它们之间关系仍是有差别的。

利用测井资料识别沉积环境有两点不同于测井资料岩性识别:首先沉积相带所对应的测井曲线的形状特征显得重要;其次相带与相带之间的顺序转移一般要符合瓦尔特相律。

通常的孤立模式识别方法如统计识别方法、线性判别方法(王仁铎,1991)、模糊判别方法(王硕儒等,1992)以及 BP 网络方法可以考虑形状特征,但通常不能考虑顺序转移特点。如果用马尔柯夫链来做,通常能考虑顺序转移特点,但不能同时考虑形状特征。这是以往利用测井资料识别沉积环境的困难所在(刘瑞林等,1994)。

利用测井资料识别沉积相问题可以转化为测井资料特征串到相名称串的识别问题,即一个连续识别问题来研究。与其它模式识别系统一样,先对原始资料进行特征提取,得到测井资料特征串,对已有取芯的井,通过地质人员的分析得到沉积相名称串,多口井的这种串集合构成网络的训练集,对网络进行训练,得到特征串到相名称串考虑沉积顺序特征的非线性映射关系。然后对于其它未取芯井的特征串进行识别。下面讨论特征提取和分类器设计问题。

(1) 测井曲线形状特征提取

测井曲线的形状主要受岩性的影响,而岩性(如粒度、分选性和泥质含量等)又取决于沉积时的水动力学能量和物源供应条件,因此,测井曲线形状的各种变化可以反映出相应井段的岩石沉积时沉积环境的差别。测井资料与沉积环境的对应关系已有作者做了大量研究(Pirson,1974;马正,1982)。这里不再赘述。

目前从测井资料提取沉积特征,尚不能完全自动化,需要人工分层。人工分层后,不同的测井曲线可以按不同的方式来进行特征提取。对于自然电位、自然 γ 测井曲线,其形状特征与沉积相的对应关系研究较多,可以提取出一些有地质意义的数字特征。如反映岩石粒度、泥质含量的幅度平均值;反映粒序的相对质心位置;反映水动力能量变化(即曲线的波动性)大小的方差;反映水动力能量变化频率的曲线峰或谷数目的相对锯齿数等等。对于电阻率曲线,由于它的形状特征与沉积相的对应关系研究较少,且其形态又受地层流体性质的影响,可以从信息压缩的角度提取其形状参数,如线性预测编码等等。

(2) 延迟神经网络的训练和识别

孤立模式的识别方法通常只考虑了一个层段的特征与沉积相的静态映射关系。未考虑沉积相在深度上的顺序转移特征,因此识别精度都不高,大约在 75% 左右(王仁铎,1991;王硕儒等 1992)。为了考虑沉积的顺序特征就必须在网络中引入对于前面特征的"记忆",使网络在学习和识别时同时自动考虑当前层的特征和前面深度上的特征。

设 $F^t=\{f_1^t,f_2^t,\cdots,f_m^t\},(t=1,2,\cdots,L)$ 为 t 层归一化的特征矢量,其中 L 为串长度,m 为特征矢量的维数。$X_j(t)$ 为网络当前深度 t 节点 j 的输出(对于输入节点,$X_j(t)=f_j^t$),$\mathrm{net}_i(t)$ 为当前网络节点 i 的总输入,$O_i(t)$ 当前网络节点的 i 的总输出。

$$\mathrm{net}_i(t)=\sum_{j=1}^{i-l}W_{ij}^{(0)}X_j(t)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N+n}W_{ij}^{(k)}X_j(t-k) \tag{9.4.2}$$

$$X_i(t)=O_i(t)=f(\mathrm{net}_i(t)) \tag{9.4.3}$$

$$(i=m+1,m+2,\cdots,N+n)$$

式中 K 为网络的延迟数,$W_{ij}^{(k)}$ 为网络延迟 $k(k=0,1,\cdots,K)$ 的连接权,N 为输入节点数加中间层节点数,$N-m$ 为中间层的节点数,n 为输出层节点数。

设对于特征串 P 网络对于 t 层特征信息网络变换的输出为 O_β^t,网络要求的输出为 D_β^t $(\beta=1,2,\cdots,n)$,其误差平方和为

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\sum_{\beta=1}^{m}(O_\beta^l-D_\beta^l)^2 \tag{9.4.4}$$

式中 L 为串长度。根据(9.4.2)式和(9.4.4)式就可以得到网络连接权的适应公式,如前节的推导。对于沉积相识别问题,由于沉积的顺序是从深部到上部的,所以,串的起点应从深部开始至顶部。即 $l=1$ 对应于要分析井段最深部的特征,$l=L$ 对于分析井段上部的特征。网络的延迟数 k 一般可取 1 或 2。

我们用上述方法试处理了几个地区的资料:① 江陵凹陷。所用的测井资料为自然电位(SP)和 0.45m 电阻率曲线。根据取芯资料分析得知该地区的相应深度由 5 种微相构成:分流叉道,分流叉道间湾,河口坝,远砂坝和三角洲。用 S4 井(24 个层位),S11 井(18 个),L16 井(11 个层位)的曲线特征串和相应层位人工分析的沉积相结果作为上述网络学习的例子,对网络进行迭代训练。训练完成后,对另外 13 口井(211 个层位)的测井曲线特征进行识别,识别结果与地质人员人工分析结果符合的共 192 层,符合率为 91%。对于不符合的层位,地质人员也没有定论。② 泌阳凹陷。据三口井的取芯资料分析,待分析井段共有 4 种亚相,对网络训练后,识别 4 口井的资料(86 个层位)除 6 层误分外,其余均吻合,对这两个地区的资料,我们也用 BP 网络进行了学习识别。BP 网络学习的例子与延迟网络相同,识别精度只在 70~80% 之间。这说明,考虑沉积相的顺序特征进行识别比孤立模式识别精度高,对于相类较多的情况,如轮南地区有 9 种亚相,我们用轮 2 井和轮 5 井的相分析结果标定网络后,对轮 10 井进行识别(26 个层位),除 1 层与人工分析不符合外,余者都与人工分析吻合。这些都说明,采用延迟网络同时考虑当前层段的特征和顺序转移特点是可以接近人工分析沉积相的精度的。这种方法的关键在于给定网络学习的例子串的代表性和充分性。

这件工作也可容易地应用于测井资料储层评价的其它方面,如油水层识别,水淹等级识别,气层识别等。具体应用时,要根据问题的需要,从多种测井曲线中提取出反映待识别问题的特征量。此时特征串的长度可取 $L=4\sim5$。网络的延迟数可取 $k=1,2$ 对于单层识别,只有串端点的误差参与延迟网络连接权的调整。这样做的优点在于考虑了相应目的层井段测井值的背景。

9.5 人工神经网络在地震资料油气预测中的应用

利用地震资料直接预测含油气地层的横向变化,确定油气储集层的边界,为钻井提供准确的井位,一直是石油地震勘探研究的重要问题。由于实际地震资料是受储集层岩石成分、孔隙大小、孔隙中流体性质、埋藏条件以及随机干扰等多种因素影响的结果,通常从地震道中提取一两个参数,如波的传播时间和反射振幅,尚不足以确定储层的含油气性质。这就促使人们从反射地震数据中提取更多的属性参数来表达储集层的特性,寻求更有效的方法分析这些特征参数。

模式识别技术在地震资料储层预测中的应用在 80 年代初就已引起关注。Bios(1980, 1981, 1983)研究了用聚类技术来确定油藏边界。Sinvhal 等(1983, 1984)用线性判别分析方法对某些砂岩—页岩层序进行分类。钱绍新(1992)应用 Fisher 判别作储层预测。Huang 和 fu(1985a, 1986b)采用句法模式识别技术来辨识亮点。Quine 和 Kubichek(Aminzadeh, 1987)则将模式识别方法结合进基于规则的专家系统中进行储层分析。然而,这些方法具体应用到地震资料油气预测时,方法本身也是有局限的。线性判别方法的局限性在于它只能对特征参数空间用超平面进行划分。当类与类之间的边界在特征空间中不是线性可分的,这种方法

就无能为力;以 Bayes 公式为基础的统计识别技术,通常要对特征数据的分布形式作为人假定,但这个假定通常不易为实际数据所满足;句法模式识别方法虽然可以识别对象的结构信息,但抗噪能力差;专家系统的成功在于知识库的建立,由于通常知识获取的困难和人类专家对多维数据认识的局限性,专家系统方法在地震数据的分类问题上,未获得太大的进展。用人工神经网络构成的分类器对特征数据分布形式的假定要比统计方法弱,它只取决于学习的例子。多层网络通过对例子的学习,可以在模式空间形成任意复杂的决策区,这是线性判别函数所不具备的。由于神经网络方法采用并行结构,使其具有很强的抗干扰能力。因为实际地震资料中都含有各种各样的干扰,识别系统的抗干扰能力在实际应用中就显得尤为重要。此外,在设计分类器时,若采用具有延迟项的网络模型,可以使网络考虑信号的时变性。这样也就考虑了信号中的结构信息。由于神经网络模型具有这些优点,近年来,神经网络方法在地震资料油气预测中得到迅速应用和发展(张学工等,1992;朱广生等,1994;刘瑞林等,1995)。

地震资料油气预测系统主要由两部分组成:地震资料特征提取和网络的学习识别。下面对这两部分作详细讨论。

9.5.1 地震资料油气特征提取

利用目的层段的地震数据进行油气识别,一般要进行特征提取。尽管采用神经网络模型构成的分类器对特征提取的要求没有象统计方法那样严格,但利用提取的特征更容易实现神经网络的学习和识别。一般地说,特征提取的目的是要从原始资料中抽出各类模式的本质信息和各类模式之间的区分性。即要去掉不同类别数据的共性,突出不同类的差异,对地震资料油气识别来说,是要从相应的目的层时窗数据中抽出反映地层含油气性的特征量。诚然,最容易对地层含油气性进行分类的特征量应是直接反映地层的含油气性的参数,如波阻抗、吸收系数、孔隙度、含油(气)饱和度等等。但是,要从地震道中直接提取这些参数是极其困难的。目前,在地震油气预测中主要从信号分析的角度进行特征提取。特征提取的方法,按照是采用线性分析还是非线性分析,可以分为线性方法和非线性方法。线性分析方法是一些常规的信号分析方法,如线性预测编码,最大熵谱估计,Hilbert 变换等等。非线性分析方法是近年来发展起来的一些方法,如地震信号的分维计算,小波变换方法以及神经网络模型本身也可以用来作特征提取。下面讨论这些特征提取方法。

(1) 线性预测编码

Bios(1980,1983)的工作表明,线性预测数可以用来作为识别油气的特征。线性预测模型利用 n 时刻的信号 S_n 可以用其 P 个过去时刻的采样值的线性组合来估计。

$$\hat{S}_n = -\sum_{i=1}^{p} a_i S_{n-i} \tag{9.5.1a}$$

式中的负号是为了下面书写方便而设定的 $a_i(i=1,2\cdots,P)$称为线性预测系数。估计的信号 $\hat{S}_n$ 与真实信号 S_n 之间的误差为 e_n

$$e_n = S_n - \hat{S}_n = S_n + \sum_{i=1}^{p} a_i S_{n-i} \tag{9.5.1b}$$

通常要求误差平方和

$$e^2 = \sum_{n=1}^{N} e_n^2 \tag{9.5.2a}$$

取极小值，于是有

$$\frac{\partial e^2}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,P) \tag{9.5.2b}$$

可得

$$\begin{pmatrix} R_0 R_1 \cdots R_{p-1} \\ R_1 R_0 \cdots\cdots \\ \cdots \\ R_{p-1} R_{p-2} \cdots R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \cdot \\ R_p \end{pmatrix} \tag{9.5.3a}$$

式中

$$R_i=\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n S_{n-i} \tag{9.5.3b}$$

这是一个 P 阶线性代数方程，给出 R_i，即可得取方程组的解。为了求 R_i，可利用(9.5.3b)式求自相关函数，但实际上时窗内的数据只有有限长，也就是要从有限长度的数据中求相关。设数据的长度为 N，可采用下式计算 R_i，

$$R_i=\frac{1}{N+1-i}\sum_{n=1}^{N} S_n S_{n-i} \tag{9.5.4}$$

具体实现可采用 Durbin(1959)的方法。我们工作表明，对于油气预测问题，P 取 5～7 较合适。

(2) 功率谱中的特征提取

利用线性预测方法进行谱分析，与直接对地震信号作快速傅利叶变换求得的谱相比，具有不受间隔频率影响的优点，能够准确地求出时窗内的共振峰和带宽。由于包含目的层的时窗在地震道中不能取得过宽，因此，采用这种方法进行谱分析较合适。

设 e_n，S_n 的 Z 变换分别为 $E(Z)$和 $S(Z)$，由于 S_{n-i}的 Z 变换为 $S(Z)Z^{-i}$，对(9.5.16)式进行 Z 变换，可得

$$E(Z)=S(Z)+(\sum_{k=1}^{p} a_k Z^{-k})S(Z) \tag{9.5.5}$$

于是，地震道的脉冲传递函数 $S(Z)$可用下式求出

$$S(Z)=E(Z)/(1+\sum_{k=1}^{p} a_k Z^{-k}) \tag{9.5.6}$$

我们所接受的地震信号是震源信号通过地层反射后的输出波形，可以用线性的离散模型来近似

$$\hat{S}_n=-\sum_{k=1}^{p} a_k S_{n-k}+G\sum_{l=0}^{p} b_1 U_{n-1} \tag{9.5.7}$$

式中当前的信号估计为 S_n，是用 S_n 的 P 个过去值和源信号 u_n 的 q 个过去值的线性组合来表示。用 Z^{-1}表示时间延迟，对(9.5.7)式作 Z 变换，有

$$(1+\sum_{k=1}^{p} a_k Z^{-k})S(Z)=(G\sum_{l=0}^{q} b_1 Z^{-1})\,U(Z) \tag{9.5.8}$$

由此求得地层的离散模型的传递函数 $H(Z)$为

$$H(Z)=U(Z)/S(Z)=G\sum_{l=0}^{q} b_1 Z^{-1}/(1+\sum_{k=1}^{p} a_k Z^{-k}) \tag{9.5.9}$$

因(9.5.9)式是由极点和零点构成的，故称为极零模型(或自回归平均模型)。当 $b_0=1$，$b_i=0(i=1,2,\cdots,q)$时，就得到通常的自回归模型(或叫全极模型)。

$$H(Z) = G/(1+\Sigma a_k Z^{-k}) \tag{9.5.10}$$

式中 a_k 是用线性预测方法求得的系数，由(9.5.10)得到功率传递函数

$$H^2(Z) = G^2/(1+\Sigma a_k Z^{-k})^2 \tag{9.5.11}$$

利用这个功率传递函数，可以求得功率谱。因 Z^{-1}是信号的一次采样时间间隔 ΔT 的延迟算子，用复频率 s 可将其记为 $Z^{-1}=\exp(-s\Delta T)$，令 $s=i\omega$，则 $Z^{-1}=\exp(-i\omega\Delta T)$。可见 Z^{-1}是角频率 ω 的函数，给定 ω 后，就可以确定 Z^{-1}的值。用频率表达时，由 Niqest 频率 $f_{max}=1/\Delta T$，$\omega=2\pi f$，有

$$Z^{-1}=\exp(-i\pi f/f_{max}) \tag{9.5.12}$$

代入(9.5.11)式有：

$$|H(Z)|^2 = G^2/(1+\Sigma a_k \exp(-i\omega kf/f_{max}))^2 \tag{9.5.13}$$

式中 G^2 可由下式决定

$$G^2 = R_0 + \Sigma a_k R_k \tag{9.5.14}$$

是预测误差的总能量。

由(9.5.13)式可见，对任意的频率，可以求出功率谱值。由于频谱是用公式表达的，故便于求出共振峰和带宽。对于油气预测问题，通常在功率谱中提取如下几个参数：

- 功率谱最大值(主峰高度)；
- 功率谱最大值对应的频率；
- 主峰的半宽度(带宽)；
- 功率谱的总面积；
- 中心频率(平均频率)；
- 频谱的一阶，二阶，三阶矩。

这些参数可以从不同的侧面反映功率谱的形状。目的层的特性不同，其反射波形就不同，自然地其频谱就不同，所以，这些参数从某种意义上反映了地层的性质。

(3) 自相关函数特征提取

自相关函数定义为

$$R_k = \sum_i^{N-k} X_i X_{i-k} \tag{9.5.15}$$

自相关函数从时间域反映由地层的特性不同引起的反射波的差异。通常从自相关函数中提取4个参数。设 A_0 为自相关函数最大值，A_1 为最大值最近邻的第一个极值点，A_2 为最大值后的第二个极值点。用 $B_1=A_1/A_0$，$B_2=A_2/A_0$ 作为两个特征。第一过零时间 T_1，第二过零时间 T_2 作为另外两个特征。

(4) 瞬时振幅中的特征提取

瞬时振幅的变化反映地层的吸收特性。设地震信号 $X(t)$的 Hibert 变换为 $X'(t)$，则复信号为

$$a(t) = x(t) + jx'(t) \tag{9.5.16}$$

瞬时振幅为

$$A(t) = |a(t)| = \sqrt{X^2(t) + X'^2(t)} \tag{9.5.17}$$

我们在应用中提取两个特征：

· 目的层时窗起止点瞬时振幅的变化

$$\Delta A(t)=A(t_2)-A(t_1) \tag{9.5.18}$$

t_2 为时窗底部的时间，t_1 为时窗起点的时间。

· 目的层时窗顶部 1/4 宽度与底部 1/4 宽度瞬时振幅的变化

$$\Delta A(t)=A(t_2-(t_2-t_1)/4)-A(t_1+(t_2-t_1)/4) \tag{9.5.19}$$

上述 20 个特征参数一般可以从不同的侧面反映含油性地层的地震反射与非含油气性地层的地震反射的差异。尽管这些特征参数可能有冗余，但对于用神经网络模型构成的分类器来说，神经网络通过给定的井旁道特征的训练，可以自动调节其连接权的大小，来表达不同特征的重要性程度。实际的情况往往是，在一个工区，一些特征是主要的，在另一工区，另一些特征可能是主要的。网络方法不必要像统计模式识别方法那样要作主成分分析或 $K-L$ 变换。

上面讨论了用常规的信号分析手段进行特征提取。近年来出现的一些非线性方法，也可以用于进行特征提取。

(5) 分维特征

我们给地下一个激励得到的地震记录是一个时间序列。记为 $x(t)$。如果把地质体当作一个完全弹性体，波在其中的传播满足线弹性波动方程，那么这个 $x(t)$是不含有混沌解的。然而，利用弹性波动方程作的正演不能与实际观测的 $x(t)$吻合，也是客观事实。除去仪器噪声和观测时的环境噪声，$x(t)$的复杂性还主要来自于两个方面：1. 介质几何形态的复杂性（构造复杂性）；2. 介质本身运动的复杂性，前者涉及空间复杂性，这里不作讨论，仅讨论后者。

实验表明，在具有强耦合作用的物质体中（例如勘探的目的层介质——孔隙介质，其中的流体相与骨架相可认为是具有强耦合作用的介质），在低频情况下，物理量的驰豫满足（Nagy et al.，1979），

$$q(t)=q_0\exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta}\right) \tag{9.5.20}$$

式中 $0<\beta<l$，τ 为体系过程的时间尺度，β 随着时间尺度的增加而增加。这种驰豫与通常的 Debye 驰豫 $\beta=1$ 不同。在地震勘探中，求吸收系数，或进行反 Q 滤波，通常假定 $\beta=1$。实际的物理过程并非如此，这可能是吸收系数，和反 Q 滤波一直作不好的原因。从物理上这个现象不难理解，对于含流体的孔隙介质，在外部的激励来到之前，孔隙中的流体相对于骨架处于静止状态；当外部激励来到之后，由于固体相与流体相的物理性质不同，两者之间便开始有相运动。从相对静止的状态到有相对运动的状态是突然发生的临界现象。对于孔隙介质就是一个动态的临界导通（动渗流）问题。

对于静态（固相静止）临界渗流问题物理学中已有很多研究。设 φ_c 为流体临界导通孔隙度发生临界导通的概率正比于 $|\varphi-\varphi_c|^{-\alpha}$。对于三维情况 α 为 0.4～0.5。实际上，孔隙介质中的流体通常是带电荷的，在流体与固体的界面处存在一个双电层。固体骨架的运动，引起双电层结构的变化，而双电层结构的变化又引起孔隙中流体带电性质的变化，进而引起可相对运动部分体积的变化，于是出现临界导通（动渗流）。

渗流问题与分维是有联系的，分维与 β 相联系，因此，体系的分维与体系的复杂运动相关联。如果能从实际资料中提取出 β 值，或者与 β 相关的分维，β 也就可以作为孔隙介质含

油气性的一个度量。由于实际资料中目的层的地震反射通常与其围岩层的反射混合在一起，目前从地震道中计算地层的分维的方法尚不成熟，需要作进一步研究。

(6) 小波包变换特征提取

我们得到的地震信号不是平稳随机过程产生的，它的性质随着时间发生明显变化。对于这种时变信号，通常采用短时傅里叶变换进行分析。短时傅里叶变换又叫窗口傅里叶变换，表示为

$$G(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-t')f(t)e^{i\omega t}dt \tag{9.5.21}$$

式中 f 是时间信号，G 是短时傅里叶变换，g 是窗函数，ω 是角频率。由于频率与周期 T 成反比，于是反映信号的高频成分需要短时窗，而反演低频成分需要宽时窗，因此窗口大小及形状均固定的短时傅里叶变换不能同时满足这一要求。小波变换就是针对短时傅里叶变换的这一局限性提出来的。连续小波变换可以表示为

$$W(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^{*}((t-b)/a)f(t)dt \tag{9.5.22}$$

其中 Ψ 是小波函数，a 是控制小波宽度的伸缩参数，b 是变换参数。小波变换与窗口傅里叶变换的主要差别是，小波可以改变其大小，而同时保持其形状不变，这使得它的分辨率是可调的，这个性质叫做多分辨性，它使得小波变换在较大的尺度范围内有较好的分辨率。

小波变换的逆变换是

$$f(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\Psi((t-b)/a)W(a,b)\frac{da}{a^{2}}db \tag{9.5.23}$$

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^{2}}{|\omega|}d\omega \tag{9.5.24}$$

式中 $\Psi(\omega)$是小波的傅里叶变换，(9.5.24)式是小波变换的必要条件。

对于一个离散的输入信号 $f\in V_0$，其变换。

$$f=\sum_n C_n^0\Phi_{0,n}=\sum_n(C_n^1\Phi_{1},n+d_n^1\Psi_{1,n}) \tag{9.5.25}$$

式中 $\varphi_{1,n}$和 $\Psi_{1,n}$是在子空间 V_1 和 W_1 中的正交基，$V_1\oplus W_1=V_0$，基 φ 和 Ψ 分别叫做尺度函数和子波函数 C_n^1 和 d_n^1 分别为

$$C_n^1=\Sigma C_k^0 h_{2n-k}\equiv HC_k^0 \tag{9.5.26}$$

$$d_n^1=\sum_k C_k^0 g_{2n-k}\equiv GC_k^0 \tag{9.5.27}$$

式中 H 和 G 是90°镜象滤波器。

$$h_k=\int\Psi(x/2)\Phi(x+k)dx \tag{9.5.28}$$

$$g_k=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\Psi(x/2)\Phi(x-k)dx \tag{9.5.29}$$

序列 C_n^1 是 C_n^0 在更大尺度上的平均，序列 d_n^1 是 C_n^0 与 C_n^1 在同一尺度下两者的信息误差。变换(9.5.25)式是可逆的：

$$H^{*}H+G^{*}G=I \tag{9.5.30}$$

$$HG^{*}=0 \tag{9.5.31}$$

$$\sum_n h_n = \sqrt{2} \tag{9.5.32}$$

$$\sum_n g_n = 0 \tag{9.5.33}$$

输入信号由

$$C_k^0 = HC_n^1 + G^* d_n^1 \tag{9.5.34}$$

恢复。向前面小波变换 d 递推进行，每一较大尺度水平仅由前一级变换的低通部分（c^{i-1}）所决定。

为了获得较好的时/频分辨率，Coifmen 等(1992)给出了一个小波变换的修正形式，叫做小波包变换，小波包变换与一般小波变换不同的是，每一次递推是由前一级的低通部分和高通部分所决定，而不仅是由低通部分决定。这样尽管增加了计算量，但增加了分辨率，通常小波越长分辨率越高，具体实现可以参见(秦前清，1994；Wickhauser，1994)，利用小波包作时频分析的例子参见(Forster，1994)。

(7) 神经网络特征提取

特征提取的目的是去掉原始数据中的冗余，从原始数据中提取出有用的信息。数学上，特征提取可以看作是寻找一个从 d 维输入空间到 m 维输出空间的映射 Φ 的问题。

$$\Phi: R^d \rightarrow R^m; m \leqslant d \tag{9.5.35}$$

通常的主成分分析，或 $K-L$ 变换是对输入数据进行线性变换或投影，只有当原始数据中存在线性约束表面时，才会获得好效果。Saund(1992)采用一个三层网络进行数据压缩，此时网络要求的输出是网络的输入，当对数据迭代稳定后，从中间层取出结果。实际上，根据 BP 网络的表达定理，要用一个三层网络才能表达任意映射。可以推断，应用一个五层网络结构进行信息压缩(如图 9.5.1 所示)，从原理上更合理一些。此时，网络的前三层相当于通过迭代找到从 d 维空间到 m 维空间的映射 Φ，网络的后三层相当于实现从 m 维信息恢复原来的 d 维信息。

五层网络进行特征提取的步骤如下：

(1) 对时窗内的数据归一化；

(2) 将归化的各道数据依次馈进网络，设输入的数据为 $x_1^p, x_2^p, \cdots, x_d^p$，这个数据经网络运算后的输出为 $x_1^p, x_2^p, \cdots, x_d^p$；

(3) 计算误差

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}(x_k^p - \hat{x}_k^p)^2 \tag{9.5.36}$$

(4) 按误差反传播算法对输入的数据集进行迭代，直到稳定；

(5) 从网络的第三层取出其输出值 $y_1^p, \cdots, y_m^p$，这些值就对应于 P 道时窗的特征。此时网络的前三层就实现了从 d 维空间到 m 维空间的非线性映射 Φ。

当 m 的取值为 2 或 3 时，我们可以根据取出的输出值，利用绘图程序表示其聚类的性质，这样做实际上已达到分类的目的了。

此外，Kohonen 网络也可以用于特征提取，这时相当于对时窗数据进行聚类，把 d 维数据投影到两维平面上，每一道在平面上的位置坐标值即可作为该道的特征。这样作时要规定两维方格的坐标原点。

上面我们讨论了从地震资料中提取油气特征的各种方法，但在具体的应用中并不是要

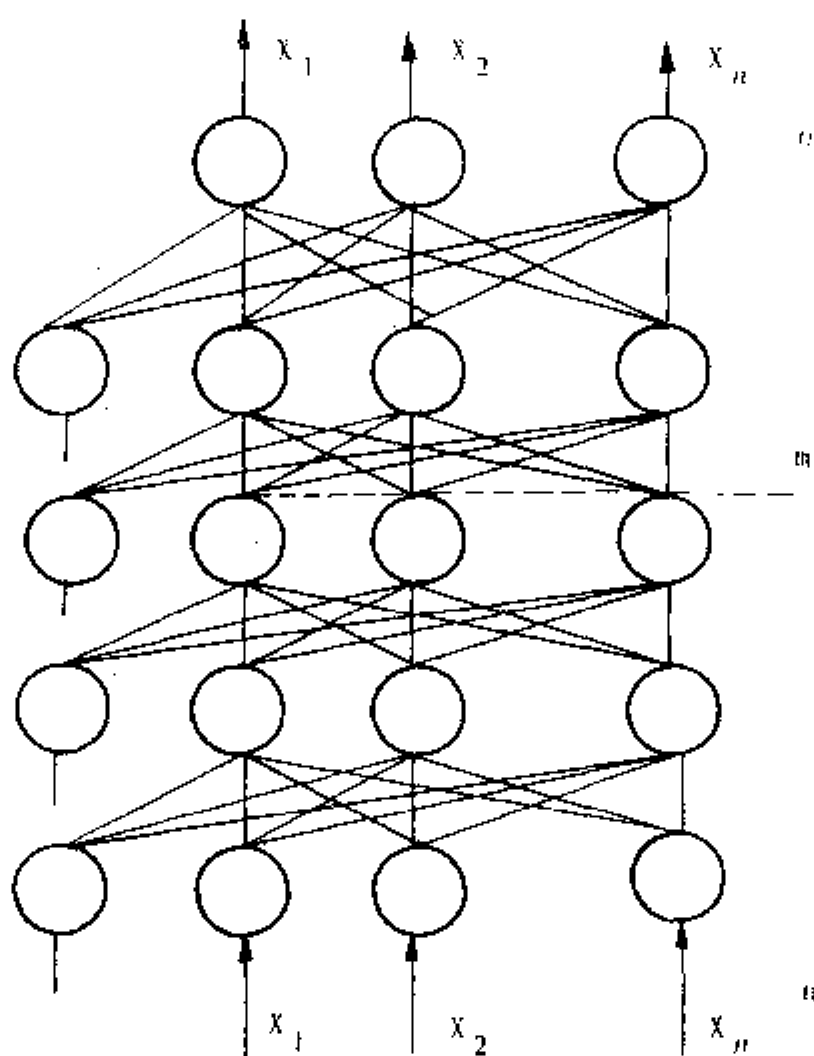


图9.5.1 五层网络信息压缩实现特征提取

用到每一种方法，也并非提取的特征越多越好，而是要根据地区的具体情况，选择相应的特征提取方法，以达到最佳的油气预测效果。

9.5.2 时间延迟神经网络地震油气预测方法

目前已发展的几种地震资料油气预测技术，通常采用孤立模式分类方法。如 Bayes 统计分类方法、线性判别方法（Bios，1981；钱绍新，1992）、以及 BP 神经网络方法（朱广生等，1994）等。在这些方法中，一般先根据目的层的位置选取一个包含目的层的时窗，接着对这个时窗内的地震信号进行特征提取，然后对这些特征信息用相应的分类方法进行分类。特征信息与地层含油气情况的关系是静态的映射关系，方法本身没有考虑特征信息随时间的变化与地层油气聚集的联系。这在某些情况下，就有可能产生误识问题。在叠加偏移剖面的地震道中，特征信息随时间的变化，主要反映地层层序的变化。而地层层序的变化与油气的聚集是有密切联系的（牛毓荃等译，1980）。下面给出基于时间延迟神经网络模型的地震油气预测方法。特征提取是多时窗的，以表达特征信息随时间的变化；亦即地层层序等因素的变化。时间延迟神经网络模型通过井旁道的标定，用于表达相应时窗特征信息与地层含油气性的关系，以及不同时窗特征信息的变化与地层含油气性的联系。

孤立模式识别方法，通常仅提取地震道中包含目的层的单个时窗的特征量。这对于反映地层中诸含油气因素引起的地震波形的变化可能是不够的，因为特征信息随时间的变化也可能是地层含油气控制因素的反映。我们采用滑动时窗的办法进行多时窗特征提取，以表征含油气因素在地震道中随时间的变化。特征提取时，每一时窗提取 19 个特征量，分别为线性预测系数 6 个，功率谱参数 8 个，自相关函数形状参数 3 个，瞬时振幅中的参数 2 个。

通过特征提取,对于每一道就有一个多维特征串。这些特征串与地层含油气与否的关系通过一个时间延迟神经网络模型联系起来。

在语音识别中,为了让网络模型具有表达不同时框音素特征之间的短暂联系的能力,A.Waibel等(1989)提出时间延迟神经网络结构应用于音素识别。采用Werbos(1990)的思路,实现具有任意延迟项的时间延迟神经网络模型和算法。

设 $F^t=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\},(t=1,2,\cdots,L)$ 为 t 时窗归一化的特征矢量,其中 L 为时窗滑动的次数,m 为特征矢量的维数。$X_j(t)$ 为网络时间 t 节点 j 的输出(对于输入节点,$X_j(t)=f_j^t$),$\text{net}_i(t)$ 为当前网络节点 i 的总输入,$O_i(t)$ 当前网络节点 i 的总输出。

$$\text{net}_i(t)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij}^{(k)}X_j(t-k) \tag{9.5.37}$$

$$X_i(t)=O_i(t)=f(\text{net}_i(t)) \tag{9.5.38}$$

$$(i=m+1,m+2,\cdots,N+n)$$

式中 K 为网络的延迟数,$W_{ij}^{(k)}$ 为网络延迟 $k(k=0,1,\cdots,K)$ 的连接权,N 为输入节点数加中间层节点数,$N-m$ 为中间层的节点数,n 为输出层节点数。对于模式识别问题,网络节点的传输函数仍采用S型函数。

设对于特征串 P 网络对于最后一框特征信息网络变换的输出为 O_β^L,网络要求的输出为 $D_\beta^L(\beta=1,2,\cdots,n)$,其误差平方和为

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{m}(O_\beta^L-D_\beta^L)^2 \tag{9.5.39}$$

根据(9.5.37)式和(9.5.39)式就可以得到时间延迟网络模型连接权的修正公式。具体实验时间延迟网络时要使 $L>K$,即特征提取时窗滑动的次数大于网络的延迟数。对于第 L 框前面 $L-1$ 框的特征信息,网络的实际输出与要求输出之间的误差不参与网络连接权的调整。从前面的推导可以看出,时间延迟网络含有对前面时窗特征信息的“记忆”作用。因此,网络通过井旁道的标定不仅表达了相应时窗内特征信息与网络要求的输出之间的复杂关系,同时也表达了地震特征信息随时间变化与网络要求的输出之间的联系。而这种联系从地质上说就是地层的层序反映为地震意义上的地层与油气聚集之间的联系。

我们用模型数据和实际剖面对这种方法进行了试验并与BP网络方法进行了比较。模型数据用PROMAX系统制作。地质模型如图9.5.2所示。模型中在CDP5-82道,深度为300~450m之间有一单斜地层。为了使模型数据接近实际资料,先用波动方程有限差分法做模型的水平叠加剖面,然后对深度偏移剖面加20%的噪音。特征提取时,相应层位的时窗取在324~430之间,每100m时窗提取19个特征信息。分别为:线性预测系数6个,功率谱参数8个,自相关函数特征3个和瞬时振幅中的信息2个,时窗滑动 $L=4$ 次,每次滑动两个采样点。用CDP40和CDP110左右32道特征串标定网络,然后对剖面特征进行识别。结果如图9.5.3(a)所示。BP网络的识别结果如图9.5.3(b)所示。从图中可以看出,对79~89道的识别两种方法存在差别。时间延迟网络由于增加了时间上的约束,这些道识别为低值。BP网络识别为高值。由于BP网络实现的是单时窗特征到类别的静态映射,故把时窗330~430中有明显正同相轴的道都识别为高值,与人的视觉效果相同。

一条实际含气地层剖面是四川某探区的三维连井测线,测线上共有8口井,包括高产,低产,微产气和干井。持征提取的方法与前面相同,只是时窗的位置由目的层决定。网络的

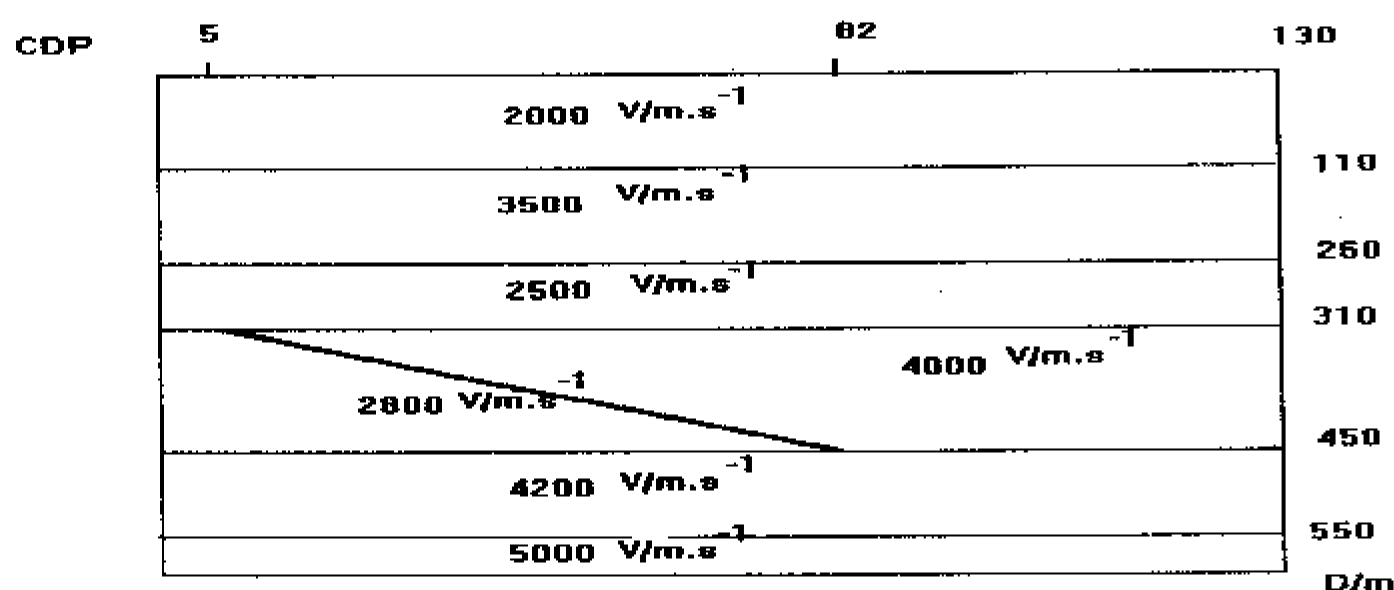


图 9.5.2 含有单斜地层的地质模型

延迟数 $K=2$。用 F2 井(高产井)和 F6 井(干井)的左右各 8 道,共 32 道特征信息标定网络,其中高产井网络要求的输出为 1,干井网络要求输出为 0。网络训练后用于识别其它道的特征,得到含油气情况随地震道的变化曲线如图 9.5.4 所示,图下面的特征曲线是 $L=4$ 的特征曲线。由图可见,高产井 F18,F9 的预测结果为高产,F1 为低产井,预测结果处于预测曲线的高值与低值之间,与实际情况符合;对 F12,F19,F11 这几口干井或微产气井的预测也与实际情况符合。我们也用 BP 网络方法进行了预测,BP 网络仍采用 F2 和 F6 井的井旁道特征进行标定,预测结果如图 9.5.5 所示。图中表明,F12,F19,F18,F9 井与时间延迟网络结果相同,F11 井实际为干井,而预测为高产,F1 井为低产井,预测为高产。

实际含油地层剖面是南阳油田的连井线,目的是为 H_3^2 段。用 X83 井(有油),X82 井(无油)的左右道特征标定网络,延迟网络预测如图 9.5.6(a)所示。BP 网络的结果如图 9.5.6(b)所示。延迟网络对 X84 井(有油)是符合的,而 BP 网络的结果就不明显,对该地区其它几条线的预测有类似的结果。

从这些实例可以看出,用时间延迟神经网络模型进行油气识别,其结果要好于 BP 网络方法的结果。原因在于地震信号中某些由含油气因素(如地层的层序等)引起的地震反射特征随时间的变化,在单一时窗中可能提取不出来,只有提取多时窗的特征来表达。时间延迟网络通过井旁道特征串的标定,除获得单时窗的反射特征与地层含油气性的关系之外,还获得了特征参数随时间的变化与地层含油气性的联系。从地质上说,时间延迟网络进行油气识别时增加了层序的约束。从计算上说,时间延迟网络增加了顺序的约束和联系。而 BP 网络识别方法,则没有获得这 5 种顺序与类别的联系。另外,对这种多时窗信息的识别用孤立模式识别方法也是不合适的。因为参数空间的维数随着时窗滑动的次数将迅速增加。

孤立模式识别方法仅考虑了特征信息与油气类别之间的静态映射关系,没有考虑特征信息随时间的变化(即地层层序等因素)与地层油气聚集的联系,在有的情况下就可能产生误识问题。上面给出的基于时间延迟神经网络模型的地震油气预测方法,采用多时窗特征提取,用时间延迟网络模型通过井旁道特征串的训练同时获得特征信息与地层含油气情况的关系和特征信息的变化与地层含油气情况的联系。因此,对于地震油气识别来说,这是一种更为合理的方法。该方法也可以应用于初至拾取,同相轴追踪、道编辑以及地震相识别等问题中。此外,本文的工作是在叠加偏移剖面上进行的。原始的地震记录经过这些处理之

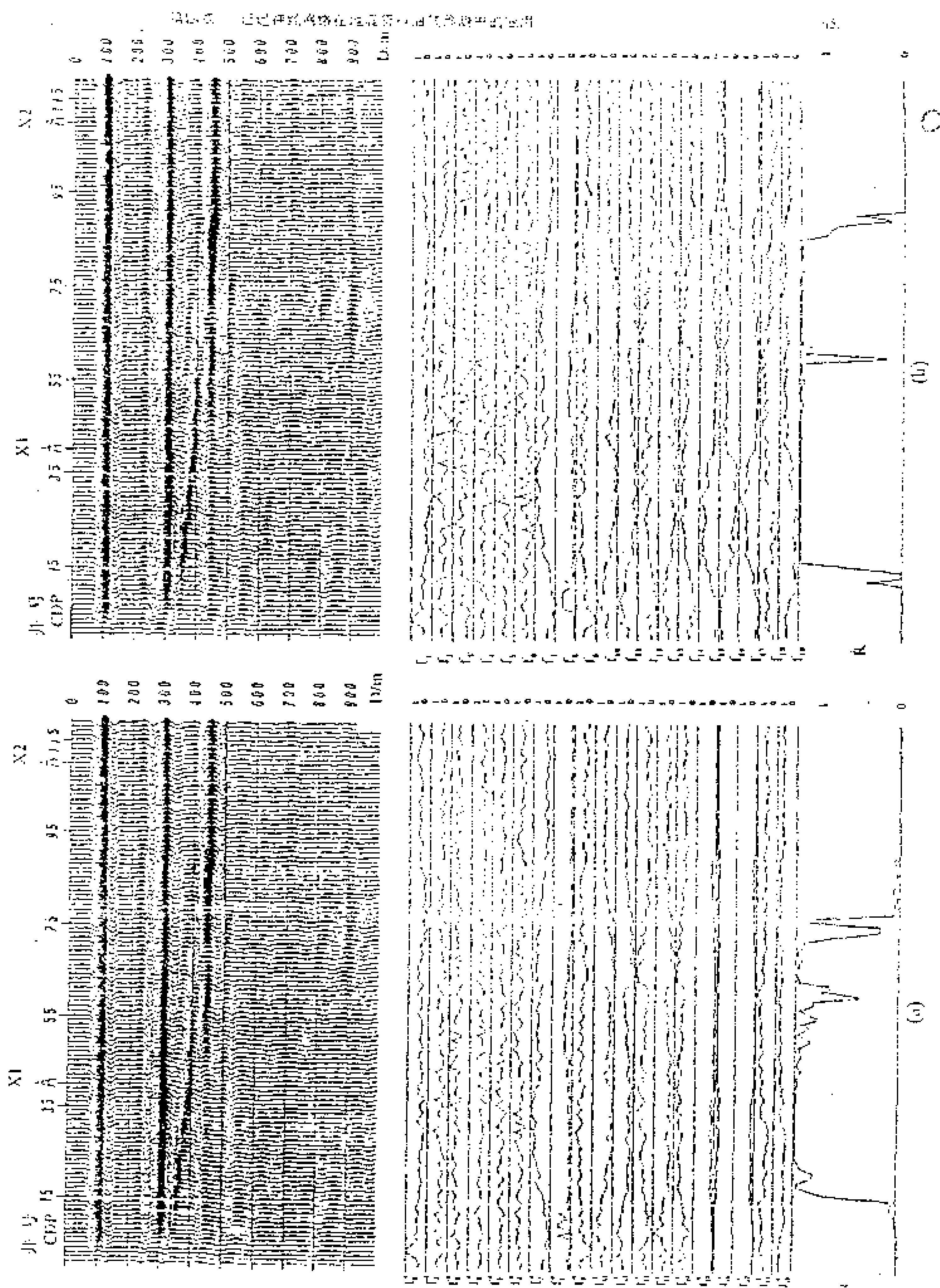


图 9.5.3 模型数据两种网络识别结果

(a) TDNN;(b) BP

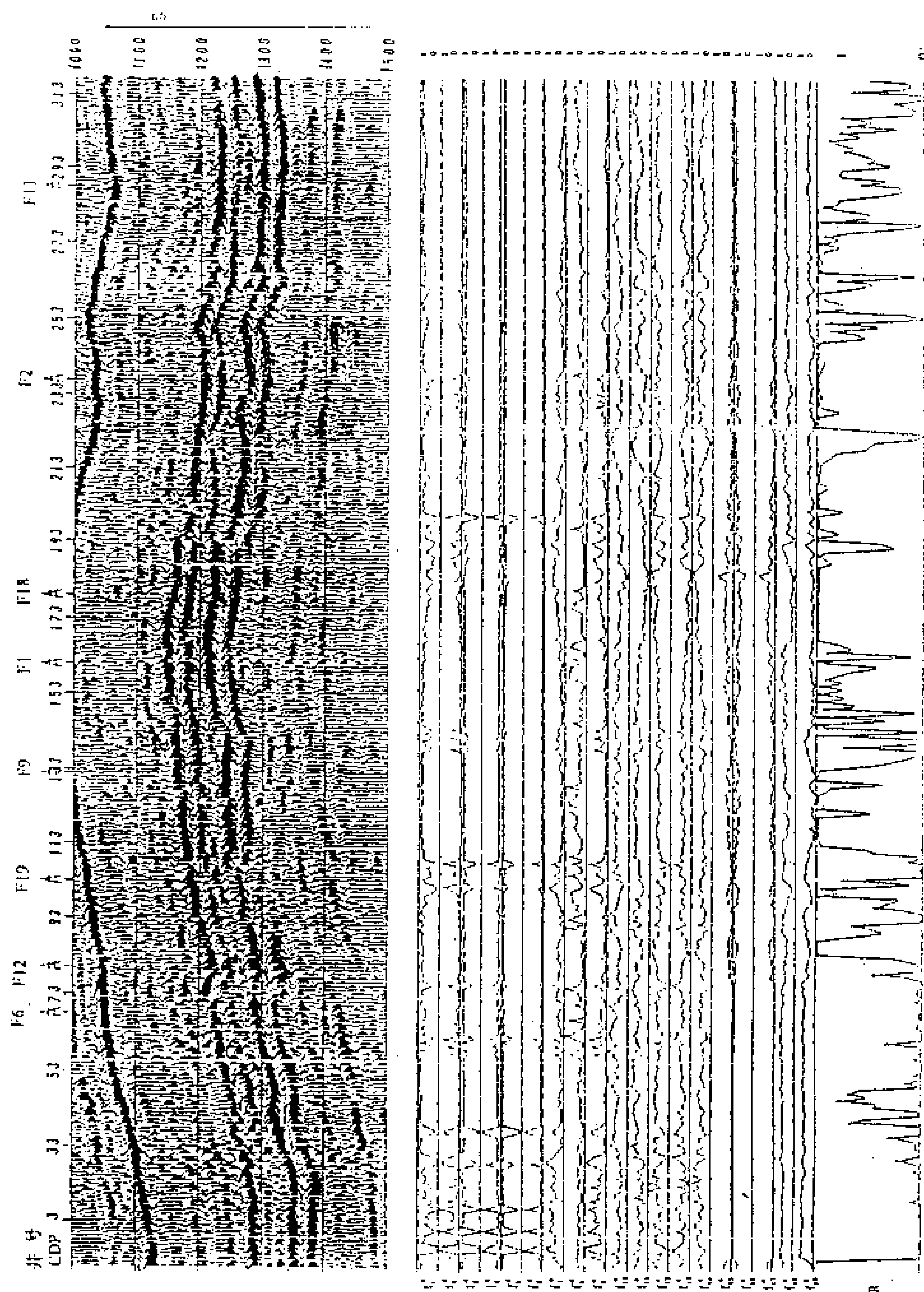


图9.5.4 含气地层剖面TDNN识别结果

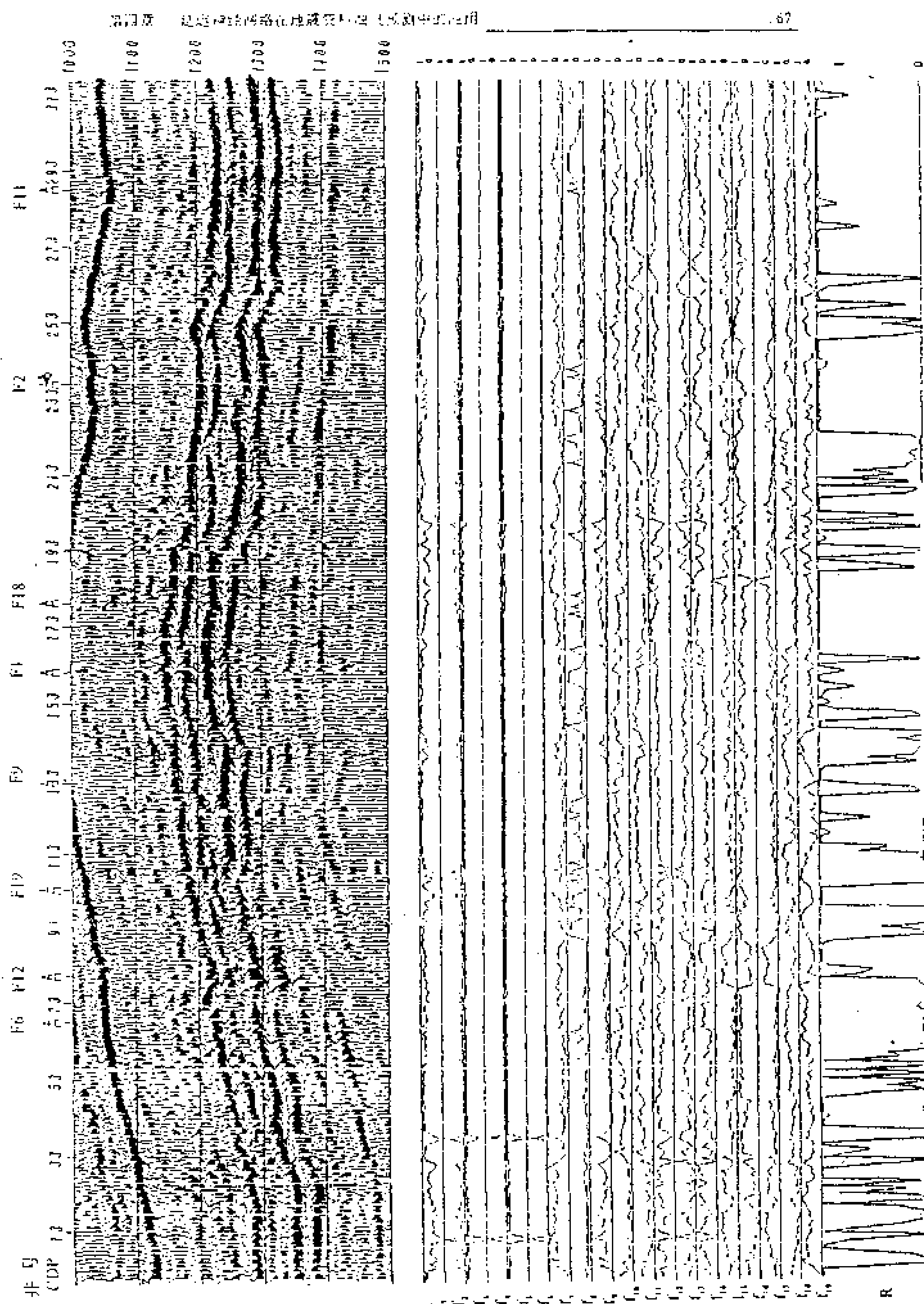


图 9.5.5　含气地层剖面 BPNN 识别结果

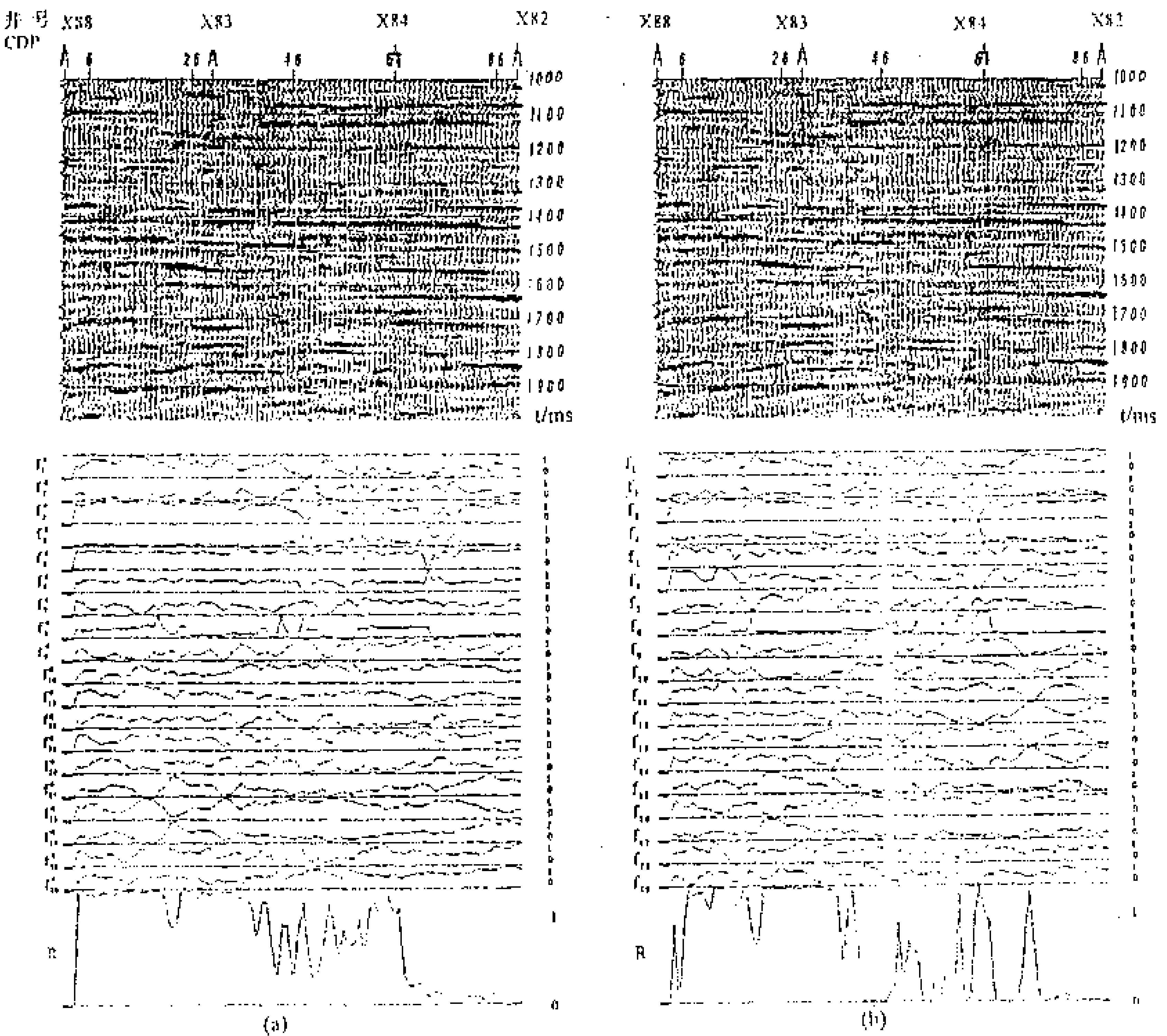


图 9.5.6　含油地层剖面两种网络识别结果

(a) TDNN (b) BP

后，大量的物理信息损失了。严格地说，要用地震资料直接寻找与地层含油气性的关系，基础资料应建立在叠前记录上，这将是进一步努力的目标。

9.6 延迟神经网络模型测井资料水淹层参数计算方法

测井资料的计算机解释，已发展了以二维交会图为基础的常规解释方法，优化解释方法(Mayer et al.,1980)等。以中子-密度组合为主的解释方法，其计算过程通常是一步一步地模仿手工解释步骤。在地层不太复杂，精度要求不高的情况下，通常能得到较满意的结果。在地层情况复杂，精度要求较高，这种方法就不适应了。80年代初发展起来的优化解释方法，应用最优化原理寻找测井响应方程的最优解。由于能利用更多的测井资料，实现高维的交会，故较二维的交会能适应于复杂的地层。但是，优化解释方法的效果好坏还取决于：1，测井响应方程的建立；2，响应方程中地层参数的选取。通常建立的测井响应方程是对复杂地层的一个简化，近似。在很多情况下，还存在反映地层特性的影响测井值的隐变量未考虑到方程中的问题。此外，优化解释方法中众多地层参数的选取也限制了该方法的应用。上述两种方法应用到水驱油层的解释问题时，由于难于求准地层水电阻率，不易消除泥质含量对电阻率的影响等原因使得解释效果都不太理想。近几年发展起来的人工神经网络技术，为解决这类复杂地质体的评价问题提供了一条途径。神经网络应用于地质体勘探信息的评价问题大致可以分为两个方面：一方面是应用神经网络的模式识别能力做定性评价。如测井岩性识别(Rorgers et al.,1992)，进行成矿预测(刘瑞林,1992)等。另一方面是应用神经网络的非线性逼近能力(Hech-Nielson,1989)进行参数估计。如用BP神经网络建立孔隙度，渗透率、视颗粒密度的计算模型(Baldwin,1989;Rorgers etal,1991)等。然而，在这些神经网络参数评价方法中，仍局限于点对点的建模计算，不能考虑上下围岩对于测井响应的影响。下面给出基于延迟神经网络模型的测井水淹层参数计算方法。与点对点的网络方法不同，在网络的学习和计算过程中，同时自动考虑了上下围岩的影响，从而较好地解决了测井资料解释中地层厚度自适应校正和地层参数计算同时进行的问题。对河南油田某断块50口井的资料计算表明，这种方法具有良好的效果。

9.6.1 原理与方法

测井仪器受分辨率的限制，某一深度的测量值 $X_i(d)$，是包含上下围岩物性的综合响应。反过来说，深度为 $d \pm \Delta l$ 的测井值 $X_i(d \pm \Delta l)$ 也包含有深度 d 点地层物理性质的影响。不同的测井方法，影响各不相同。在地层非均匀的情况下，这种影响尤为明显。取芯分析的岩石物性参数，是对一小块样品进行的。分析出来的参数是某一深度点的局部值，其纵向分辨率为样品的尺度。测井资料要与取芯分析的参数建立关系，就必须考虑这两者之间的匹配问题。图板校正方法虽然可以消除部分厚度的影响，但方法没有自适应性。

设深度 d 经预处理后的测井值为 $X_i(d)(i=1,2,\cdots,m)$ m 为测井方法数，该深度点的岩心分析值为 $Y_i(d)$。深度 d 上部的测井值为 $X_i(d-l\Delta),(l=1,2,\cdots,K)$，$\Delta$ 为采样间隔。为了考虑深度上部岩层的影响，就要使 $X_i(d-l\Delta)$ 参与网络的标定和计算。同样，为了考虑深度 d 下部岩层的影响，就要使 $X_i(d+l\Delta)$ 参与网络的标定和计算。简单的考虑方法是把这些测井值都输入一个前馈网络中进行计算。但这样做有局限：网络输入层节点数在考虑

的厚度范围内(例如考虑0.5米的范围,按每米8个采样点,5条曲线就有 $5\times5=25$ 个输入节点)变得很大;结果是网络的连接权数目增多。在样本数不多的情况下(例如100个左右)使网络难于从标定的例子中归纳出计算规律。此外,也不能使网络自动考虑测井值随深度的变化。

延迟神经网络模型能避开上述局限。即既考虑测井值随深度的变化,而网络的连接权数目又不大。例如,取网络的延迟数为2,网络中间节点数为1,则网络的总连接权数为 $5\times(2+2)=20$。因网络延迟是在一个方向进行的,只能考虑上围岩或下围岩的影响。为了同时考虑当前深度两边围岩层的影响。采用的方法是对每一深度点取两个顺序样本:一个顺序样本表达上围岩的影响,一个样本表达下围岩的影响。网络通过标定,就自动寻找出考虑围岩影响的地层参数计算方法。

设 $(X_1^t,\cdots,X_m^t),(t=0,1,2,\cdots,L)$ 为归一化的测井值,其中 L 为以当前深度点为起点向上或向下取的点数,m 为测井曲线的条数。$Xi(t)$ 为网络在深度 t 节点 j 的输出(对于输入节点,$X_j(t)=f_j^t$),$\mathrm{net}_i(t)$ 为当前网络节点 I 的总输入。

$$\mathrm{net}_i(t)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=1}^{i-1}W_{ij}^{(k)}X_j(t-k) \quad (9.6.1)$$

$$X_i(t)=O_i(t)=f(\mathrm{net}_i(t)) \quad (9.6.2)$$

$$(i=m+1,m+2,\cdots,N+n)$$

式中 K 为网络的延迟数,$W_{ij}^{(k)}$ 为网络延迟 $K(K=0,1,\cdots,K)$ 的连接权,$N-m$ 为中间层的节点数,n 为输出层节点数。对于孔隙度,饱和度计算问题,网络节点的传输函数仍采用S型函数。

设对于测井值串 P 网络对于当前深度点测井信息网络变换的输出为 O_β^L,网络要求的输出为 $Y_\beta^L(\beta=1,2,\cdots,n)$,其误差平方和为

$$E_p=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n}(O_\beta^L-Y_\beta^L)^2 \quad (9.6.3)$$

式中 Y_β^L 对应于孔隙度值或饱和度值。利用(9.6.1)式和(9.6.3)式可以得到相应连接权的迭代公式,如前面的讨论。计算时按(9.6.1)式。

9.6.2 应用

我们应用上述网络模型处理了河南油田某断块50口井的单井资料。资料处理分如下几个步骤进行。

1. 网络训练样本集的选取

应用神经网络模型求解水淹层参数,虽然不需要给定具体的物理和数学模型,但网络训练样本集的选取对网络的解释效果起关键作用。在这个应用中,我们选取样本的原则是样本的代表性和有效性。代表性要求选取的样品分析值的范围与该区块的物性参数的范围一致。例如,该断块地层束缚水饱和度大致在20%~35%。故样本集中束缚水饱和度这个参数也应在这个范围内均匀取值。有效性要求样本的个数相以于网络连接权数目的3~5倍。使之符合一般统计建模要求。测井资料应选取对地层水电阻率敏感的测井序列,因资料条件的限制仅用了SP,GR,AC,Rxo,Rt5条曲线。

2. 测井资料标准化,归一化

一个区块的资料,很难保证是用同一类仪器,相同刻度标准,统一的操作方式进行测量

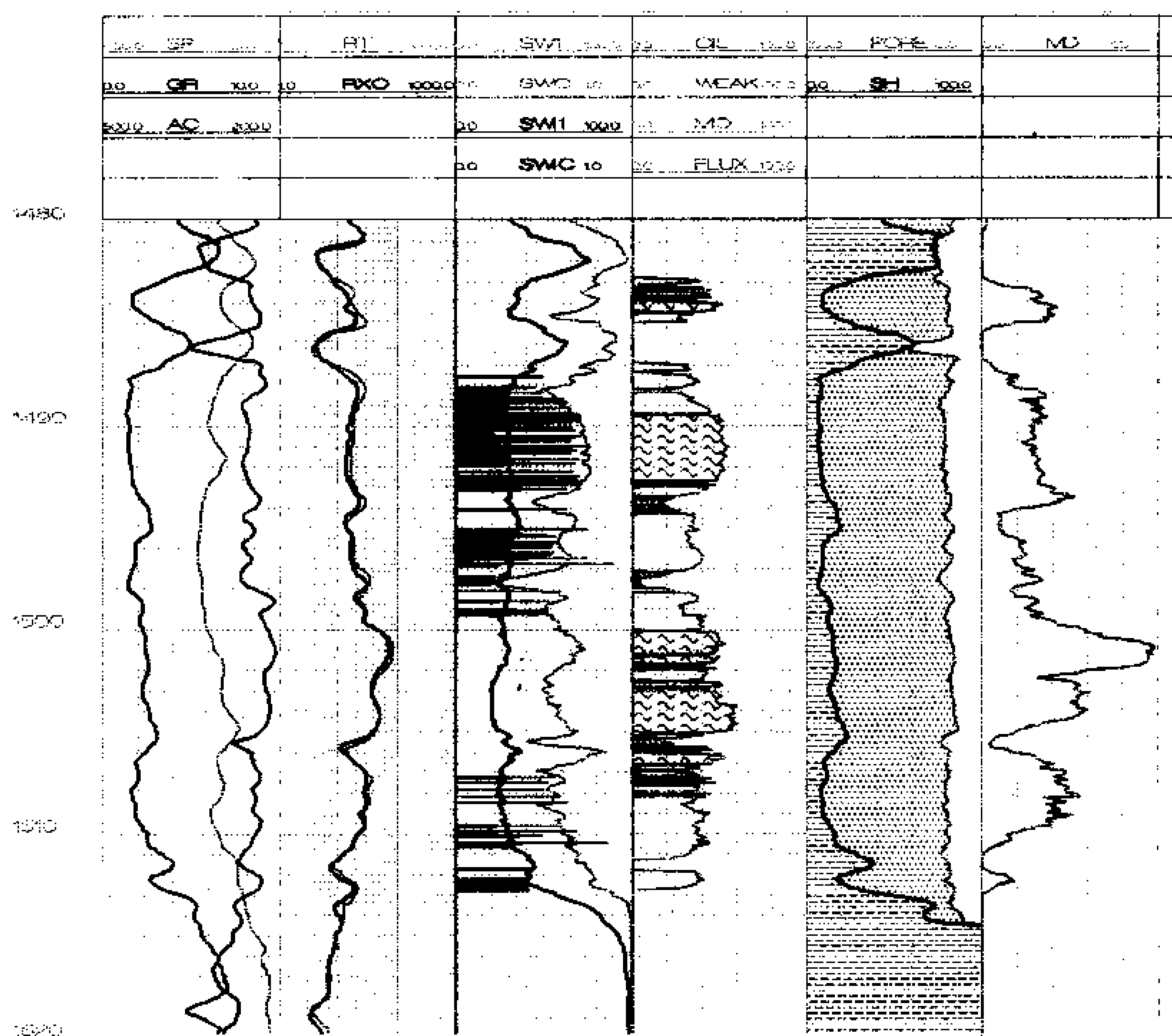


图 9.6.1　取芯井网络训练计算结果

的。故各单井测井数据必存在刻度因数为主的误差。对测井资料标准化，可将这些非地质因数校正到一个水平。我们采用均值-方差方法进行标准化。归一化处理则是把测井数据都统一到 0～1 之间，以便网络的训练和计算。

3. 网络的训练

如上所述，应用网络方法进行测井参数解释，是通过样本集对网络进行训练来获得多测井信息与地层参数之间的非线性计算关系。我们从 J6 井Ⅱ油组和Ⅳ油组取心分析的样本中挑选出 110 个不同深度点的样本。对每个样本点，按其深度，根据延迟网络的要求取出两个多维测井值串。一个串对应该深度点上部的测井数据，一个对应该深度点下部的测井数据。对孔隙度 ϕ 计算，用测井资料 SP，GR，AC 和相应深度的取心分析孔隙度值。训练一个延迟网络表达式。考虑到水饱和度 S_w 和束缚水饱和度 S_{wi} 关系密切，且有 $S_w \geqslant S_{wi}$。我们把这两个参数的计算表达在一个网络中。所用的测井信息为 SP，GR，AC，Rxo，Rt。此时，网络的输出端 $n=2$。实际应用表明，按这种方法训练网络，当网络通过例子的"学习"，网络实际上也"找到"了 $S_w \geqslant S_{wi}$。对 110 个深度点的孔隙度样本，计算孔隙度的网络约经 7500 次

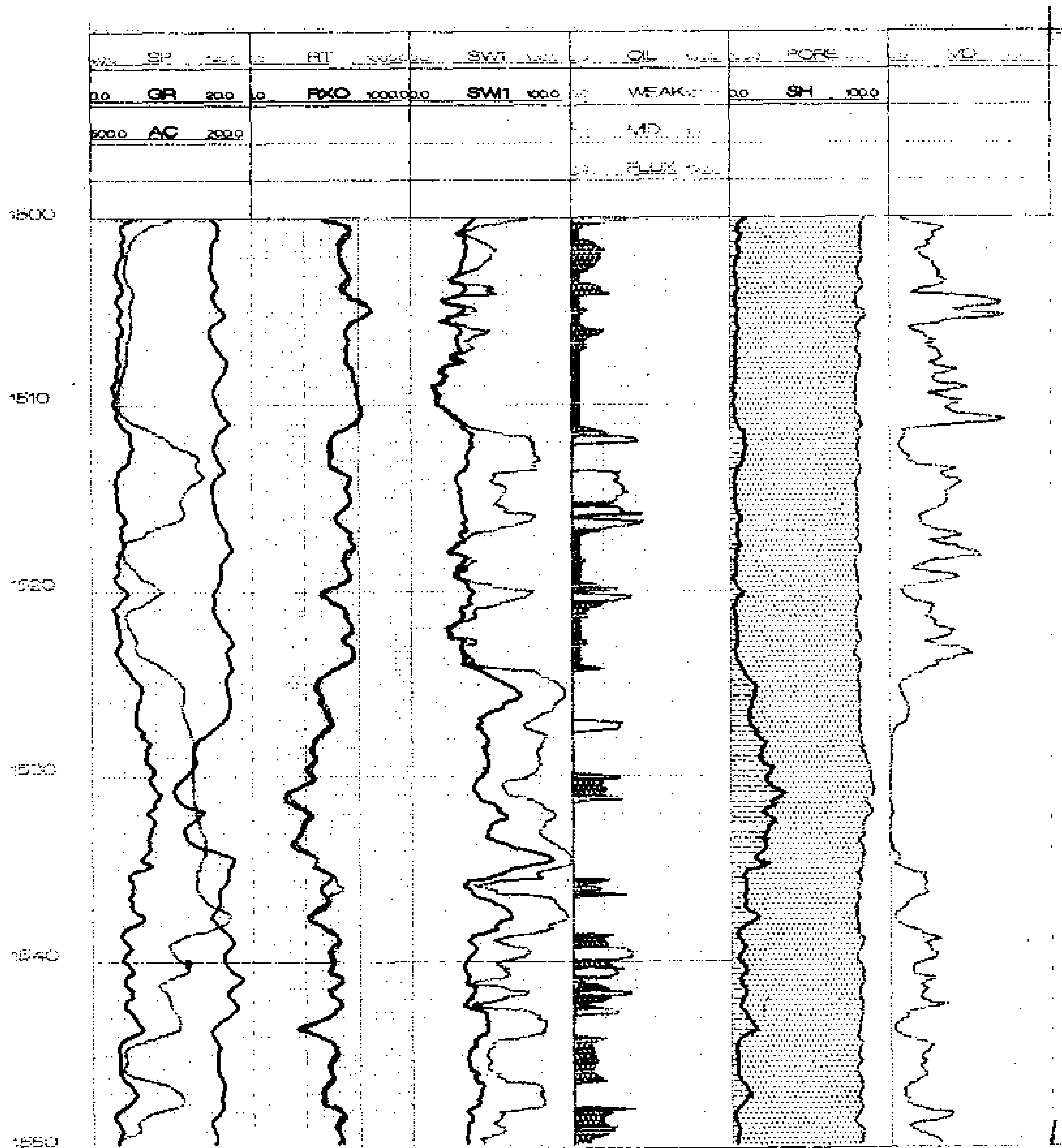


图 9.6.2　未取芯井时间延迟网络计算结果

迭代即收敛。计算饱和度的网络约经 15000～20000 次迭代,网络的输出与实际值的相对误差达到 3～7%。网络训练井的结果如图 9.6.1 所示,未取心井计算的例子如图 9.6.2 所示。对延迟网络方法中的网络延迟数 K 和样本串长度 L,进行的试验表明,对每米 8 个采样点的测井资料,L 取 4 或 5,K 取 2 较合适。这与大多数测井仪器的纵向分辨率为 0.5m 左右是一致的。

4. 资料处理

我们用训练好的网络处理了 50 口河南油田某断块Ⅱ油组注水开发不同时期的测井资料。对已有试油资料的 15 口井中 54 个单层进行了统计。其中完全符合的有 41 层,有 7 层

与试油结果不符，基本符合但不完全一致的有3层。另外一些井尚需试油，投产资料进一步验证。

值得指出的是，水躯油层解释结果的正确性，用试油与投产结果印证，不完全符合水淹层的客观性。由于油层水淹后，地层水具有动态特性，如果测井时间到投产时间相差很长，解释结论与试油结论可能不同。对于方法本身的问题是：训练样本的代表性，分析结果的可靠等。此外，因网络的训练采用梯度方法，考虑到可能存在局部小问题，我们采用从不同的小随机值开始训练的办法以避开此问题。通过一个区块的研究，我们得到如下认识：

(1) 水驱油层的神经网络解释方法其突出优点是网络建立的测井信息与地层参数之间的非线性关系更符合油层水淹后测井资料与油层参数之间的客观联系。避开了油层水淹后，混合水电阻率求不准的问题。用这方法进行参数解释，测井信息与油层参数之间的复杂关系不需要具体的数学物理模型描述，而只需要合适的样本集对网络进行训练来获得解释模型。

(2) 用带有延迟项来表达测井信息与油层参数之间的关系较之通常的BP网络模型有优点。可以克服一般BP网络的不足。延迟神经网络模型通过标定可以自动考虑上下围岩的影响进行参数计算。

(3) 对南阳油田一块实际资料的处理表明延迟网络模型用于水淹层参数解释效果良好。如果能完善网络训练样本的代表性，同时增加对地层水电阻率敏感的测井序列，可望进一步提高解释精度。

9.7 时间延迟神经网络模型地震井间波阻抗估计

层状介质的一次波通常用线性褶积模型表示

$$s_t = r_t * w_t = \sum_{k=0}^{N} w_k r_{t-k} \tag{9.7.1}$$

式中 s_t 为波形信号，w_t 为子波，r_t 为反射系数。为了直接从(9.7.1)式求出反射系数，进而求出波阻抗，已发展了多种反褶积方法(李庆中，1993)。方程(9.7.1)有两个未知数，是欠定方程，具有多解性。减少多解性的不同途径，就引出了不同的反褶积方法。在这些反褶积方法中一类是先求子波，再求反射系数；一类是对子波和反射系数作出适当的假设后再进行估计或迭代。前者的困难在于子波是未知的，实际上我们得不到子波或者得不到确切的子波；后者的效果取决于假设的合理性。实际上，褶积模型本身是对实际介质波传播过程的简化。再在这些简化假设下对反射系数或子波作进一步的假设，其适应范围就很窄了。另外，对于这种欠定方程的求解，加上充分的约束条件也是一种减少多解性的途径。从(9.7.1)式可以看出，信号 s_t 受一个子波宽度的反射系数的影响。反过来，r_j 也要影响一个子波宽度的波形。

$$r_j = r_j(s_j, s_{j+1}, \cdots, s_{j+N}) \tag{9.7.2}$$

N 为子波宽度。由子波和反射系数的关系：

$$Z_{i+1} = \frac{(1+r_i)}{(1-r_i)} Z_i = \frac{1 + r_i(s_i, s_{i+1}, \cdots, s_{i+N})}{1 - r_i(s_i, s_{i+1}, \cdots, s_{i+N})} Z_i \tag{9.7.3}$$

可以看出，波阻抗与地震波形之间是一个非线性递推关系。

下面给出一种基于延迟神经网络模型的波阻抗计算方法。在此方法中,先根据井旁道和井中波阻抗值,通过对延迟神经网络模型进行训练来逼近(9.7.3)式,然后再用这个延迟神经网络模型表达式的递推关系式计算剖面上其它道的波阻抗。实际试验表明,这是一种可行的方法。

时间延迟神经网络模型的延迟项的项数是对子波宽度而言的。一般的 BP 网络只能实现 $R^n -> R^m$ 的逼近。对于这种递推式的逼近则要加上延迟项。我们采用的方法是将一个子波宽度的延迟项及相应时间点的波阻抗估值馈进延迟一个子波宽度的时间延迟神经网络。设在时间 i 点井中波阻抗的估值为 Z_i(双程旅行时采样)网络对波形输入依次延迟 N 次后的实际输出为 $\hat{Z}_{i+N}$,两者误差平方和为

$$E = \sum_{i=1}^{p} (\hat{Z}_{i+N} - Z_i)^2 \tag{9.7.4}$$

式中 p 为相应井的时间采样点数。据公式(9.7.4)可以得到网络连接权的适应公式。当满足

$$e_{\max} = \underset{\{l=1,\cdots,k\}}{\mathrm{Max}} \underset{\{i=1,\cdots,p\}}{\mathrm{Max}} |\hat{Z}_{i+N} - Z_i| < \varepsilon \tag{9.7.5}$$

时,对井旁道的标定结束。式中 k 为井旁道的道数。网络通过井旁道的标定就得到了(9.7.3)式的一个近似表达式,此时网络可以用于其它道波阻抗的计算。

在实际应用中,对于储层追踪等问题,不必计算整个剖面的波阻抗,而只要考虑目的层有关的一段剖面,通常可以从一个特定的标志层开始。

我们用此方法对理论记录和实际资料进行了试验。理论记录是含层间多次波的自激自收记录,主频为 40Hz,2ms 采样,子波宽度取 40 个采样点,模型有 20 个层位,模型转换为双层旅行时后有 120 个时间样点。在已知波阻抗和波形的条件下,考察网络训练的收敛性。经 2000 多次迭代,对于每个采样点,网络实际输出与模型的相对误差小于 5%,这表明用一个子波宽度延迟网络模型可以表达波阻抗与波形之间的递推式。实际资料是南阳油田的连井线,资料为 H_2 段下面的一段剖面,通过两口井的约束,计算井间波阻抗。延迟网络通过井中波阻抗的标定实际上实现了一种常相位延迟的非线性滤波器。当井间没有断层时,计算出来的剖面可以反映井间砂体厚度的变化。

第9章 参考文献

1. Aminzadeh, F., Pattern Recognition & Image Processing, Geophysics Press Limited, 1987(李衍达,阎平凡等译,模式识别与图像处理,北京:石油工业出版社,1991)

2. [日]安居院猛等著. 周迪伟等译. 计算机语音处理. 国防工业出版社,1987

3. Baldwin, J. L., et al., Computer Emulation of Human Mwntal Processes: Application of Neural Networks Simulator to Problem in Well Log Interpretation, SPE 19619, 1989

4. Bios, P., Autoregressive pattern recognition applied to delimitation of oil and gas reserviors, Geophysical Prospecting, Vol.28, 1980, p572-591

5. Bios, P., Determination of the nature of seismic reserviors by use of pattern recognition algorithm with prior Learning, Geophysical prospecting, Vol.29, 1981, p687-701

6. Bios, P., Some application of pattern recognition to oil and gas exploration, IEEE trans. on GE21, No.4, 1983, p416-426

7. Chen,H., Wu,X., et al., Relaxation in condensed matter: a fractal time model, J. Phys., C: Solid State Phys., Vol.19, 1986, pL499-503
8. Dayhoff, J.E., Neural Networks Architecture: an introduction, New York: Van Nostrand Reinhold, 1990, p2-6
9. Durbin, J., Efficient estimation of parameters in moving-average models, Biomatrika, Vol.46, 1959, p306-316
10. Eberhart, R.C., and Dobbins, R.W., Neural Networks PC Tools, San Diego: Acadmic Press Inc., 1990
11. Foster, D.J., Mosher, C.C., Wavelet transform methods for geophysical application, in 64th SEG meeting expanded abstracts, 1994
12. Hecht-Nielsen, R., Theory of the backpropagation neural network, IJCNN, 1989, Vol. I, p593-605
13. Huang, K.Y., Fu, K.S., Syntactic pattern recognition for the classification of Richer wavelet, Geophysics, Vol.50, 1985, p1548-1555
14. Huang, K.Y., Fu, K.S., Syntactic pattern recognition of bright spots, Pattern Recognition, Vol.18, 1985, p421-428
15. Khanna, T., Fundations of Neural Networks, New York: Addison-Wesly Publishing Co., 1990
16. Kohonen, T, the self-organizing maps, Proc. of IEEE, Vol.78, No.9, 1990, p1464-1480
17. Kohonen, T., Self-organizined formation of topologically correct feature maps, Biol. Cybern., Vol.43, 1982, p49-59
18. Kuffer, S.W., Nicholls, J.G. 等著,张人骥,潘其丽译. 神经生物学——从神经元到大脑,北京:北京大学出版社,1991,p7-12
19. Lippmann, R.P., An introduction to computing with neural nets, IEEE ASSP Mag., Vol.4, 1987, p4-22
20. 李庆忠. 走向精确勘探的道路. 北京:石油工业出版社,1993
21. 刘瑞林. 用神经网络学习识别化探物探数据. 地质与勘探,Vol.28,No.2,1992
22. Liu, R.L., Zhou, Ch.D et al., Lithofacies sequence recognition from well logs using time-delay neural networks, 33rd SPWLA, Oklahoma, 1992
23. 刘瑞林等. 用神经网络建立孔隙度预测模型. 江汉石油学院学报,Vol.15,No.1,1993
24. 刘瑞林,华运隆等. 序神经网络直接识别沉积相. 地球物理学会年刊,地震出版社,1994
25. 刘瑞林,马在田. 人工神经网络在油气预测和评价方面的研究现状. 地球物理学进展,Vol.10,No.2,1995a,p75-84
26. 刘瑞林,马在田,蒋晓光. 时间延迟神经网络地震油气预测方法. 地球物理学会年刊,石油工业出版社,1995b
27. 牛毓荃等译. 地震地层学. 北京:石油工业出版社,1980
28. 马在田. 地震参数连续估计与波动方程反问题. 地球物理学报,Vol.29,No.1,1986,p91-102
29. 马正. 应用自然电位曲线形态解释沉积环境. 石油与天然气地质,Vol.3,No.1,1982,p25-39
30. Mayer, C., and Sibbit, A., Global, a new approach to computer-processed log interpretation, SPE 9341, 1980
31. McCormack, M.D., Neural computing in geophysics, The Leading Edge of Exploration, Vol.10, No.1, 1991, p11-15
32. Minsky, M., and Papert, S., Perceptrons, MIT Press, 1969
33. Ngai, K.L., Jonscher, A.K., et al., Nature, Vol.277, 1979, p185
34. Piche, S.W., Steepest descent algorithms for neural networks controllers and filters, IEEE Trans. on NN. Vol.5, No.2, 1994, p198-212
35. Pirson, S.J., Geological well log anaysis, Houston: Gulfpublishing company, 1974
36. 钱绍新. 应用模式识别方法预测油气储层. 地球物理学报,Vol.35,1992,p630-636
37. 秦前清,杨宗凯. 实用小波分析. 西安电子科大出版社,1994
38. Rogers, S.T., Fang, J.H., et al., Determination of litholoy from well logs using a neural networks, AAPG, Vol.70, No.5, 1992, p731-739
39. Rumelhart, D.E., Hinton., G.E. and Williams, R.J., Learning interal reprezentation by error propagation, in Parallel Distribution Processing, Vol.1, MIT Press, 1986, p318-361

40. Simpson, P. K., Artifitical Neural System-Fundations, Paradigms, Applications and Implimentation New York: Pergamom Press, 1990

Sinvhal, A., Khattri. K., Application of seismic reflection data to discriminate subsurface lithostratigraphy, Geophysics, Vol, 48, 1983, P1498—1513

41. Sinvhal, A., Khattri, K. et al., seismic indicators of stratigraphy, Geophysics, Vol. 49, 1984, p1196-1212

42. Tou, J. T., Gonzalez, R. C., Pattern Recognition Principles, Addison-Wesley Publishing Co., 1974, p159-169

43. Waibel, A., Hanzawa, T., Hinton, G. et al., Phoneme recognition using time-delay neural networks, IEEE Trans. on ASSP, 37, 1989, p328-339

44. Werbos, P. J., The Root of Backpropagation: from ordered derivatives to neural networks and political forcasting, New rork: John Weley & Sons., 1994

45. Werbos, P. J., Maximizing long-term gas industry profits in two minutes in Lotus using neural networks, IEEE Trans. on SMC, Vol. 19, No. 2, 1989, p315-333

46. Werbos, P. J. Backpropagation throgh time: What it does and how to do it, Proceeding of IEEE, Vol. 78, No. 10, 1990, p1550-1560

47. Widrow, B., and Lehr, M. A., 30 years of adaptive neural networks: perceptorn, madaline and backpropagation, Proc. of IEEE, Vol. 78, No. 9, 1994, p1415-1441

48. 王仁铎．利用测井曲线形态定量判别沉积相．地球科学, Vol. 16, No. 3, 1991, p303-309

49. 王硕儒等．模糊综合判别法及其海相碳酸岩相识别．石油学报, Vol. 13, No. 1, 1992

50. Wickerhause, M. V., Adapted Wavelet Analysis: from theory to software, Wellesley, MA, 1994

51. Wiener, J. M., et al, Prediccating Carbonate Permeabilities from wireline Logs Using a BackPropagation Neural Networks, in 61st SEG meeting Expanded Abstracts, 1991

52. 张学工，李衍达．用神经网络分析地震道横向变化．地球物理学会年刊，地震出版社，1992

53. 朱广生，刘瑞林，王庭阁．神经网络在油气横向预测和地震道编辑中的应用．石油物探, Vol. 33, No. 1, 1994, p1-9

第 10 章　非线性全局寻优算法及应用

10.1　前言

地球物理学是一门观测科学，它的最终目的是依据观测结果，推测、反演、解释地下介质的构造及物理性质，进而研究地球的演化与发展历史。

在应用地震学中，我们在地面或井中激发声波或其它机械波，在地面或井中观测由于震源激发而引起的介质振动。描述上述过程的数学模型通常用声波或弹性波动方程。当然还可以考虑用更复杂的数学模型，比如介质各向异性情况下的弹性波方程、双相介质情况下的波动方程。但用什么样的方程来描述，视具体情况而定，并非愈复杂愈好，这样一个描述波在介质中传播的过程称正演过程。

根据观测到的数据，借助于正问题的数学模型，来求解地下介质的几何分布或物性参数分布，这个过程在数学上称反演过程。反演过程构成的数学物理问题称反问题。求解反问题的方法称反演方法。

在应用地震学中，常用的反演方法分为两类，基于算子的反演方法和基于模型的反演方法。典型的算子类反演方法是 Born 近似反演方法；典型的基于模型的反演方法是线性或非线性的迭代优化反演方法。基于算子的反演方法数学推演完美，但很难适应背景介质剧烈变化的情况；基于模型的反演，似乎正问题能描述的情况它都可以考虑，但高昂的计算代价，噪音的存在、局部极值等问题使得该类反演方法距实际应用还有一定的距离。

反演问题是地球物理学的核心问题，对它的研究从一维发展到二维，从声波介质发展到弹性介质(甚至双相介质)。目前的趋势是从线性方法发展到非线性方法。在地球物理反问题中用得最多的非线性算法是全局寻优算法，包括模拟退火算法和遗传算法。本章我们主要讨论上述两种非线性全局寻优算法。为此，我们首先讨论线性反演方法，然后分两节分别讨论模拟退火算法和遗传算法。最后介召两种算法在应用地震学中的应用情况。

10.2　非线性寻优算法与地球物理数据反演

之所以把非线性寻优算法引入地球物理领域中来，原因在于地球物理问题从根本上而言是个非线性反问题。譬如，应用地震学中的静校正问题，速度分析问题、声学或弹性介质参数反演问题，及非地震勘探领域中的势扬反演问题等等，这些反问题用线性方法求解都存在一定的缺陷。

地球物理反演中的线性方法是指对描述正问题的数学模型进行线性化，忽略二阶以上的非线性项，仅保留线性主部，利用该线性化的模型进行反演运算。具体可描述为：假设地球物理某一正问题可抽象地描述为

$$G = F(M) \tag{10.2.1}$$

其中　G——正演结果；

F——为正演算子；

M——为介质模型。

对(10.2.1)式进行 Taylor 展开，得到

$$G(M_0+\Delta M)=F(M_0)+\frac{\partial F}{\partial m_i}\cdot\Delta m_i+\frac{\partial^2 F}{\partial m_i^2}\cdot(\Delta m_i)^2 +\cdots\cdots \tag{10.2.2}$$

忽略二阶以上的非线性项，得

$$G(M_0+\Delta M)-F(M_0)=\frac{\partial F}{\partial m_i}\cdot\Delta m_i \tag{10.2.3}$$

其中 $\frac{\partial F}{\partial m_i}$为 Frecht 微商；

$G(M_0+\Delta m)-F(M_0)$ 为场的余量；

ΔM 为介质参数的扰动；

M_0 为背景介质参数分布。

(10.2.3)式为一线性方程组，用常规的解线性方程组的方法可以求得 ΔM。

线性化方法的缺陷是明显的，它要求一个相当准确的背景介质模型。在实际地球物理问题中，背景介质模型很难选好，若背景介质模型选得距实际情况太远，(10.2.2)式和(10.2.3)式的展开及线性化过程是不成立的。因此求出的介质参数摄动量也不正确。

有人提出用逐次线性化的方法来改进上述线性化方法。但是背景介质参数分布选不好，逐次线性化方法不一定是收敛的，得到的反演结果常常无法解释。

非线性反演方法是指在选定正演数学模型的情况下，建立观测数据与正演合成数据的误差泛函，然后利用非线性最优化方法迭代求解极小化问题，得到介质参数分布。

假定建立误差泛函

$$E(M)=\sum_{i=1}^{N}(G_{\mathrm{cal}}(m_i)-D_{\mathrm{obs}})^2 \tag{10.2.4}$$

利用最优化方法求解(10.2.4)式规定的极小化问题可由如下定义描述：

定义 10.2.1：在可能的模型空间中，找到一个介质模型，它对应的一组介质参数，使得由(10.2.4)式定义的泛函误差值达到最小。

对于具体的反演问题，(10.2.4)式的定义略有差异。一般地，对介质参数本身变化及其梯度变化的约束均可反映在(10.2.4)中，结合其它约束条件可以构成约束最优化问题。

定义(10.2.4)式时，对正演模型 $G_{\mathrm{cal}}(m_i)$没做近似处理，它可以描述正演过程中的非线性效应，这是它优于线性方法的地方。但是在最优化方法求解该非线性反问题时，常规的优化方法一般而言需要一阶梯度，如最速下降法，共轭梯度法，变尺变法；有些需二阶梯度，如牛顿法。梯度值的计算，需对描述正问题的数学模型线性化，线性化过程会产生对背景介质模型的依赖，使得非线性优化过程变成依赖于局部梯度信息的方法。当初始值选定后，在梯度导引下，会达到一个局部极小点。但该局部极小值是否问题的解，非线性优化算法本身无法作出判断。

由于地球物理反问题中误差泛函都是复杂的多峰函数，靠常规的非线性优化算法，很难得到全局最优解。因此上述意义下的非线性反演算法，事实上是一个拟线性的反演方法。完整意义下的非线性反演方法应当是用非线性全局寻优算法来求解定义(10.2.1)规定的极

小化问题。

目前较为实用的非线性全局寻优方法包括模拟退火算法和遗传算法。这两类方法的共同之处在于;不是利用梯度信息导引进行模型空间的搜索,而是在一定规则的指导下随机搜索模型空间,达到全局寻优的目的。这就避开了由于梯度值计算而引入的局部线性化,使得算法的最终结果不依赖于初始值的选择。

模拟退火算法源于对固体退火过程的模拟。把固体加热至熔融状态,然后徐徐降温,最后会凝结成一块规整的晶体。固体在熔融状态时包含最大的内能,凝结成规整晶体时,包含的能量最小。模拟退火算法也是从误差能量较大的状态开始,使"温度"控制参数缓慢变化,利用 Metropolis 概率接受准则,使算法在模型空间中以一定的方式随机搜索,最后达到误差能量最低的状态。该状态对应的解即是全局最优解。

遗传算法模拟自然界中生物繁殖过程中的优胜劣汰过程。生物界的生存原则是优胜劣汰、适者生存。性状优异的分子存活下来,通过有性繁殖,进一步加强这种性状,使它们得到更大的发展。进化过程中通过变异增加多样性,以免造成某种生物群体一统天下的局面。生物界中一种生物占统治局面会破坏生物链,生物链的被破坏意味着占统治地位的生物群体开始走向灭亡。因此,变异是必不可少的进化过程,遗传算法就是模拟上述过程而产生的由选择算子、杂交算子和变异算子三个基本算子组成的全局寻优算法。它从一初始族出发,由选择算子选出性状好的父本,由杂交算子进行杂交运算,由变异算子执行变异运算,在一定概率规则控制下,随机搜索模型空间。一代代进化,使最终解族对应的误差泛函的值达到即定的要求。其中误差泛函的最小值对应的解可认为是要求的全局最优解。

10.3 模拟退火算法的理论与实现

10.3.1 引言

Kirkpatrick (1983)将退火思想引入组合优化领域,提出一种解大规模组合优化问题的有效算法——模拟退火算法(Simulated annealing algovichm)。模拟退火算法是一种 Monte Carlo 类优化技术,模拟了熔融的液体金属逐渐退火而冷凝成为一个规整晶体的过程,它采用 Metropolis 概率接受准则,用一组称为冷却进度表的参数控制算法的进程,使算法在多项式时间内给出问题的一个近似最优解。

固体退火过程的物理图像和统计性质是模拟退火算法的物理背景,Metropolis 接受准则使它避免落入局部极小点,冷却进度表的选择控制算法的有效实施。

自从 Kirkpatriek(1983)提出模拟退火算法以来,许多学者对它提出很多改进措施,产生了一系列改进的模拟退火算法,使模拟退火算法的收敛更快,对模型空间的搜索更全面。

10.3.2 模拟退火算法的物理背景及算法的描述

1. 退火过程的物理描述

固体的退火过程是先将金属固体加热至熔化,然后徐徐降温,使之冷凝成规则晶体的热力学过程。

在加热金属固体时,固体粒子的热运动不断增强,随着温度的升高,粒子与其平衡位置的偏离越来越大。当温度升至熔解温度后,固体熔解为液体,粒子排列从较为有序的结晶态

转变为无序的液态。该过程称为溶解。熔解过程的目的是消除系统中原先可能存在的非均匀状态,使随后进行的冷却过程以某一平衡态为始点。

熔解过程与系统的熵增过程相联系,系统能量也随温度升高而增大。熵增大,系统能量上升。

冷却时,液体粒子的热运动渐渐减弱,随着温度的徐徐降低,粒子运动渐趋有序。当温度降至结晶温度后,粒子运动变为围绕晶体格点的微小振动,液体冷凝为晶态的固体。该过程称为退火。

退火过程中,系统的熵逐渐减小,系统的能量也随温度降低减至最小。

冷却时的急剧降温,会引起淬火效应,即固体只能冷凝为非均匀的亚稳态。系统能量不会达到最小值。

退火过程总是缓慢进行是为了使系统在每一温度下都达到平衡态,最终达到系统的基态。在任一温度下达到平衡态需要一定的演化时间。应用于热平衡封闭系统的热力学定律——自由能减少定律保证了封闭系统向平衡态的转化。

自由能减少定律:对于与周围环境交换能量而温度保持不变的封闭系统,系统状态的自发变化总是朝着自由能减少的方向进行。当自由能达到最小值时,系统达到平衡态。

2. 退火过程的统计描述

系统的宏观状态是指系统的热力学状态。处于平衡态的系统用体积、温度、压强、总能量等宏观量来描述。系统的微观状态指系统的动力学状态,若系统由 N 个粒子组成,每个粒子的自由度为 S,则系统的微观状态可用 N_s 个广义坐标与 N_s 个广义动量组成的 $2N_s$ 维的相空间来描述。相空间中的一点代表系统的一个动力学状态,即系统的一个微观状态。

平衡态是系统的一种宏观状态,可以对应各种不同的微观状态。

统计物理十分关心的问题是:具有一定宏观状态的系统处于某一微观状态或某一微观状态附近的概率是多少。

Gibbs 引进的系综概念可以形象地表示出系统处于某一微观状态或某一微观状态附近的概率。系综是大量系统的集合,这些系统具有相同的粒子数、相同的化学性质和相同的宏观分布,其微观状态按各自的统计规律分布:

微正则系综是由这样一些系统组成,它们具有相同的粒子数 N 及确定的体积 V,系统与外界的联系很微弱,使得系统的能量又能在 $E \to E + \Delta E$ 之间变动,因而系统基本上是孤立的。微正则系综描述了孤立系统的统计性质,即:系统的状态只能处于限定的能量区间 $E \to E + \Delta E$ 之间,处在这个能量区间的任一微观状态出现的概率相等,而能量区间外的任一微观状态都不可能出现。

对处于平衡态的孤立系统存在下述等概率原理:对于处在平衡态的孤立系统,处于每一微观态的概率是相等的。

利用微正则系综的微观态等概率分布原理,可以导出正则系综的微观态概率分布。正则系综由这样一些系统组成:它们具有相同的粒子数 N 和相同的体积 V,系统与一恒温热源相接而平衡。

推导可知,正则系综的微观态的概率分布遵循 Gibbs 概率分布:

$$P_i = \frac{1}{z}\exp\left(\frac{-z_i}{kT}\right) \tag{10.3.1}$$

其中　$z=\sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)$ 为系统的配分函数；

　　T　为绝对温度；

　　k　为 Boltzmann 常数；

　　$\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)$　为 Boltzmann 因子。

(10.3.1)式称为 Gibbs 正则分布。它给出温度 T 时固体处于能量为 E_i 的微观状态 i 的概率。

退火过程中，每一温度下，达到平衡状态后，系统任一微观态出现的概率都等于其对应的由 Gibbs 正则分布规定的概率。

3. Metropolis 接受准则

从上述固体退火过程的物理分析可知，在降温过程中每一个温度点系统都达到平衡状态，退火过程才能最终达到系统的基态。

固体在恒温下达到热热平衡的过程可以用 Carlo 方法进行模拟，但由于 Monte Carlo 方法属于随机搜索方法，计算量太大。

根据物理系统倾向于能量较低的状态，而热运动又阻止它准确进入最近能量状态的现实，退火过程发展时，可以倾向于选择那些能量较低的状态，以便尽快地进入平衡态。

Metropolis(1953) 等提出重要性采样法如下，以粒子相对位置表征的初始状态 i 作为系统的当前状态，该状态的能量是 E_i。然后随机选取某粒子使其位移产生一随机微扰，得到一个新状态 j，新状态的能量是 E_j，若 $E_j < E_i$，则该状态作为重要状态。若 $E_j > E_i$，则考虑到热运动的影响，该新状态是否为重要状态，要依据系统处于该状态的概率来判断。由关于正则系综的微观态概率分布函数的讨论知，固体处于状态 i 和 j 的概率的比值等于相应的 Boltzmann 因子的此值，即

$$r=\exp\left(\frac{E_i-E_j}{kT}\right)\qquad r<1 \tag{10.3.2}$$

用随机数发生器产生一个[0,1]区间的随机数 ξ，若 $r>\xi$，则新状态 j 作为重要状态，否则舍弃。若新状态 j 是重要状态，以 j 取代 i 成为当前状态，否则仍以 i 为当前状态，再重复以上新状态的产生过程。在大量状态转移后，系统处于能量较低的平衡状态，系统状态的概率分布趋于 Gibbs 正则分布。

由(10.3.2)式可见，高温下可接受与当前状态能差较大的新状态为重要状态，而在低温时只能接受与当前状态能差较小的新状态为重要状态。最后，系统状态能量趋于一致，达到最小。

4. 模拟退火算法描述

模拟退火算法要模拟固体的退火过程，必须建立与描述固体退火过程的量的联系。

设最优化问题的一个解 i 及其目标函数 $f(i)$ 分别与固体系统的一个微观状态及其能量 E_i 等价。控制参数 t 相当于固体退火过程中的温度 T。对于控制参数 t 的每一取值，执行 Metropolis 算法，相当于固体在某一恒定温度下趋于热平衡的过程。即模拟退火算法从某个初始解出发，经过大量解的变换，得到给定控制参数值时最优化问题的相对最优解。然后减小控制参数 t 的值，重复执行 Metropolis 算法的过程，即可在控制参数 t 充分小时，最終求得

问题的全局最优解。

控制参数 t 的值必须缓慢衰减，确保每一个固定的 t，算法达到平衡态，才能最终达到整体最优解，相当于达到固体系统的基态，基态对应的能量是全局最小的。

模拟退火算法使用与 Metropolis 准则对应的转移概率：

$$P_t(i \Rightarrow j) = \begin{cases} 1 & \text{当 } f(j) \leqslant f(i) \text{ 时} \\ \exp\left(\dfrac{f(i) - f(j)}{t}\right) & \text{其它} \end{cases} \tag{10.3.3}$$

来确定是否接受从当前解 i 到新解 j 的转移。因此，模拟退火算法可视为递减控制参数 t 时 Metropolis 算法的迭代。

模拟退火算法按照 Metropolis 准则接受新解，因此除接受优化解外，还接受一定的恶化解。仅受优化解会使算法陷入局部极值的陷井；

开始时 t 值较大，Pt 也较大，可能接受较差的恶化解；随着 t 值的减小，因 P_t 也变小了，只能接受较好的恶化解。最后 t 值趋于零时，就不接受任何恶化解了。

模拟退火算法的流程可用如下伪码程序表示：

```
Procedure Simulated Annealing
begin
Initialize (i0, t0, h0)
k: =0
i: =i0
repeat
for l: = 1 to Lk do
Generate (j from Si)
if f(j)≤f(i) then i: =j
else
if exp((f(i)-f(j))/tk) > random[0,1) then i: =j
end;
k: = k + 1
calculate transform length(Lk)
calcalate control temperatere(tk)
until stop criterion
end;
```

其中，转移长度 L_k 表示温度一定时，达到平衡状态时，需进行的状态转移次数。

显然，模拟退火算法的收敛速度取决于参数 t_k 和 L_k 的选择

10.3.3 模拟退火算法的实现

模拟退火算法是一种实现简单、通用性很强的算法。它和极小化问题本身基本上没什么联系，只需误差函数的计算，不需梯度信息。因此它的应用范围很广。

模拟退火算法在实现过程中与其它非线性优化算法关注的问题基本相同，即：收敛性、

收敛速度和终止准则。上述问题在模拟退火算法中归结为冷却进度表,由它来控制算法的全部运行过程。

从前面的分析知,模拟退火算法是递减控制参数时 Metropolis 算法的迭代。每个 Metropolis 算法又执行有限步的状态转移,以达到平衡状态,保证算法的全局收敛。模拟退火算法的这种渐近收敛性态需一种控制算法进程的参数,保证它在有限时间的运行后返回一个近似全局最优解。否则完全与固体退火过程类比,每个温度下,系统都达到平衡状态,会需要很长的时间。因此,只能在最终解的质量与运算时间之间进行折衷。

定义(10.3.1):一个冷却进度表应当规定下述参数:

(1) 控制参数 t 的初值 t_0;

(2) 控制参数 t 的衰减函数;

(3) 控制参数 t 的终值 t_f;

(4) 状态转移的次数 L_k。

构造冷却进度表的核心的是使对于每一个 t_k,算法在经过 L_k 次状态转移后达到准平衡状态(而不是达到平衡状态)。

定义(10.3.2),设 L_k 是第 k 个 Markov 链的长度,t_k 是相应的第 k 个控制参数值。称模拟退火算法达到准平衡,若在第 k 个 Markov 链的 L_k 次变换后,解的概率分布 $\alpha(L_k, t_k)$充分逼近 $t = t_k$ 时的平稳分布 $q(t_k)$:

$$\forall_i \in S: \qquad q_i(t) = \frac{|S_i|}{N_0(t)}\exp\left(-\frac{f(i)}{t}\right)$$

其中:

$$N_0(t) = \sum_{j \in s} |S_j| \exp\left(-\frac{f(j)}{t}\right)$$

即:

$$\| \alpha(L_k, t_k) - q(t_k) \| < \epsilon$$

对任意小的正数 ϵ 成立。

理论描出:对于注意小的正数 ϵ,算法至少要进行解空间规模 $|S|$ 的平方次变换才能达到准平衡。实际计算中上述要求很难达到,只能作进一步的折衷。

Markov 链的长度以及控制参数的衰减函数必须选得在每个 Markov 链结束时,准平衡得以恢复。

冷却进度表的选择原则:解决算法的收敛性问题,调解最终解的质量和运算时间之间的矛盾。基本策略是折衷。最终解的质量与 CPU 时间消耗成反比关系,高的准平衡标准与 CPU 时间消耗成反比关系,因此需在矛盾关系中找到一个最佳值。

1. 控制参数 t 初值 t_0 的选择

基于"t 值只要选得充分大,就会立即达到准平衡"的观点,为使算法进程一开始就达到准平衡,应让初始接受率:

$$\chi_0 = \frac{\text{接受变换数}}{\text{提出变换数}} \approx 1 \tag{10.3.4}$$

由 Metropolis 准则, $\exp\left(-\frac{\Delta f}{t_0}\right) \approx 1$,可推知 t_0 应当很大

$$t_0 \approx -\frac{\Delta f}{\ln(0.9)} \tag{10.3.5}$$

经验表明:算法进程要在合理的时间内搜索尽可能大的解空间范围,需要尽可能大的接受概率,即需要较大的 t_0 值,过小的 t_0 值将导致质量很差的最终解,而使模拟退火算法丧失实用性,因为其初始接受率与准平衡要求相差甚远。事实上过小的 t_0 值限制了算法在解空间大范围搜索的能力,而局限于小范围内的寻优,这自然不会得到全局最优解。

但应注意:过大的 t_0 值又会导致过长的 CPU 时间。

2. 控制参数 t 终值 t_f 的选择

原则是既要确保算法收敛于某一近似解,又要使最终解具有一定的质量。

Johnson(1987)提出:因为算法收敛于最优解集是随控制参数 t 值的缓慢减小逐渐达到的,只有在制参数 t 的终值 t_f 充分小时,才可能得到高质量的最终解。因此 t_f 充分小可以作为终止准则。

Kirkpotrick(1982)指出:若在若干个相继的 *Markov* 链中解无任何变化,终止进程。

3. Markov 链长度(状态转移次数) L_k 的选取

Markov 链长度的选择原则是:在控制参数 t 的衰减函数已选定的前提下,L_k 应选得在控制参数 t 的每一取值上,算法进程的状态都能恢复到准平衡。

L_k 值给定算法进程在第 k 个 Markov 链中进行的状态变换数,有限序列 $\{L_k\}$ 规定了算法进程搜索的解空间范围。

4. 控制参数衰减函数的选取

一般地,要求控制参数 t 缓慢变化,衰减量应较小。在控制参数小衰减量的情况下,两个相继控制参数值 t_k 和 t_{k+1} 上的平稳分布是相逼近的,因此,若在 t_k 值上已达到准平衡,则可以期望在 t_k 衰减为 t_{k+1} 后,只进行少量的变换就足以恢复 t_{k+1} 值上的准平衡,因此可以选取较短的 Markov 链来缩短 CPU 时间,但是,小衰减量又导致算法进程迭代次数的增加(这样可以期望算法进程访问更多的邻域,搜索更大的解空间,返回高质量的解),使 CPU 时间增加。

常用的控制参数衰减函数为:

$$t_{k+1} = \alpha \cdot t_k, \qquad k = 0,1,2,\cdots \tag{10.3.6}$$

其中:α 是一个接近于 1 的常数,Kirkpatrick(1982),取 $\alpha = 0.95$。

综合上述,冷却进度表是模拟退火算法的重要组成部分,是成功应用的关键。它与邻域结构和新解产生器、接受准则的随机数产生器一起构成算法的三大支柱,在控制算法进程方面起主导作用。

一般地,只要取 t_0 充分大,控制参数 t 的衰减量足够小,就可以用短的 Markov 链缩短运行时间。但由于各参数之间相互影响,只有统一考虑才可得到最佳的冷却进度表。

10.3.4 模拟退火算法收敛性的简单说明

给定最优化问题(S,f),其中 S 代表模型空间,f 代表目标函数,且选择一个适当的邻域结构,则在固定 t 值时产生足够多的变换,用(10.3.3)式定义的转移接受概率后,模拟退火算法将找到一个解 $i \in S$ 的概率为:

$$P_t\{X=i\} \equiv q_i = \frac{1}{N_0(t)}\exp\left(-\frac{f(i)}{t}\right) \tag{10.3.7}$$

其中 X 是表示模拟退火算法所得当前解的随机变量，而

$$N_0(t) = \sum_{j\in S}\exp\left(-\frac{f(j)}{t}\right) \tag{10.3.8}$$

(10.3.7)式的概率分布称为平稳分布，等价于(10.3.1)定义的 Gibbs 正则分布，归一化因子 $N_0(t)$等价于封闭系统的配分函数 Z。

推论：给定最优化问题(S,f)和一个适当的邻域结构，并设平稳分布由(10.3.7)式给定，则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}P_t\{X(k)=i\} &= \lim_{t\to 0}q_i(t) \equiv q_i^* \\ &= \frac{1}{|Sopt|}\chi_{(Sopt)}(i)\end{aligned} \tag{10.3.9}$$

其中：$Sopt$ 表示整体最优解的集合。$\chi_{(Sopt)}(i)$是 i 的特征函数，定义为：

$$\chi(S_{opt}(i)) = \begin{cases}1 & \text{对 } i\in S_{opt} \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{10.3.10}$$

因此

$$\lim_{t\to 0}\lim_{k\to\infty}P_t\{X(k)\in S_{opt}\} = 1 \tag{10.3.11}$$

(10.3.11)式说明：若对每一个固定的 t 值，算法进程都达到(10.3.9)式定义的平衡状态，那么当 $t\to 0$ 时，算法进程以概率 1 达到整体最优解。

10.4 遗传算法的理论与实现

10.4.1 引言

生物模拟对自然科学和技术科学的发展起着十分重要的推动作用。经过亿万年进化过程的生物界，很多生物体身上表现出十分优异的特性。这些特性非常值得借鉴来指导人们的创造活动。

从本世纪 40 年代，生物模拟就成为计算科学的一个组成部分。人脑神经元活动机制的研究正指导人们研制人工智能计算机，使之部分地具有人脑的功能。

自然进化过程是优胜劣汰、适者生存，生物界中生物体通过演化使自身各种特性最优地适应生存环境。这种优化过程在 60 年代就引起了美国 Michigan 大学的 John Holland 的极大关注，经过十几年的研究发展提出了如今广泛应用的遗传算法(Genetic Algoriehm).

遗传算法是模拟生物进化过程而产生的由选择算子、杂交算子和变异算子三个基本算子组成的全局寻优算法。它从一初始族出发，由选择算子选出性状好的父本，由杂交算子进行杂交运算，变异算子进行少许变异，这一定概率规则控制下随机搜索模型空间。一代代进化，使最终解族对应的误差泛函的值达到设定的要求。其中误差泛函最小值对应的解认为是要求的全局最优解。

本节主要讨论算法的生物学背景，算法的数学描述及实现中的问题，最后简要叙述模拟退火算法与遗传算法的结合。

10.4.2 遗传算法的生物学背景及算法描述

关于生物进化的深层机制，目前人们并不十分清楚，但有一些达成一致的观点。

(1) 进化过程发生在染色体上，而不是发生在它们所编码的生物体身上。梁色体发生变化，生物体就发生相应的性状变化。若变化的生物体适应环境，得到存在与发展，就加强了这种染色体的存在，同时生物体的这种性状就固定下来。然后在此基础上继续进化。

(2) 自然选择把染色体及体现这种染色体的生物体联系在一起。具有这种染色体的生物体若适应性强得到大量存活，那么染色体得到进一步复制、繁殖的机会就增加。总之，是通过适应环境而存活的生物体的发展，而使某种染色体得到存在与繁衍。

(3) 繁殖过程是发生进化的关键因素。变异可以使生物体子代的染色体不同于它们父代的染色体。杂交重组通过结合两个父代染色体中的物质，可以在子代中产生很大差异的染色体。

(4) 生物进化无记忆。有关产生个体的信息包含在个体所携带的染色体的集合及染色体编码的结构中。个体的性状也可能退化，但性状退化的个体会因为不适应环境而消亡。优良性状的保存是由于适者生存、优胜劣汰的惩罚机制得以实现的，并非染色体进化繁衍过程可以记着具有优良性状的个性，并特意使之存在并发展。

大多数生物体是通过自然选择和有性生殖这两种基本过程进化的。自然选择决定了群体中那些适应性强、性状优良的个体得以存活；有性生殖保证了后代基因的混合和重组。两个过程相互加强，使得生存下来的生物群体越来越优化。自然界中还有一些生物体是无性繁殖，它们仅包含单个亲本的基因拷贝和依靠偶然的变异来改进后代。这些生物体进化很缓慢，一般都是些低等动、植物群体。

Holland 创建的遗传算法便是对上述生物进化过程的一种模拟。它利用某种编码技术，把实际问题的参数编码成类似染色体的一个数字串，常用的是二进制编码技术，把参数转化为一个二进制串。实质上，算法是模拟由这些二进制串组成的群体的演化过程。它由三个基本算子组成：复制算子、杂交算子和变异算子。环境的强制作用由选择原则来体现；杂交过程模拟了生物界的有性繁殖；变异算子类似于自然界中生物变异现象以保持生物多样性，算法中引入变异算子是防止算法过早进入局部极值无法跳出。

遗传算法通过有组织地然而是随机地信息交换来重组那些适应性好的串。在每一代中，利用上一代串结构中适应性好的位和段生成一个新的串的群体。为了保持多样性，实质上是为了使算法不陷入局部极值的措施，要以很低的概率使新串的某些段或位发生变异。

遗传算法的基本步骤可总结为：

(1) 选取合适的编码技术把具体问题的参数集转化为类似染色体的数字串，一般用二进制编码，生成二进制数字串。

(2) 在可能解空间的制约下，随机地产生一个由二进制数字串组成的特征串族。

(3) 计算族中每个串对应的适应值(相当于目标函数值)的大小。

(4) 利用复制算子把当前族中的串按与适应值成比例的概率 P_r 复制到新族中。

(5) 利用杂交算子把从当前族中随机选取的两个父本的染色体按一定规则进行杂交。杂交概率 P_c 决定杂运算是否进行。

(6) 变异算子以概率 P_m 作用于新族中每个串上。

(7) 计算新族中各串的适应值。

(8) 判断是否满足收敛条件。满足条件,算法停止;否则,继续执行 4,5,6,7 步,直到算法终止。

遗传算法有如下特点:

(1) 它不是直接作用于参变量集上,而是作用于参变量的某种编码形成的数字串上。

(2) 它不是从单个点,而是从一个解族开始搜索解空间。

(3) 它利用适应值信息,无须导数或其它辅助信息。

(4) 它利用概率转移规则,而非确定性规则。

遗传算法的优势是很明显的,首先,它在搜索过程中不容易陷入局部极值。即使在所定义的适应函数是不连续的,非规则的或有噪音的情况下,它也能以很大的概率找到整体最优解。其次由于它固有的并行性,遗传算法非常适用于大规模并行计算机。

10.4.3 遗传算法的数学描述

由于遗传算法的特殊性,很难用解析方法来描述与分析它。因此人们引入模式概念来描述遗传算法各算子的作用效果。

定义(10.4.1):模式是一个相同的构形,它描述的是一个串的子集。该集合中的串之间在某些位上相同。

一个串可能包含很多模式,对串的显式操作过程实际上蕴含了大量模式的隐式操作。

例:

$$H_1 = *110*1*0$$

$$H_2 = 10*1$$

就是两个不同的模式,它在某些位上固定,某些位上待定。

一个具体的串可用

$$A = a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_L$$

来表示,其中,L 表示串长,a_i 表示一个二元特征(用二进制编码时,a_i 是二元字母表 0 或 1)。

例 $A = 101100110$

就是包含上例两个模式的一种具体实现的一个特定的串。当然 A 中还包含有很多其它模式的具体实现。

遗传算法通过一个串的群体来演化搜索过程,用 $A(t)$表示在时间(或代)t 时的群体,$A(t)$中包含 n 个串 $A_j(j=1,2,\cdots,n)$。

定义(10.4.2):模式 H 的阶就是出现在模式中特征确定的位置的数目,记为 $o(H)$

在二进制数字串中,一个模式的阶就是串中 0 或 1 的数目。

例:

$$o(001*1*1**) = 5$$

$$o(0**1*) = 2$$

定义(10.4.3):模式 H 的定义长度是模式中第一个特征确定的位置与最后一个特征确定的位置之间的距离。记为 $\delta(H)$。

例:

若 $H = 00*****1**$,则 $\delta(H) = 6$

若 $H = ***1*$,则 $\delta(H) = 0$

模式、模式阶及定义长度对于严格地讨论和区分串的相似性是有用的记号,并且它们提

供了一个基本的方法来分析遗传算子对包含在群体中的基因块的作用效果。

(1) 复制算子对模式的作用效果

假定在给定时间步 t,一个特定的模式 H 有 m 个代表串包含在群体 $A(t)$ 中,记为 $m=m(H,t)$。

在复制阶段,每个串依据它的适应值进行复制,或确切地说,一个串 A_i 的复制概率为:

$$P_i = f_i / \sum_{j=1}^{n} f_i$$

因此,在时间步 $t+1$,模式 H 在群体 $A(t+1)$ 中有 $m(H,t+1)$ 个代表串:

$$m(H,t+1) = m(H,t)\cdot n\cdot f(H) / \sum_{j=1}^{n} f_j \tag{10.4.1}$$

$f(H)$ 是在时间步 t 表示模式 H 的串的平均适应值。

群体的平均适应值为:

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{n} f_j / n$$

因此,模式的复制生长方程可表示为:

$$m(H,t+1) = m(H,t)\frac{f(H)}{\bar{f}} \tag{10.4.2}$$

总结:一个特定的模式按照其平均适应值与群体适应值之间的比率生长,即那些高于群体平均适应值的模式在下一代中将会有更多的代表串,而对于那些适应值在群体平均适应值以下的模式,它们在下一代中的代表串将会减少。

例:假定对某一特定模式, $f(H)=\bar{f}+c\bar{f}$

$c>0$ 时,表示 $f(H)>\bar{f}$

$c<0$ 时,$f(H)<\bar{f}$

则:

$$m(H,t+1) = m(H,t)\frac{\bar{f}+c\bar{f}}{\bar{f}} = m(H,t)\cdot(1+c)$$

设 $t=0$ 时,c 为一定值,可知 t 代以后,

$$m(H,t) = m(H,0)\cdot(1+c)^t$$

上式说明,在群体平均适应值以上(以下)的模式将会按指数增长(衰减)的方式被复制。

但复制过程并无助于搜索解空间中新的区域,这是因为复制算子并不产生新的点。

(2) 杂交算子对模式的作用效果

为了检测模式空间中新的区域,需采取杂交步骤,杂交是两个串之间随机地进行信息交换。

仅考虑一点杂交。一点杂交过程首先随机选择一对交配串,然后随机选择一个杂交位置,将其中一个串从头到杂交位置的子串与交配串对应的子串相交换。

例:

$A = 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$

$H_1 = *\ 1\ *\ *\ *\ *\ 0$

$H_2 = *\ *\ *\ 1\ 0\ *\ *$

随机选择杂交位置后,

$A = 0\ 1\ 1\ |\ 1\ 0\ 0\ 0$

$H_1 = *\ 1\ *\ |\ *\ *\ *\ 0$

$H_2 = *\ *\ *\ |\ 1\ 0\ *\ *$

很显然,杂交后 H_1 被破坏,H_2 生存下来。因为 H_1 的定义长度长,易被破坏;H_2 的定义长度短,较易生存。

H_1 被破坏的概度为: $P_d = \delta(H)/(l-1) = \frac{5}{6}$

H_2 被破坏的概率为: $P_d = \frac{1}{6}$

由于当杂交位置落在定义长度之外时,该模式可以生存,则一点杂交算子作用下模式的生存概率为:

$$P_s \geqslant 1 - \frac{\delta(H)}{l-1} \tag{10.4.3}$$

若杂交本身也以随机方式进行,即以概率 P_c 决定是否交配,则生存概率为:

$$P_s \geqslant 1 - P_c \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} \tag{10.4.4}$$

(3) 复制算子与杂交算子结合对模式的作用效果

假设复制与杂交过程相互独立,可以得到如下的估计式:

$$m(H,t+1) \geqslant m(H,t) \cdot \frac{f(H)}{\bar{f}}\left[1 - P_c \cdot \frac{\delta(H)}{l-1}\right] \tag{10.4.5}$$

可见,杂交和复制一起对模式的作用效果是通过把仅有复制作用时的模式期望数与在杂交作用下的生存概率 P_s 相乘得到的。

可以说模式 H 增长或衰减依赖于一个乘积因子,在复制和杂交作用下,这个因子依赖于两个因素:模式适应值是在群体适应值之上或之下;模式具有相对短的还是相对长的定义长度。

那些适应值在群体适应值之上同时又具有短的定义长度的模式将按指数增长率被采样。

(4) 变异算子对模式的作用效果

变异算子是以概率 P_m 随机地改变一个位上的值。为了使模式 H 存活下来,所有特定的位都必须存活,单个基因存活的概率为 $1-P_m$ 且由于每次变异都是独立进行的,因此当模式中 $o(H)$ 个确定位都存活时,在变异算子作用下,模式 H 的存活概率为:

$$P_s = (1-P_m)^{o(H)} \tag{10.4.6}$$

当 $P_m << 1$ 时, $P_s \approx 1 - o(H) \cdot P_m$

(5)三个算子对模式的联合作用——模式定理

在三个算子的联合作用下,一个特定模式 H 在下一代中期望出现的次数可以近似地表示为:

$$m(H,t+1) \geqslant m(H,t)\frac{f(H)}{\bar{f}} \cdot \left[1 - P_c \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} - o(H) \cdot P_m\right] \tag{10.4.7}$$

由此可得如下模式定理:

具有短的定义长度、低阶并且适应值在群体平均适应值之上的模式在遗传算法迭代过程中将按指数增长率被采样。

由模式定理知,遗传算法在迭代过程中,对那些定义长度短的,低阶的及适应性好的模式(被称为基因块)进行采样重组形成具有潜在的更高适应值的串。算法通过作用于这些基因块可以降低问题的复杂性。它不是通过逐一测试各个组合建立高适应值,而是从过去样

本中最好的部分解来构造越来越好的解。

由于每个串中隐含许多模式,因此显式地对 n 个串进行操作,实际上隐含地处理了大约 $O(n^3)$个模式,因此,对于较大模规的优化问题,算法也能以较短的时间找到最优解。

至于算法的收敛性,至今并没明确的证明。但可以说明:如果在代的演化过程中,遗传算法保留最好的解,并且算法以杂交和变导作为搜索解空间的算子,则对于一个全局优化问题,随着演化代数趋向无穷,遗传算法将以概率 1 找到全局最优解。

10.4.4 遗传算法实现中的问题

第二小节中已描述过遗传算法实现的步骤,但有一些较具体的问题仍值得重视。它们分别是选择策略,控制参数的选择和适应值的变换。

1. 选择策略

选择策略是指复制算子按什么方式进行操作。总的原则是让适者生存,即适应值大的串生存概率要大。常用的选择方法有以下几种。

(1) 确定性选择方法

对群体中每个串 l_i 计算生存概率 $P_i(P_i=f_i/\sum_{j=1}^{N}f_j)$,从而得到 l_i 的期望拷贝数 $e^*(=P_i\cdot N)$。按 e^* 的整数部分值,分配给该串一个拷贝数。很显然,总的拷贝数小于 N。剩余部分的充填办法是:把每个串对应的 e^* 的小数部分进行排队,按从大到小的顺序选择对应的串,直到把暂时族填满。

(2) 赌盘选择方法

① 计算群体中所有串适应值的总和 sum$(=\sum_{j=1}^{n}f_j)$;

② 产生一个在 0 到 sum 之间的随机数 Rand;

③ 从族中编号为 1 的串开始,把其适应值与后续串的适应值相加,当累加和等于或大于 Rand 时累加上的那个适应值对应的串,即是所要选择的串。

执行上述过程 N 次,可以把暂时族填满。

由于赌盘选择不能保证把最好的个体留下来,因此又提出最优选择:设 $a^*(t)$是直到代 t 产生的最好个体,按赌盘选择产生 $P(t+1)$后,若 $a^*(t)$不在 $P(t+1)$中,则把 $a^*(t)$作为 $P(t+1)$中的第 $N+1$ 个个体,或者随机地丢弃一个个体,把 $a^*(t)$加入 $P(t+1)$中。

(3) 有退还和无退还剩余随机选择

有退还和无退还剩余随机选择,首先计算期望拷贝数 e_i^*,整数部分决定拷贝数。

对余下的小数部分:

① 有退还剩余随机选择中,把 e_i^* 的小数部分作为赌盘选择的权,利用赌盘选择决定取舍。

② 无退还剩余随机选择中,把 e_i^* 的小数部分视为概率,一个接一个地进行贝努力试验,其中小数部分作为成功概率。

2. 控制参数的选择

在使用遗传算法时,首先要给定一组控制参数,如群体规模,杂交率和变异率等,控制参数的不同选择会对遗传算法的性能产生很大的影响,要想发掘遗传算法执行的最优性能,必须确定最优的参数设置。事实上,参数设置本身也是个优化问题。但此处我们仅讨论一些

原则。

遗传算法的参数空间包括：群体规模、杂交率、变异率、代间隙、选择策略和适应值变换。

群体规模 N：它影响到遗传算法的最终性能和效率。规模太小，群体中所含模式太少，对基因块采样增长速率小，且代表性差，最终解质量不高；规模大的群体包含大量有广泛代表性的基因块，可以阻止算法过早收敛到局部最优解。然而群体规模越大，每一代所需的计算量也越大，这可能导致收敛过程变得太长。

杂交率 P_c：杂交率控制杂交算子的应用频率，在每一代新的群体中，有 $P_c \cdot N$ 个串实行杂交。杂交率越高，群体中串的更新就越快，算法对解空间的搜索能力越强。若杂交率过高，相对复制算子能够产生的改进而言，高性能的串被破坏的速度也加快了。若杂交率过低，算法搜索解空间的能力下降，有蜕变成局部随机搜索算法的危险。

变异率：变异是增加群体多样性的搜索算法。每次新族生成后，新的群体中的每个串的每一位以概率 P_m 进行随机改变，因而每代太约发生 $P_m \cdot N \cdot L$ 次变异，其中 L 为串长。一个低水平的变异率足以防止整个群体中任一给定位保持永远收敛于单一的值；高水平的变异率产生的实质上是随机搜索。

代间隙 G：它被引入算法中是允许出现群体重叠的情形，G 定义在 0 到 1 之间，控制每一代中群体被替换的百分率。

$G=1$ 时，表示全部替换

$0<G<1$ 时，部分替换。表示 $P(t)$ 中的串有 $N \cdot (1-G)$ 个被随地保留到下一代 $P(t+1)$ 中。

选择策略：前面已讨论过，用得较多的是赌盘选择。

适应值变换：目的是提高算法对适应值变化的敏感度。因为适应值是算法唯一利用的信息，对适应值变化是否敏感是很重要的。

3. 适应值变换

首先值得一提的是，赌盘选择要求适应值是正的，而目标函数不一定为正，因此需对目标函数作变换，即：

$$F(x)=\begin{cases} C_{\max}-f(x) & \text{对于} \quad f(x)<C_{\max} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \tag{10.4.8}$$

$C_{\max}$ 选取一个适当大的数。

进行适应值比例变换的目的是调节遗传算法执行过程中串的复制数目以提高算法的性能。通俗地讲是希望放大串的适应值的间隔，不因适应值非常接近而无法选择适应值更好的串。另外，还可压制某些适应值非常大的串控制选择过程。

(1) 线性变换

设原适应函数为 F，比例适应函数为 u，则

$$u(F)=aF+b \tag{10.4.9}$$

称线性比例变换。

系数 a 和 b 的选择必须满足以下两个条件：1. 平均比例适应值等于原平均适应值；2. 最大的比例适应值是平均适应值的指定倍数，即 $u_{\max}=C \cdot F_{\text{avg}}$ 一般 C 取为 2，这两个条件保证平均群体个体和最好的个体的期望复制数分别为 1 和 C。

(2) 幂比例变换

幂比例变换是比例适应值取为原适应值的某个指定幂：

$$U(F) = F^{\alpha} \tag{10.4.10}$$

α 值一般是依赖于具体问题的在算法执行中需要变化以满足要求的伸缩范围，即 α 是代 t 的函数。

(3) 指数比例变换

指数比例满足关系式

$$u(F) = \exp(-\beta F) \tag{10.4.11}$$

指数比例既可让非常好的串保持较多的复制机会，同时又限制了其复制数目，以免很快控制整个群体。同时对于适应值相近的串也提高了竞争性。参数 β 的值决定了选择的侧重，β 越小，选择强制越趋向于那些具有最高适应值的串，β 值随着代的演化而增大，它所起的所用类似于模拟退火算法中的控制参数 t。

10.4.5 遗传算法与模拟退火算法的结合

上一节我们已讨论过模拟退火算法，它直接模拟固体退火过程，在冷却进度表的控制下，对每一个固定的控制参数 t，状态转移的次数要足够多，使得算法进程达到平衡状态，用Metropolis 准则决定新状态的接受或舍弃。随着控制参数 t 变得足够小，算法会以概率 1 达到全局极小点。但完全实现上述过程会非常耗时，而且模拟退火算法对已试探过的区域没有记忆，并无法判断在哪些区域中有更多的机会找到最优解。

遗传算法可以利用模拟退火算法控制参数 t 的作用，使得在接近全局最优时收敛得更快，更好。

为充分发挥两种算法的优势，把两种算法结合在一起产生了退火演化算法，它是通过变异和选择不断改善一个解的群体。

退火演化算法首先从包含 N 个点的初始群体出发，对每个控制参数 t 的取值，群体中每个点都产生 L 个新解，这些解依据 Metropolis 准则被接受或舍弃。经过一个冷却步后，群体由原来的规模 N 增加到至少包含 $N\cdot(L+1)$个点。按照与这些点的适应值成比例的概率从中选择 N 个点作为生存集。若最好的点不在生存集中，则从生存集中随机地去掉一个点，然后把最好的点加入生存集。降低控制参数 t 的值进入下一步迭代。按照模拟退火算法的渐近收敛性质，最终会给出一个包含全局最优解的解集。

退火演化算法采用一个解的群体来代替单点状态的迭代，大大减少了陷入局部极小的可能性，并且可导致快速收敛到全局极小值。它可看作模拟退火算法的并行执行。

10.5 全局寻优算法在地震反演中的应用

地球物理学的核心问题就是个反演问题，基于模型的反演一般需要求解一个最优化问题，即在模型空间中寻找一个模型 m，由它产生的合成数据与观测数据的误差能量达到最小。由于地球物理反演问题中的误差能量函数一般是复杂的多峰函数，且模型空间极大，常规的依赖梯度信息的非线性优化方法很难克服对初始值的依赖性，得到较好的反演结果。因此，不依赖初始值，不利用导数信息的随机搜索全局优化算法——模拟退火算法及遗传算法自然地引用到地球物理反问题中。

本节讨论两种算法在一维地震全波形反演中的应用。由于两种算法在正问题的求解以及目标函数的定义及计算方面是共同的,因此把它们单独列出。

10.5.1 一维声波正演问题描述及目标函数的定义

1. 一维声波正演问题

一维声波正演问题可描述为:

$$\frac{1}{K(z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right]=S(t)\delta(z) \tag{10.5.1}$$

其中 $K(z)\left(=\frac{C^2}{\rho(z)}\right)$ 为体变模量;

$S(t)$ 为振源函数;

$\rho(z)$ 为密度函数。

(10.5.1)式有很多种求解方法,如有限差分法,特征线法等。在后面的反演例中,采用 Pan (1988)的方法在 ω-p 域中求解,在 ω-p 域中求解速度快,而且与平面波源的假设相符合。

用什么算法求解正问题首先影响算法的执行速度,因为两种算法中都需大量计算合成记录来求目标函数。第二,凡是正演过程中不能描述的物理现象全作噪音处理,这会影响到最终反演解的质量。一般而言,在计算速度能保证的情况下尽量选择能描述比较复杂的物理现象的数学模型。

2. 误差能量函数的定义

一般而言,在 L^2 意义下,用抽象距离的概念来定义误差泛函。抽象地,可如下定义:

$$E_{(m)}=\iint_S\left[ucal(m)-uobs(m^\circ)\right]^2\mathrm{d}m \tag{10.5.2}$$

其中 S 为模型空间;

m°代表真实模型;

$uobs$ 代表观测数据;

m 代表任一检测模型;

$ucal$ 代表合成数据。

下面讨论的反演用相关函数作误差能量函数,定义为:

$$E_{(m)}=\frac{1}{N_p}\sum_1^{N_p}\frac{\sum_1^{N_w}u_0\,u_s^*(m)}{\left(\sum_1^{N_w}u_0u_0\right)+\left(\sum_1^{N_w}u_s(m)u_s^*(m)\right)} \tag{10.5.3}$$

其中 N_p 代表射线参数总数;

N_w 代表离散频率数;

u_0 表示观测数据;

u_s 代表合成数据。

由于 u_0,u_s 均为复数,$E(m)$也为复数,取其实部作为目标函数值。

10.5.2 模拟退火算法在一维地震全波形反演中的应用

按照 10.3 节的讨论,使用模拟退火算法时首先要确定解空间,第二步定义目标函数,然

后才能进入算法的实施。

目标函数已如(10.5.3)式定义，模型空间由模型中包含参数的个数，每个参数的变化范围及反演分辨率(即对参数的采样率)决定。

反演例中以一个十层的模型为基础，对该模型进行正演模拟得到的合成记录权作观测数据。如图 10.5.1 所示。用模拟退火算法来反演十层的速度及密度参数。其中速度变化

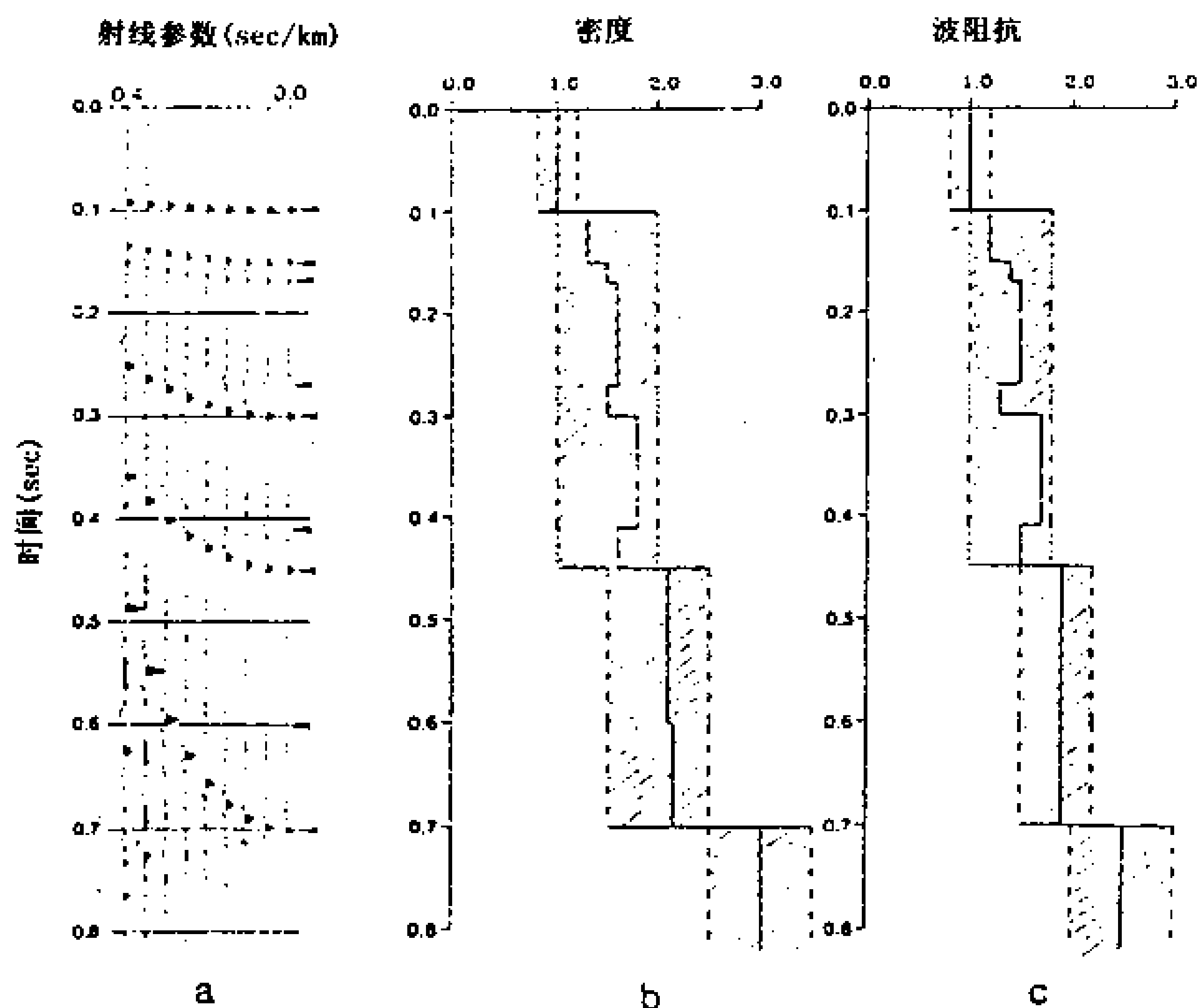


图 10.5.1　模拟退火算法对合成记录的反演

图(a)代表用右边图(b,c)所示的参数作出的正演合成记录(当作观测记录用)，每个射线系数对应一道；图(b)代表十层速度参数的分布范围，纵坐标用双程旅行时表示；图(c)代表对应的十层密度参数数的分布。

范围为 0.8～3.0km/s，速度采样间隔为 0.05km/s；密度变化范围为 0.8～2.2g/cm^3，密度采样间隔为 0.05g/cm^3。可以看出模型空间非常庞大。一个模型采样可记为：

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N/2} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{N/2} \end{bmatrix}$$

反演开始时,随机地在模型空间 S 中选一个点 m。模拟退火算法的实现过程主要由两部分组成:Metropolis 算法的实施和冷却进度表的选择。Metropolis 算法的实施过程为:在某一个固定控制参数 t,首先令 m_2 到 m_N 固定,对 m_1 的摄动顺序为:$m_{\min}, m_{\min}+\Delta m, m_{\min}+2\Delta m, m_{\max}$。然后计算转移接受概率:

$$P_{(m_{ij})} = \frac{\exp(-E(m_{ij})/t)}{\sum_{j=1}^{m}\exp(-E_{(m_{ij})/t}/t)}$$

其中: $m_{\min}$为 m_i 的取值下限,$m_{\max}$为 m_i 取值上限。

m_{ij}代表第 i 个参数,第 j 次摄动的取值。

用赌盘选择来决定保留 m_1 的哪一次改变。接着固定 m_1,及 m_3 到 m_N,重复上述对 m_1 的操作。执行上述过程 N 次,就完成了一次 Metropolis 算法的迭代。降低控制参数 t 进行下一轮 Metropolis 算法的迭代。

冷却进度表的确定,首先当速度、密度的变化范围及采样间隔给定后,实际上已定下了 Markob 链的长度。起始温度的选择是最困难的,t_0 选得太高,会延缓收敛时间,选得太低,算法易陷入局部极值。一般用试验的办法确定 t_0。试验表明:算法进程发展过程中存在一个临界温度,它是固体退火过程中分子从无序向有序开始转化时的温度或结晶开始发生时的温度。把 t_0 置于临界温度稍上一点,既可避免算法陷入局部极值,又可保证算法较快地收敛。衰减方式一般取为 $t_k = t_0(0.99)^k$,其中 k 为衰减次数或迭代次数。

图 10.5.2 的试验表示,从不同的温度开始降温,温度递减方式为 $t_k = t_0(0.99)^k$,有限次迭代后,算法进展状况的差异。很显然,右下图的效果最好,表明初始温度取为 $t_0 = 0.005$ 相对于这组试验条件来说是合适的,算法收敛得很快,合成记录与观测记录的相关程度在 25 次迭代后已达到很高。

利用上述 Metropolis 准则及冷却进度表,得到图 10.5.1 所示模型的反演结果,如图 10.5.3 所示。图 10.5.3 所示的是相关系数 0.952 对应的反演模型。可以看到,反演模型与真实模型很逼近,波阻抗的逼近情况更好,因为它部分地消除了速度与密度反演的不确定性。用此模型做正演,与真实模型的正演结果相此,基本上看不到差异。说明模拟退火算法在这种情况下的应用相当成功。

当然,用模拟退火算法解决实际资料的反演问题时,存在问题很多,但从上面的讨论,可

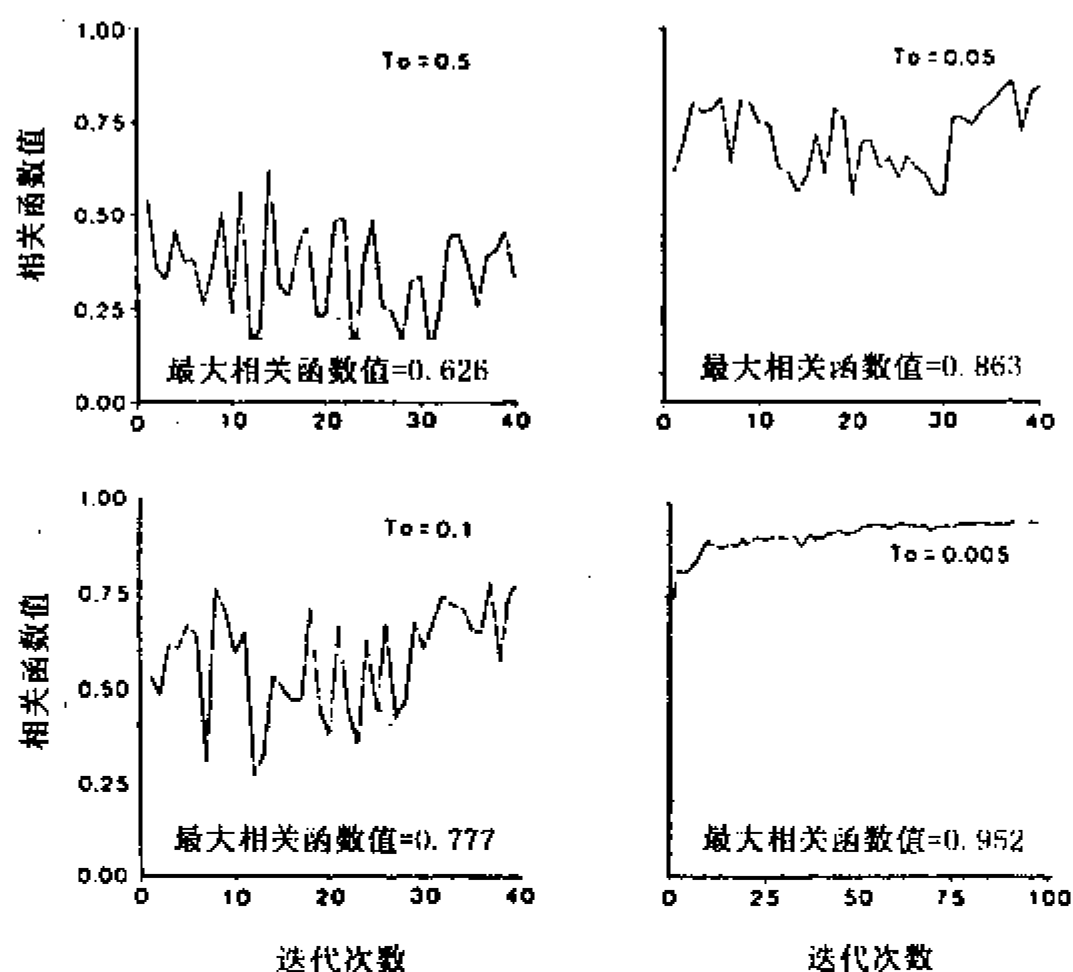


图 10.5.2 取不同起始温度时，算法收敛情况数值试验结果

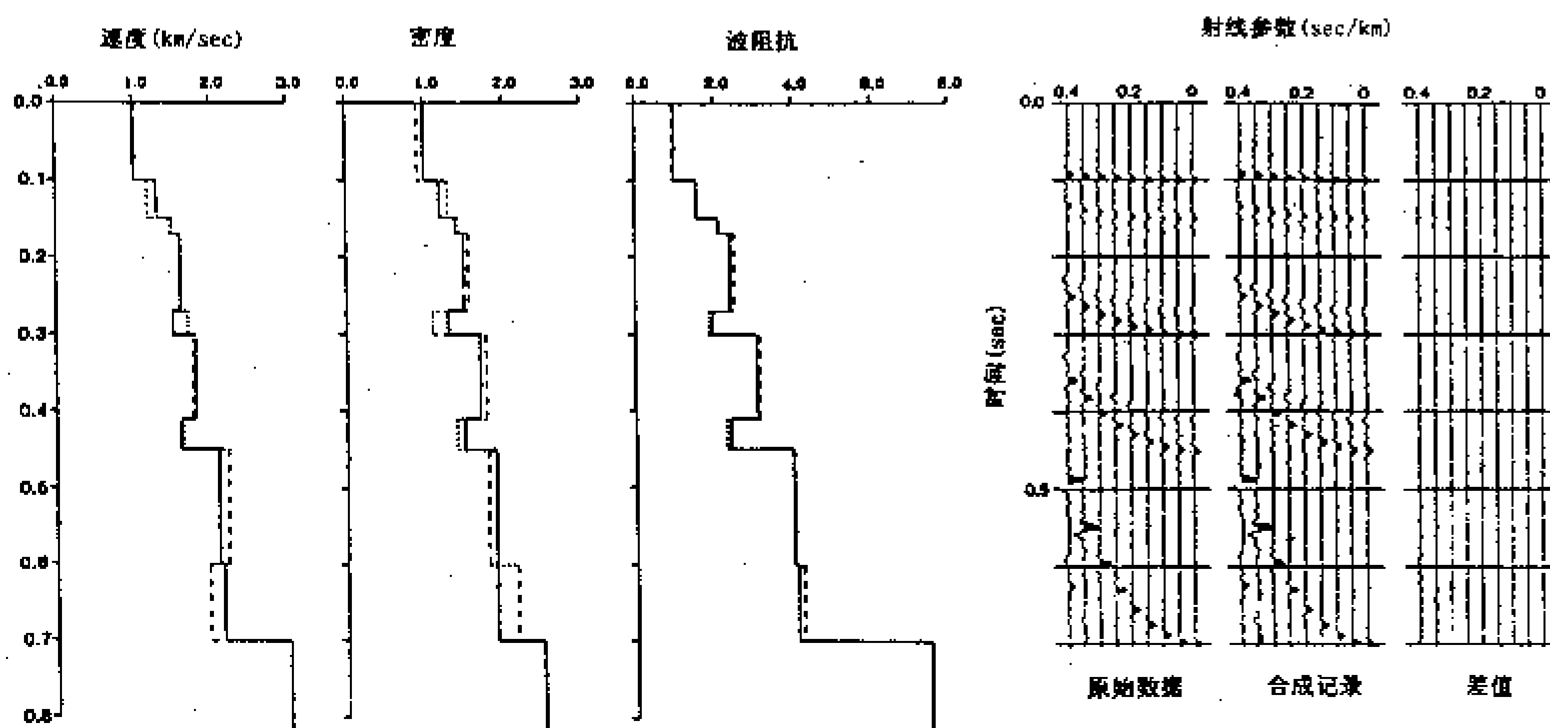


图 10.5.3 模拟退火算法的反演结果，左图表示真实模型与反演模型的比较
其中，实线代表真实模型的参数分布，虚线代表反演模型的参数分布；
右图表示观测记录与利用反演结果所作的合成记录的比较

以看出算法在大规模空间中全局寻优的潜力。

10.5.3 遗传算法在一维地震全波形反演中的作用

根据10.4节的讨论,遗传算法本身在实现过程中要解决的主要问题包括,参数编码问题及控制参数的选择问题。

本小节中反演问题的讨论仍以图10.5.1展示的模型为基础,正演问题及目标函数的选择仍沿用第一小节的规定。

1. *参数编码*

首先要确定参数的变化范围及所要求的分辨率。例如某层速度的变化从1.5km/s到2.78km/s,速度采样率(即分辨率)为0.01km/s,则参数最大的变化量为1.28km/s,用二进制编码方式时,二进制数字串表示该变化量需7位($2^7=128$),计算参数的实际变化时,把二进制数字串转换十进制数,乘上分辨率,加上层速度的下限值即可。注意,此时分辨率的规定一般是考虑小数点后保留几位有效数字算是合乎要求。不像模拟退火算法那样对参数变化范围作均分当作分辨率。

二进制串编码过程可图示为:

二进制串

*	*	*	*	*	*	*

二进制串表示的可能的参数摄动量(Δm)

$$\begin{cases} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

参数取值的下限记为m_{min},上限记为m_{max},参数变化的实际取值记为:$m_{min}+\Delta m$,*号表示0或1。

参数编码时应注意:同一类参数应尽量取相同的编码长度,不同类参数,编码长度可以不同。编码长度取决于模型参数变化范围及要求的分辨率。实际应用中尽可能地短,编码长度短,代表的模型空间小,算法搜索起来要快。

参数被编码成二进制串后,遗传算法的三个算子(复制算子、杂交算子和变异算子)依次作用于二进制串上,而不作用于实际参数本身。

2. *控制参数的选择*

控制参数主要包括:群体规模N,杂交率,变异率和适应值变换。

传统遗传算法,一般把n个参数的二进制串首尾相连,串在一起形成一个长串,然后利用单点杂交。可想见,对一维地震反演来说,这种方式不适用,关键是如果这样做,算法搜索模型空间的速度太慢。因而,此处采用多点杂交方式,即把一点杂交应用于n个参数编码形成的每个二进制串上。这样杂交算子搜索模型空间新区域的速度会大大加快。

另外,传统遗传算法把杂交产生的子个体全部保存,此处引人更新概率P_u,当子个体性

状优于父个体，则子个体取代父个体；若子个体性状劣于父个体，则以更新概率 P_u 接受子个体。

以下用数值试验说明各种参数的选择原则。

图 10.5.4 展示了杂交概率 P_x，更新概率 P_u 对算法进程的影响。从图中可见，当固定变异概率 $P_m=0.01$ 杂交概率 $P_x=0.6$ 时，更新概率越大，收敛速度越快，因此更新概率应保持高水平。当固定 $P_m=0.01$，更新概率 $P_u=0.9$ 时，杂交概率 P_x 太大或太小都会影响算法的收敛速度。可见，杂交概率要取得适中，比如 $P_x=0.6$ 上下，才能保证算法适度的搜索模型空间新区域的能力。这种能力太小，算法会陷入局部搜索；太大，有演变成完全随机搜索的危险。

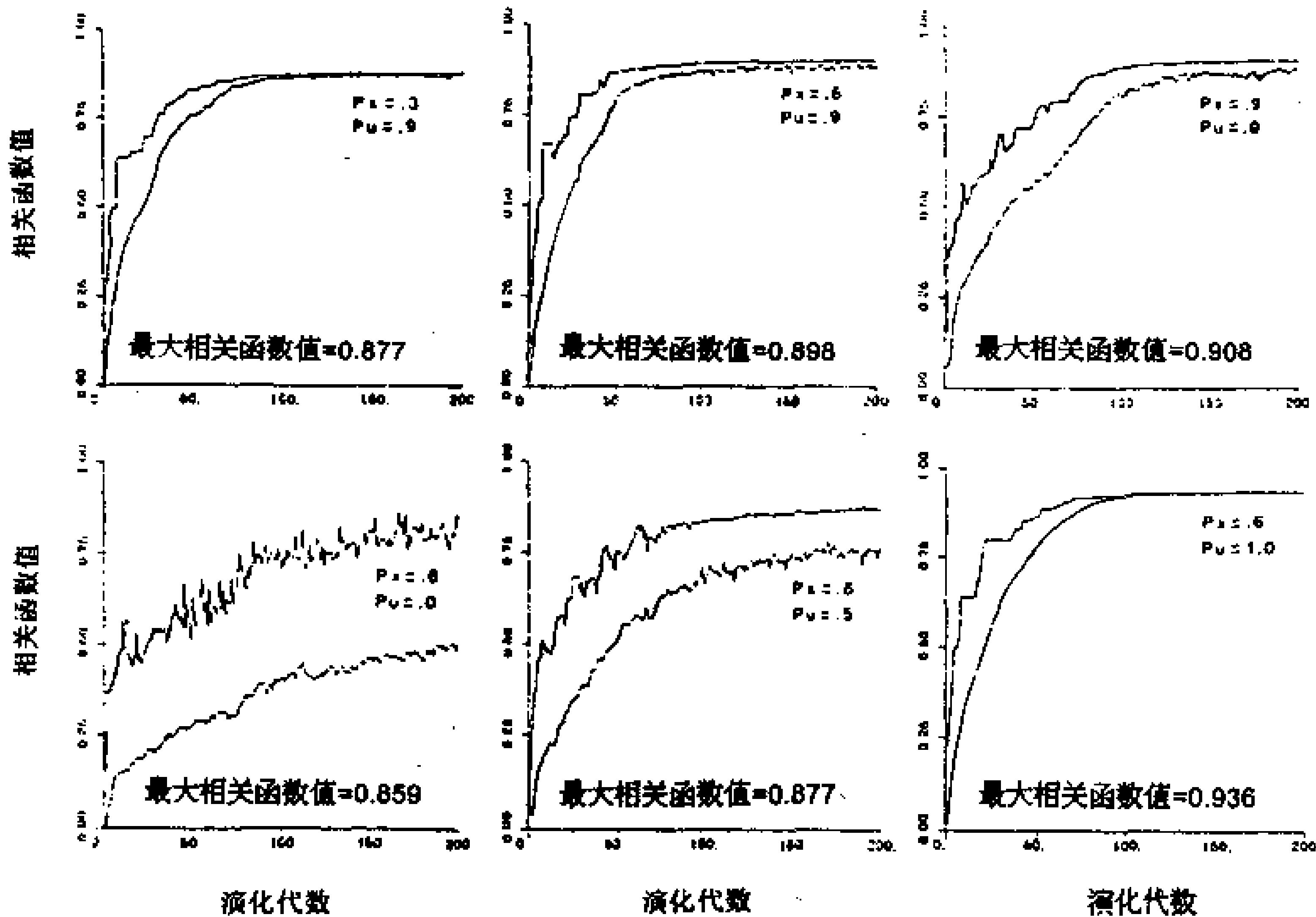


图 10.5.4　选择杂交概率 P_x 和更新概率 P_u 的数值试验

其中，上部曲线代表族中最大相关函数值，
下部曲线代表平均相关函数值

图 10.5.5 说明变异概率 P_m 不能取得太高，P_m 太高，变异算子破坏了由复制算子，杂交算子聚集来的对应优良性状的基因块，使算法收敛变缓，甚至不收敛。

数值试验表明：杂交概率取 P_x 取 0.6，变异概率 P_m 取 0.01，更新概率 P_u 取 0.9，这样一个组合在大多数情况下能在不太多的演化代后使算法达到收敛。

图 10.5.6 显示了群体规模大小对算法收敛性的影响。其它参数由上面讨论的组合决定。可见群体规模大小对收敛性的影响不大。因此尽可能选取较小的群体规模，以加快计算速度。

关于适应值变换，此处用了指数比例变换，实际上是利用模拟退火算法中的温度控制参数 t 的倒数作为 β，即比例适应值函数取为：

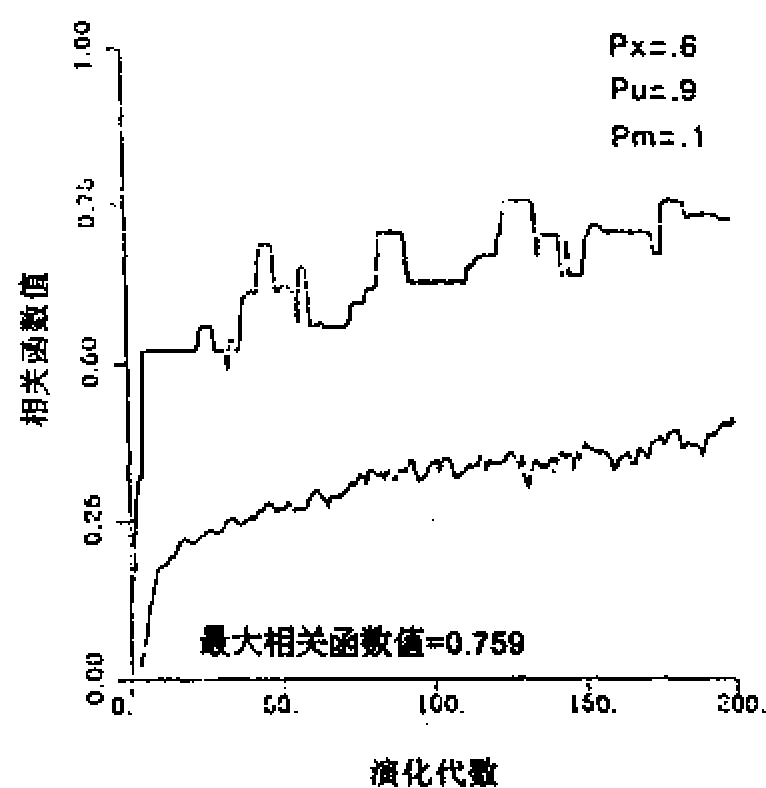


图 10.5.5　变异概率 P_m 对算法进程影响的数值试验

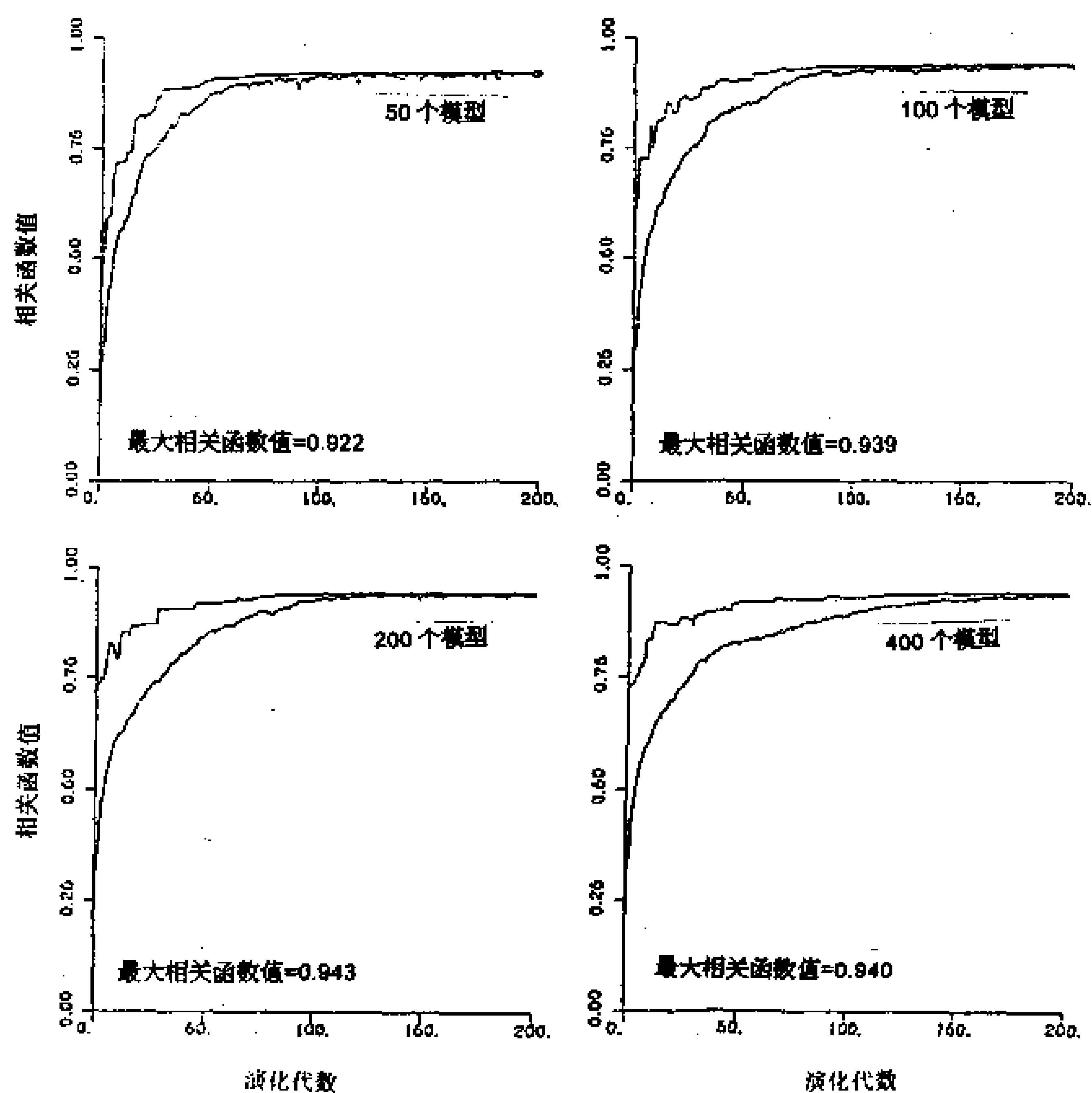


图 10.5.6　群体规模大小对算法进程影响的数值试验

$$U(E) = \exp(-\beta E) = \exp\left(-\frac{E}{t}\right) \tag{10.5.5}$$

关于适应值变换的作用,10.4.4 节已叙述过。此处用数值试验证明了上面的观点。

图 10.5.7 展示了引入控制参数 t 后,t 对算法进程的影响,很显然,引入 t 后,算法收敛进程大大加快。一般 25 代以后,算法已收敛得很好。尤其是 $t_0 = 0.001$、衰减格式取为 $K_g = t_0 \cdot 0.99^{g-1}$ 的情况下,收敛状况最好。

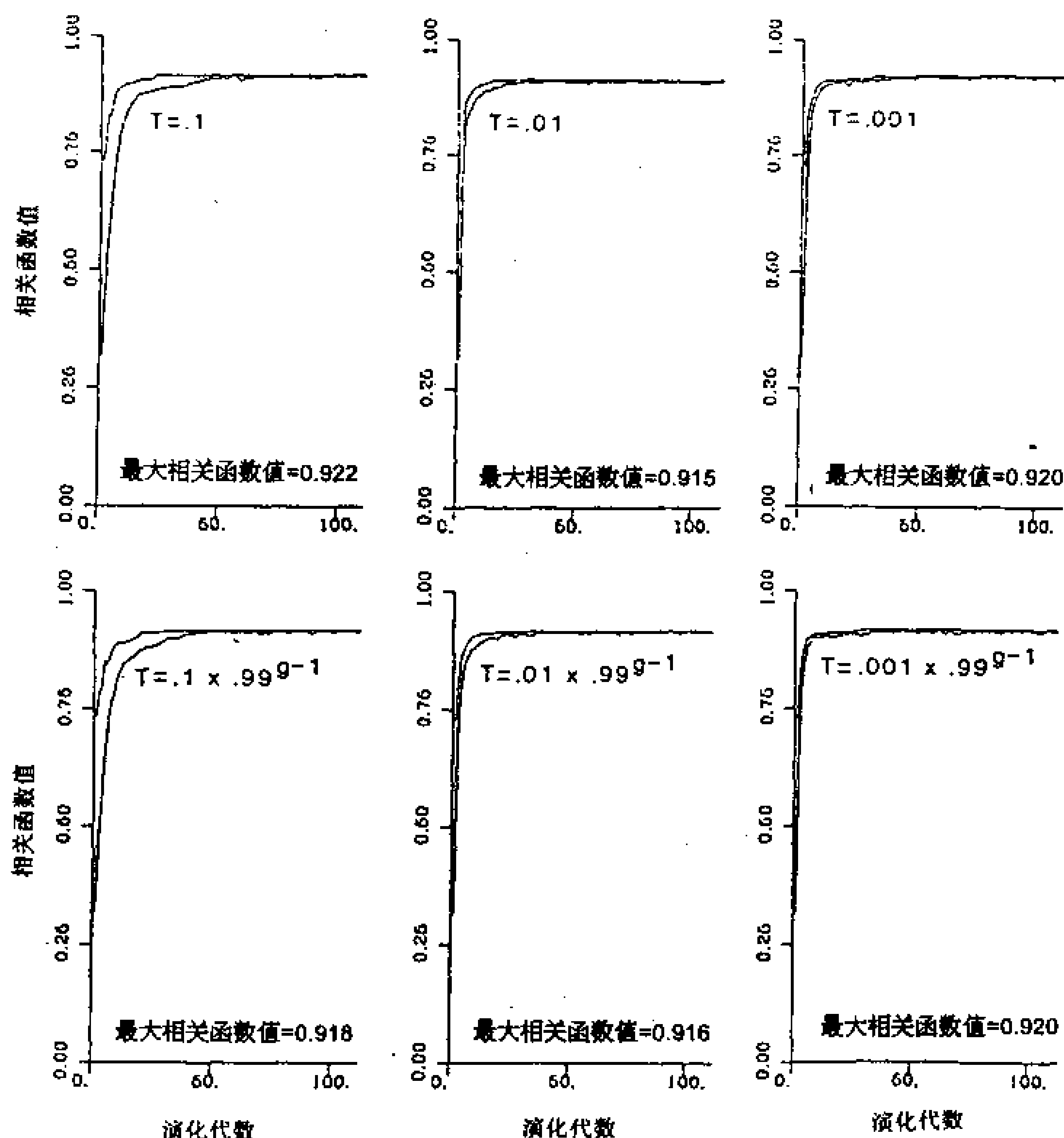


图 10.5.7 适应值变换对算法收敛性,影响的数值试验结果

最后,图 10.5.8 展示了在上述数值试验中测试出的最好的控制参数组合的控制下,算法得到的反演结果,所展示的反演结果对应于相关系数为 0.992。左边是反演模型与真实模型的差异,右边是合成记录与观测记录的差异。在这种理想条件下,反演结果还是不错的,尤其是波阻抗的反演结果更好。此处,我们主要为了讨论全局寻优算法的效能,对反演理论不过多谈及。

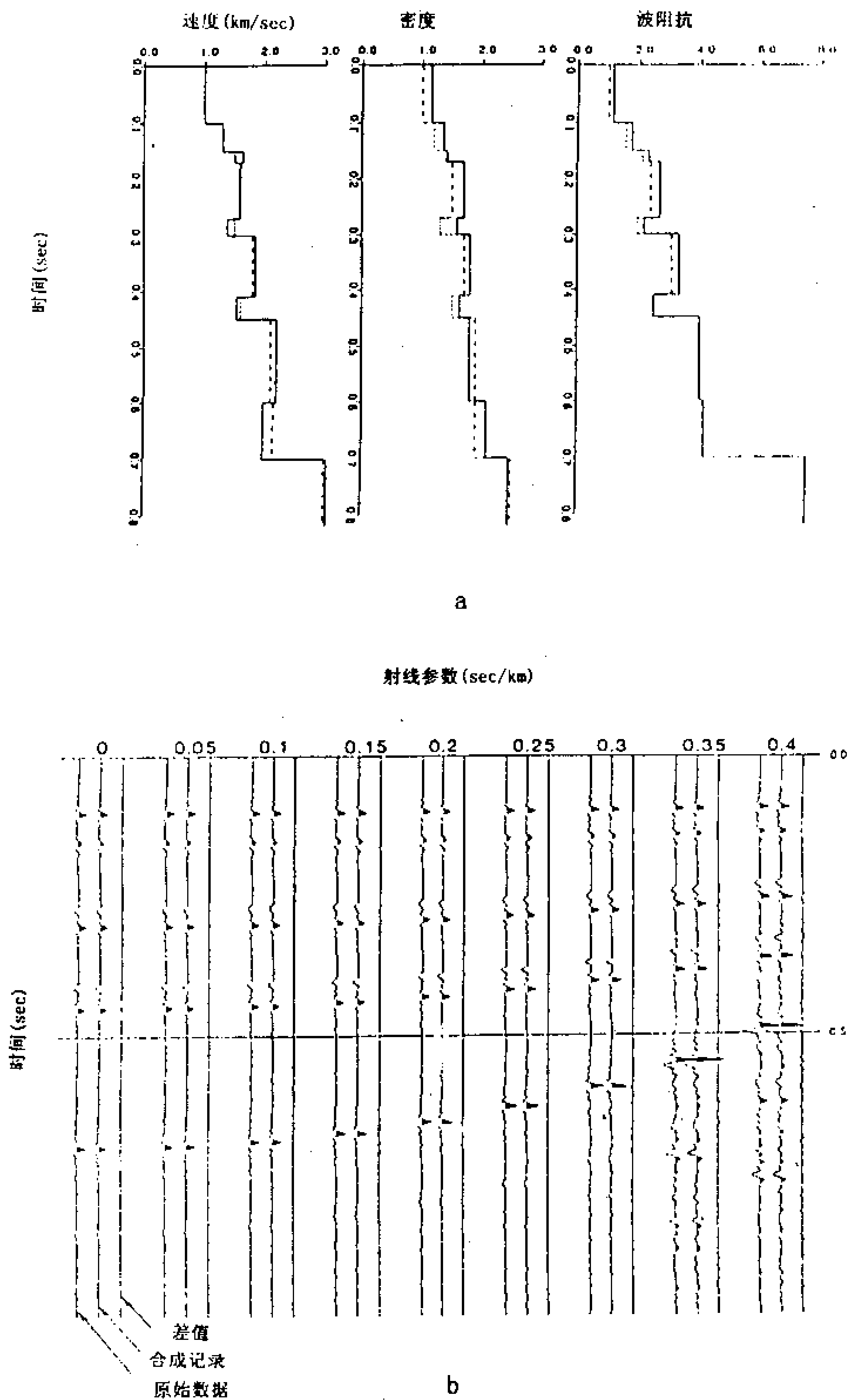


图 10.5.8 遗传算法的反演结果

(a) 图表示真实模型与反演模型的比较,其中实线代表真实模型,虚线代表反演结果;

(b) 图表示以(a)图所示模型作出的正演合成记录与观测记录的比较

第10章 参考文献

1. Kirk patrick, S., Gelatt, C.,D. Jr., and Veclhi, M. P., 1983, Optimization by Simulated annealing: Science, 220, 671—680.
2. Dekkers, A., and Aarts, E., 1991, Global optimizaton and simulated annealing: Mathematical Programming, 50, 367—393.
3. Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A., and Teller, E., 1953, Equation of state Calculations by fast Computing machines: J. Chem. phys., 21, 1087—1092
4. Michalewicz, Z. Janikow, Z., C., and Krawczyk J. B., 1992, A modified genetic algorithm problems: Computers. Math. Applic. Vol. 2s, No.12, 83—94.
5. Grefenstette, J.J., 1986, Optimization of control parameters for genetic algorithms, IEEE Trans. on system, man, and cybeynetics, Vol.SMC-16,No.1, 122—128
6. Ingber, L., and Rosen, B., 1992, Genetic algorithms and very fast simulated reannealing: A Comparison: Math. Comput. Modeling, vol.16. No.11, PP.87—100.
7. Goldberg, D. E., 1989, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning; Addison Wesley Publish Company
8. Sen, K. M., and stoffa, L.P., 1991, Nonlinear one-dimensional Seismic waveform inversion using simulated annealing, Geophysics, Vol.56, No.10, 1624—1638
9. Stotffa, L. P. and Sen, K. M., 1991, Nonlinear plane—wane seismograms, Geophysics, Vol.56, No.11, 1794—1810.
10. Pan. G. S., Phinney, R. A., and Odom, R.I., 1988, Full-waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified acoustic media: theory and feasibility: Geophysics, vol.53, No.1, P21—31.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝计算地球物理学概论
作者＝马在田　曹景忠　王家林等编著
页数＝４３０
ＳＳ号＝１１９９４５７９
出版日期＝１９９７年０５月第１版